1 Récursivité croisée

On parle de récursivité *croisée* lorsque deux méthodes s'appellent l'une l'autre récursivement.
Les méthodes suivantes sont censées donner la parité d'un nombre entier : cela sera-t-il le cas pour toutes les valeurs entières positives ? Si ce n'est pas le cas, proposer une correction.

```
class PairImpair{
    static boolean pair(int n){
        if (n==0) return true;
        else return impair(n-1);
    }
    static boolean impair(int n){
        if (n==1) return true;
        else return pair(n-1);
    }
    public static void main(String[] args) {
        int p = Integer.parseInt(args[0]);
        System.out.println("pair? "+ pair(p) + " impair? " + impair(p));
    }
}
```

2 Exponentiation

En utilisant la propriété : $x^n = x.x^{n-1}$ (lorsque $n > 0$) et $x^0 = 1$, écrire :

1. une méthode qui calcule x^n (où x et n sont des entiers), par la méthode itérative (sans appel récursif) ;
2. une méthode qui calcule x^n (où x et n sont des entiers), en utilisant la récursion.

3 Exponentiation rapide

L'algorithme dit d'*exponentiation rapide* permet de calculer la $n^{\text{ème}}$ puissance d'un nombre plus efficacement qu'en le multipliant n fois par lui-même. Il repose sur les égalités $x^{2n} = (x^n)^2$ et $x^{2n+1} = x\,(x^n)^2$.

1. Écrire une méthode récursive prenant deux entiers x et n en argument, et renvoyant la valeur de x^n, en appliquant récursivement celle des deux égalités qui correspond.
2. Supposons que l'on calcule 2^{65} à l'aide de cette méthode. Donner la suite des appels récursifs effectués, avec leur imbrication.
3. Combien y a t-il d'appels à la méthode provoqués lors du calcul de 2^{16} ? 2^{32} ? 2^{64} ? et par la méthode de l'exercice précédent ?

4 Fibonacci

La suite de Fibonacci, due à Leonardo Pisano, Léonard de Pise dit Fibonacci, est définie de façon à calculer le nombre d'individus d'une population évoluant de la façon suivante :
- on suppose que les individus ne meurent jamais ;
- au début il n'y a qu'un couple d'individus (non pubère) ;
- les individus deviennent pubères au bout de deux mois ;
- un couple d'individus pubères engendrent chaque mois un couple d'individus non pubères.

1. Combien de couples existe t-il au bout de n mois ?
2. Trouver la récurrence, et écrire la version récursive du calcul de $F(n)$.
3. Comparer ce type de génération avec celui des hyménoptères.