Introduction à l'informatique et la programmation
IF1 2010-2011

Matthieu Picantin

LIAFA UMR 7089
CNRS & Université Paris 7 Denis Diderot

28/10/2010

Algèbre de Boole

- ensemble $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ muni d'un opérateur unaire $\neg$ (négation) et de deux opérateurs binaires $\vee$ (disjonction) et $\wedge$ (conjonction)
- vérifiant, pour toutes variables booléennes x, y, z de $\mathbb{B}$, les axiomes suivants :

associativité	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
commutativité	$x \vee y = y \vee x$	$x \wedge y = y \wedge x$
absorption	$x \vee (x \wedge y) = x$	$x \wedge (x \vee y) = x$
distributivité	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
complémentation	$x \vee \neg x = 1$	$x \wedge \neg x = 0$

- ayant, pour toutes variables booléennes x, y de $\mathbb{B}$, les propriétés suivantes :

idempotence	$x \vee x = x$	$x \wedge x = x$
neutres	$x \vee 0 = x$	$x \wedge 1 = x$
involution	$\neg\neg x = x$	
De Morgan	$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$	$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$

- interprétation des valeurs :

$0 \leftrightsquigarrow$ false et $1 \leftrightsquigarrow$ true

Connecteurs, opérateurs, fonctions

Une fonction booléenne est une fonction $f : \mathbb{B}^k \to \mathbb{B}$ où k est l'arité de f

Les quatre opérateurs booléens unaires

	$f(0)$	$f(1)$	
	0	0	contradiction
	0	1	affirmation
	1	0	négation **NOT**
	1	1	tautologie

Il existe exactement 2^{2^k} fonctions booléennes d'arité k

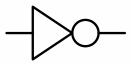
Connecteurs, opérateurs, fonctions

Une fonction booléenne est une fonction $f : \mathbb{B}^k \to \mathbb{B}$ où k est l'arité de f

	$f(0,0)$	$f(0,1)$	$f(1,0)$	$f(1,1)$	
	0	0	0	0	contradiction
	0	0	0	1	**conjonction AND**
	0	0	1	0	négation de l'implication $\not\supset$
	0	0	1	1	affirmation de x
	0	1	0	0	négation de l'implication inverse $\not\subset$
	0	1	0	1	affirmation de y
	0	1	1	0	ou exclusif **XOR**
	0	1	1	1	**disjonction OR**
	1	0	0	0	négation connexe de Peirce **NOR**
	1	0	0	1	équivalence **NXOR**
	1	0	1	0	négation de y
	1	0	1	1	implication inverse $\subset$
	1	1	0	0	négation de x
	1	1	0	1	implication $\supset$
	1	1	1	0	incompatibilité de Shaffer **NAND**
	1	1	1	1	tautologie

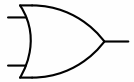
Négation

x	$\neg x$
0	1
1	0



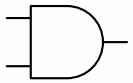
Disjonction

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



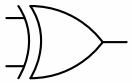
Conjonction

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



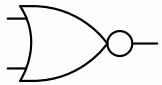
Ou exclusif

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



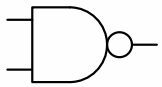
Connecteur de Peirce

x	y	$x \downarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

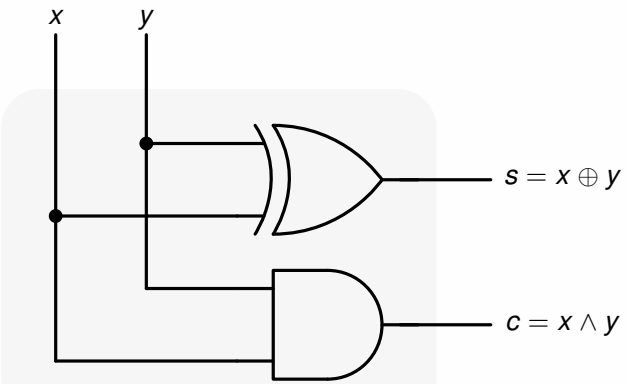


Incompatibilté de Sheffer

x	y	$x \uparrow y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Demi-additionneur



x	y	$x \wedge y$	$x \oplus y$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Choix des connecteurs

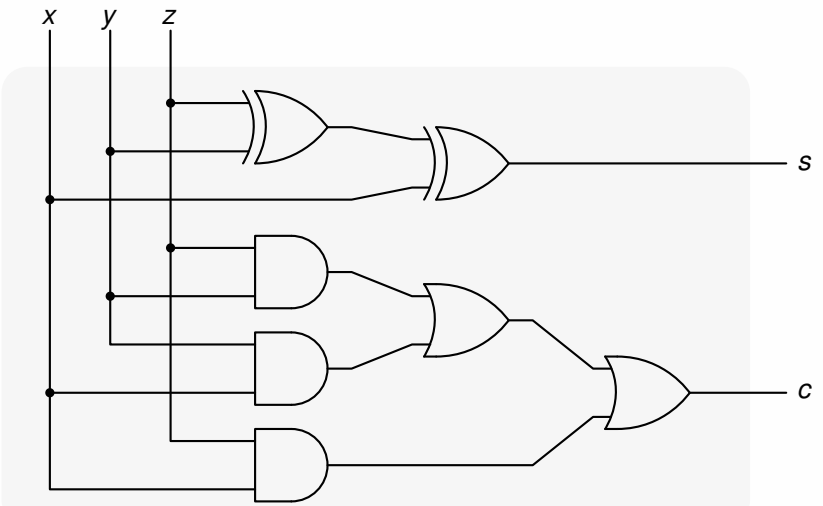
- tous les connecteurs peuvent se déduire d'un nombre limité des autres
- différents choix sont possibles pour ces *connecteurs primitifs*
  et la simplicité des expressions dépend beaucoup de ce choix
  - dans les langages de programmation, on dispose généralement de
    - ⋆ la *négation* $\neg$ (en Java : `!`),
    - ⋆ la *conjonction* $\wedge$ (en Java : &&),
    - ⋆ la *disjonction* $\vee$ (en Java : `||`),
    - ⋆ et parfois le *ou exclusif* $\oplus$ (comme en C ou Java : `^`)
  - chacun des connecteurs NAND et NOR est universel

Circuit combinatoire

- un *circuit combinatoire* est **une** mise en oeuvre matérielle d'une fonction combinatoire *(une parmi une infinité de possibilités)*
- un système logique est dit *combinatoire* si l'état de sa sortie ne dépend que de l'état de son entrée (pas de l'histoire du système)

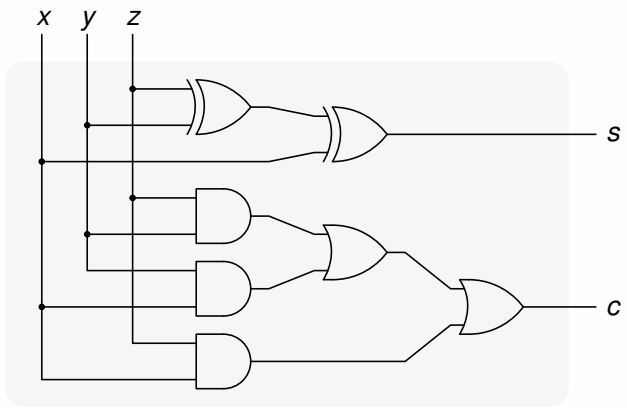
`http://www.neuroproductions.be/logic-lab/`

Additionneur complet



Additionneur complet

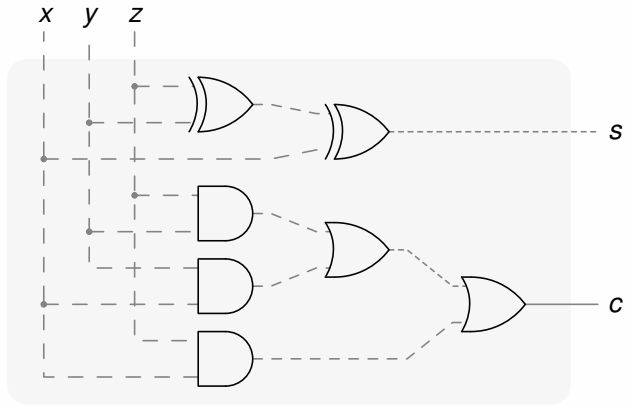
x	y	z	c	s
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1



$$c = \text{majorité}(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z)$$
$$s = \text{imparité}(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$$

Additionneur complet

x	y	z	c	s
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

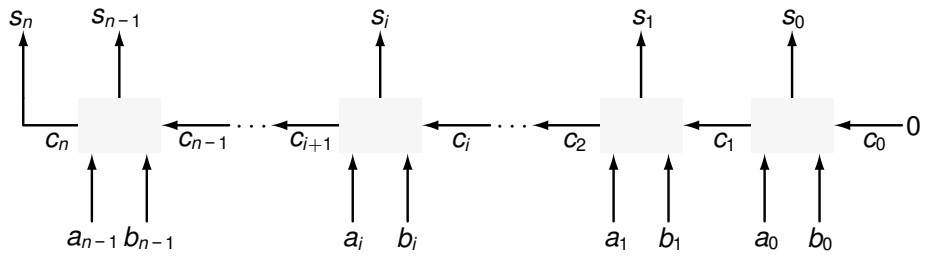


Profondeur d'un circuit

- correspond à son temps d'exécution dans le pire des cas
- est définie comme la profondeur maximale des câbles de sortie
  - un câble d'entrée est de profondeur 0
  - si une porte possède des entrées de profondeur $d_1, \ldots, d_n$ ses sorties seront de profondeur $\max(d_1, \ldots, d_n) + 1$

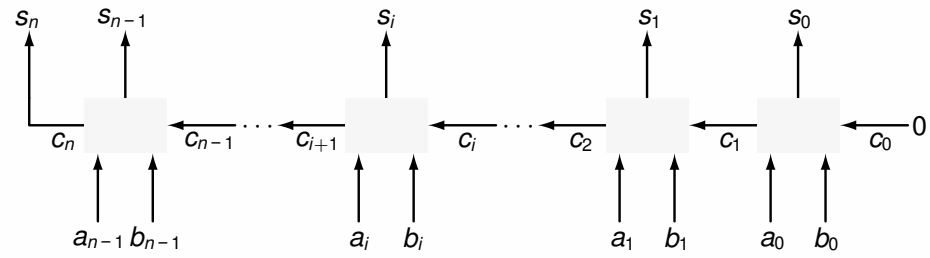
Additionneur en cascade

$$\sum_{i=1}^{n} a_i 2^i = a = \langle\ a_{n-1} \quad a_{n-2} \quad \cdots \quad a_i \quad \cdots \quad a_1 \quad a_0\ \rangle$$
$$\sum_{i=1}^{n} b_i 2^i = b = \langle\ b_{n-1} \quad b_{n-2} \quad \cdots \quad b_i \quad \cdots \quad b_1 \quad b_0\ \rangle$$

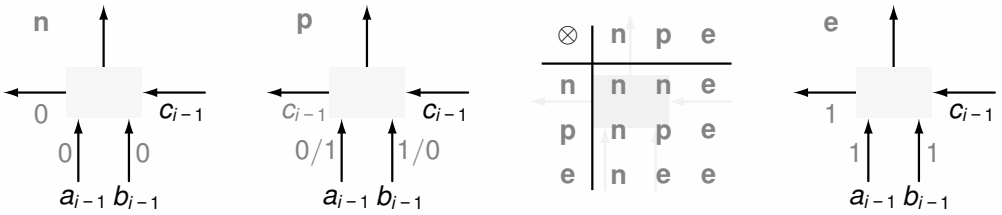


Additionneur en cascade

$$c_n \quad c_{n-1} \quad c_{n-2} \quad \cdots \quad c_{i+1} \leftarrow [\ c_i\ ] \quad \cdots \quad c_1 \quad c_0$$
$$\langle\ a_{n-1} \quad a_{n-2} \quad \cdots \quad a_i \quad \cdots \quad a_1 \quad a_0\ \rangle$$
$$\langle\ b_{n-1} \quad b_{n-2} \quad \cdots \quad b_i \quad \cdots \quad b_1 \quad b_0\ \rangle$$
$$\langle\ s_n \quad s_{n-1} \quad s_{n-2} \quad \cdots \quad s_i \quad \cdots \quad s_1 \quad s_0\ \rangle$$

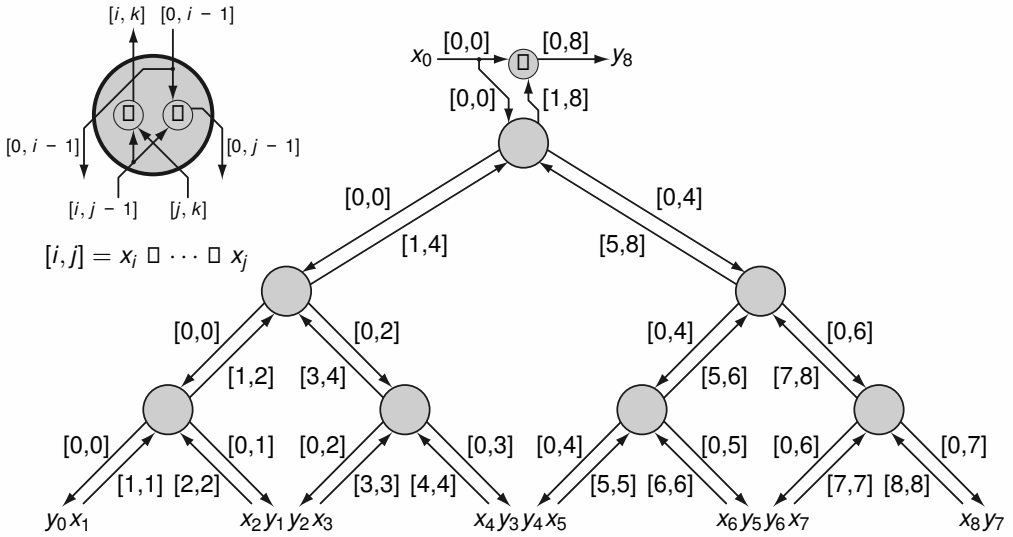


Additionneur avec prévision de retenue



i	7	6	5	4	3	2	1	0
a_i	0	1	0	1	1	1	1	0
b_i	1	1	0	1	0	1	0	1
x_i	p	e	n	e	p	e	p	p	(n)
$x_i \otimes \cdots \otimes x_0$	e	e	n	e	e	e	n	n	(n)

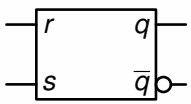
Prévision de retenue par circuit préfixe parallèle



Circuits séquentiels

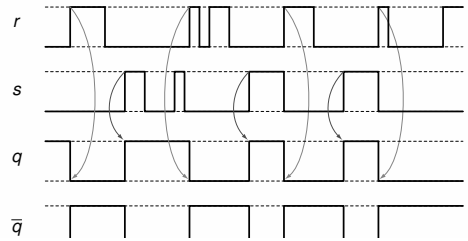
- les sorties sont fonctions des entrées mais aussi de l'état interne du système
  - la sortie maintient son état même après disparition du signal de commande
- deux types se distinguent
  - les verrous : fonctionnement asynchrone
  - les bascules : fonctionnement synchrone (basé sur une entrée d'horloge)

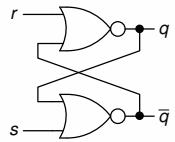
Verrou RS



- permet de forcer une valeur et de la conserver
  - $r \leftarrow 1$: mise à 0 du verrou (reset)
  - $s \leftarrow 1$: mise à 1 du verrou (set)
  - r et s jamais à 1 simultanément

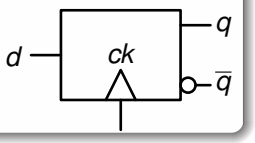
r	s	q	$\overline{q}$
0	0	q	$\overline{q}$
0	1	1	0
1	0	0	1

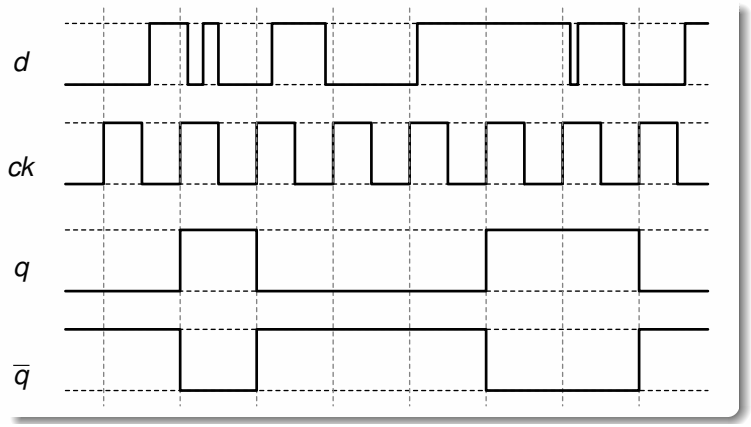




Bascule D

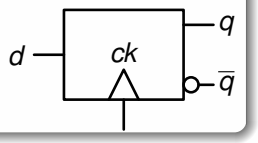
- échantillonne une entrée de donnée sur un évènement de commande
  - d entrée de donnée
  - q sortie de donnée
  - ck entrée d'horloge
- si active sur **front montant** : $q = \square$ d si ck subit $0 \rightarrow 1$; q sinon

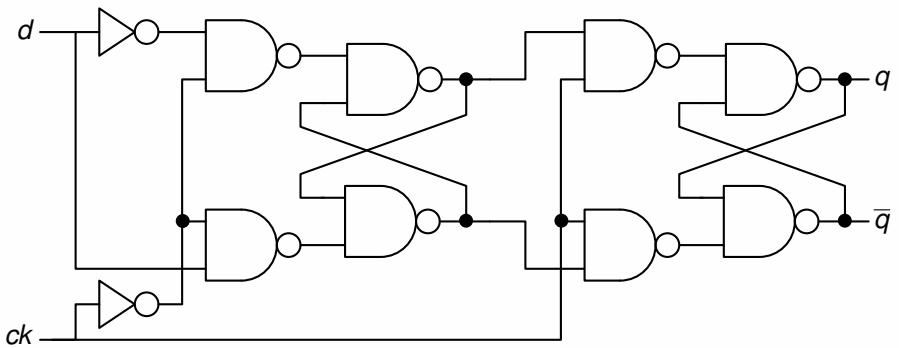




Bascule D

- échantillonne une entrée de donnée sur un évènement de commande
  - d entrée de donnée
  - q sortie de donnée
  - ck entrée d'horloge
- si active sur **front montant** : $q = \begin{cases} d & \text{si } ck \text{ subit } 0 \rightarrow 1 \\ q & \text{sinon} \end{cases}$





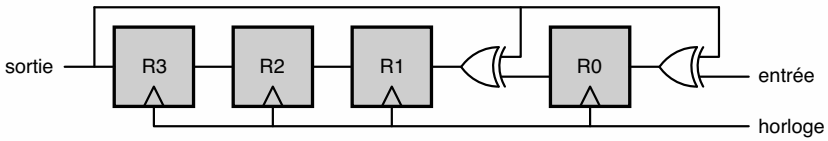
Codes polynômiaux détecteurs d'erreurs

- correspondance entre rang des bits et degré des monômes
  - par exemple, le mot **10011** code le polynôme $x^4 + x + 1$
- arithmétique polynomiale (soustraction modulo 2 et division euclidienne)

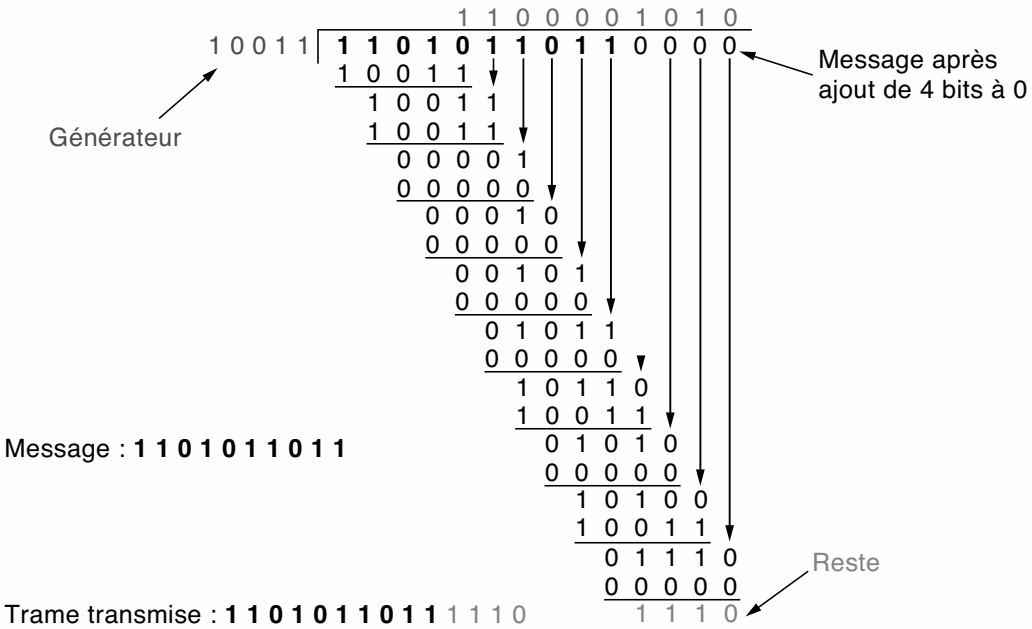
Utilisation d'un polynôme générateur $G(x)$

- $G(x)$ de degré r et message $M(x)$
- ajout de r bits à **0** après le bit de poids faible de $M(x)$
- division de $x^r M(x)$ par $G(x)$: reste $R(x)$
- envoi de $T(x) = x^r M(x) - R(x)$
- $T(x)$ est divisible par $G(x)$ (à vérifier par le récepteur !)

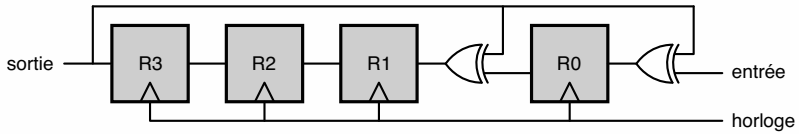
Circuit associé au polynôme $x^4 + x + 1$



Calcul à la main du reste dans la division par $x^4 + x + 1$



Trace du calcul par le circuit du reste dans la division par $x^4 + x + 1$



	0	0	0	0	1101101011**0000**
0	0	0	0	1	110110101**10000**
00	0	0	1	1	11010101**10000**
000	0	1	1	0	1101011**10000**
0000	1	1	0	1	110101**10000**
00001	1	0	0	0	11010**10000**
000011	0	0	1	1	1101**10000**
0000110	0	1	1	1	110**10000**
00001100	1	1	1	0	11**10000**
000011001	1	1	1	0	1**10000**
0000110011	1	1	1	0	**10000**
00001100111	1	1	1	**1**	**0000**
000011001111	1	1	**0**	**1**	**000**
0000110011111	1	**0**	**0**	**1**	**00**
00001100111111	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**