

Introduction à l'informatique et la programmation

IF1 2013-2014

Matthieu Picantin



LIAFA UMR 7089
CNRS & Université Paris 7 Denis Diderot

17/10/2013

Algèbre de Boole

- ensemble $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ muni d'un opérateur unaire \neg (négation) et de deux opérateurs binaires \vee (disjonction) et \wedge (conjonction)
- vérifiant, pour toutes variables booléennes x, y, z de \mathbb{B} , les axiomes suivants :

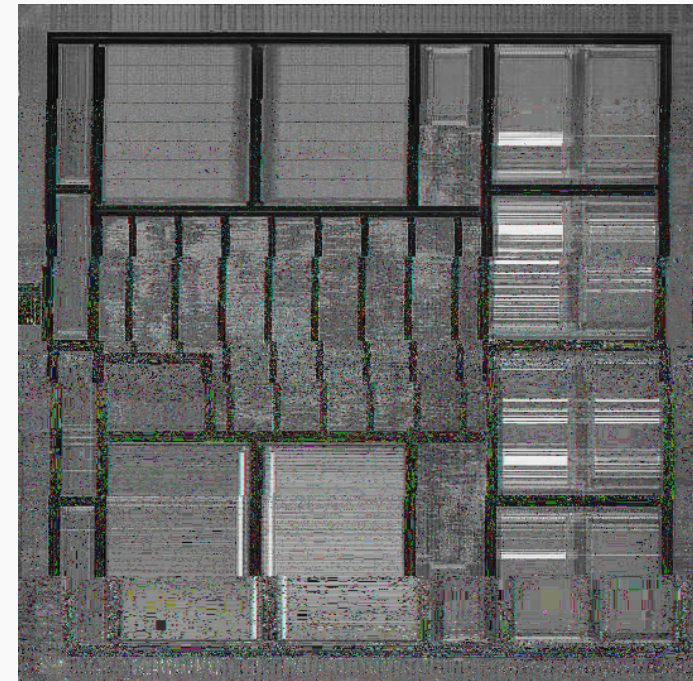
associativité	$\vee (\vee) = (\vee) \vee$	$\wedge (\wedge) = (\wedge) \wedge$
commutativité	$\vee = \vee$	$\wedge = \wedge$
absorption	$\vee (\wedge) =$	$\wedge (\vee) =$
distributivité	$\vee (\wedge) = (\vee) \wedge (\vee)$	$\wedge (\vee) = (\wedge) \vee (\wedge)$
complémentation	$\vee \neg = 1$	$\wedge \neg = 0$

- ayant, pour toutes variables booléennes x, y, z de \mathbb{B} , les propriétés suivantes :

idempotence	$\vee =$	$\wedge =$
neutres	$\vee 0 =$	$\wedge 1 =$
involution	$\neg \neg =$	
De Morgan	$\neg (\vee) = \neg \wedge \neg$	$\neg (\wedge) = \neg \vee \neg$

- interprétation des valeurs :

$0 \iff \text{false}$ et $1 \iff \text{true}$



Connecteurs, opérateurs, fonctions

Une fonction booléenne est une fonction $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ où n est l'arité de

Les quatre opérateurs booléens unaires

	(0)	(1)	
	0	0	contradiction
	0	1	affirmation
	1	0	négation NOT
	1	1	tautologie

Il existe exactement 2^2 fonctions booléennes d'arité

Connecteurs, opérateurs, fonctions

Une fonction booléenne est une fonction $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ où n est l'arité de

	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)	
	0	0	0	0	contradiction
	0	0	0	1	conjonction AND
	0	0	1	0	négation de l'implication \nrightarrow
	0	0	1	1	affirmation de
	0	1	0	0	négation de l'implication inverse \nleftarrow
	0	1	0	1	affirmation de
	0	1	1	0	ou exclusif XOR
	0	1	1	1	disjonction OR
	1	0	0	0	négation connexe de Peirce NOR
	1	0	0	1	équivalence NXOR
	1	0	1	0	négation de
	1	0	1	1	implication inverse \supset
	1	1	0	0	négation de
	1	1	0	1	implication \supset
	1	1	1	0	incompatibilité de Shaffer NAND
	1	1	1	1	tautologie

Choix des connecteurs

- ♦ tous les connecteurs peuvent se déduire d'un nombre limité des autres
- ♦ différents choix sont possibles pour ces et la simplicité des expressions dépend beaucoup de ce choix
 - dans les langages de programmation, on dispose généralement de
 - ★ la \neg (en Java : !),
 - ★ la \wedge (en Java : &&),
 - ★ la \vee (en Java : ||),
 - ★ et parfois le \oplus (comme en C ou Java : ^)
 - chacun des connecteurs NAND et NOR est universel

Circuit combinatoire

- ♦ un **circuit combinatoire** est une mise en œuvre matérielle d'une fonction combinatoire
- ♦ un système logique est dit **statique** si l'état de sa sortie ne dépend que de l'état de son entrée (pas de l'histoire du système)

<http://www.neuroproductions.be/logic-lab/>

Négation

	\neg
0	1
1	0



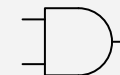
Disjonction

		\vee
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Conjonction

		\wedge
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Ou exclusif

		\oplus
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



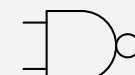
Connecteur de Peirce

		\downarrow
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

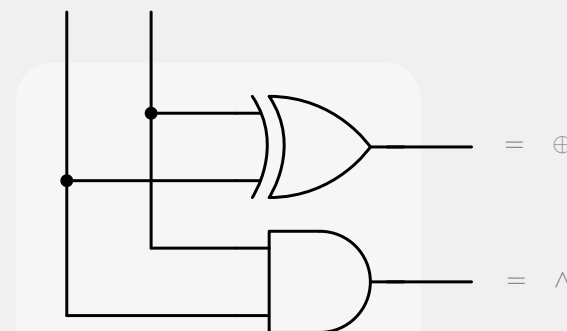


Incompatibilité de Sheffer

		\uparrow
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Demi-additionneur



		\wedge	\oplus
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Additionneur complet

0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1



Circuits séquentiels

- ♦ les sorties sont fonctions des entrées mais aussi de l'état interne du système
 - ▶ la sortie maintient son état même après disparition du signal de commande
- ♦ deux types se distinguent
 - ▶ les verrous : fonctionnement asynchrone
 - ▶ les bascules : fonctionnement synchrone (basé sur une entrée d'horloge)

Verrou RS



- ♦ permet de forcer une valeur et de la conserver

- ▶ $\leftarrow 1$: mise à 0 du verrou (reset)
- ▶ $\leftarrow 1$: mise à 1 du verrou (set)
- ▶ et jamais à 1 simultanément

0	0	/	/
0	1	1	0
1	0	0	1

Bascule D

