

IMPORTANT. Durée 3 heures. Il sera tenu compte de la clarté et de la qualité de votre copie. Aucun document autorisé.

A/ Cours : tri-fusion.

A1- On suppose disposer de deux tableaux d'entiers tab1 et tab2. De plus, on suppose que tab1 et tab2

sont triés dans un ordre croissant. Ecrire une fonction `fusion(tab1, debut1, fin1, tab2, debut2, fin2)`, qui renvoie un tableau trié de la fusion des contenus des deux tableaux tab1 et tab2 (respectivement de debut1 à fin1 et de debut2 à fin2) passés en paramètre. L'exemple ci-dessous schématise une telle fonction :

tab1 =

1	2	5	5	14
---	---	---	---	----

`fusion(tab1, 1, 3, tab2, 2, 5)=`

1	2	3	5	9	11	23
---	---	---	---	---	----	----

tab2 =

2	3	9	11	23	34	49
---	---	---	----	----	----	----

A2- Expliquer comment utiliser alors la fonction `fusion` pour trier un tableau quelconque. Donner les codes Java correspondant à vos explications.

A3- Donner la complexité d'un tel tri.

B/ Arbres binaires. On considère des arbres binaires (classe `Arbre`) définis à l'aide des classes suivantes :

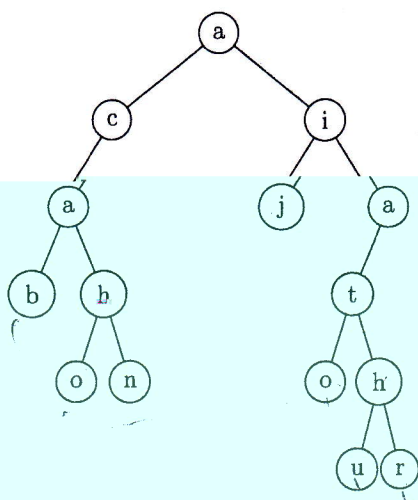


FIGURE 1 - arbre 1

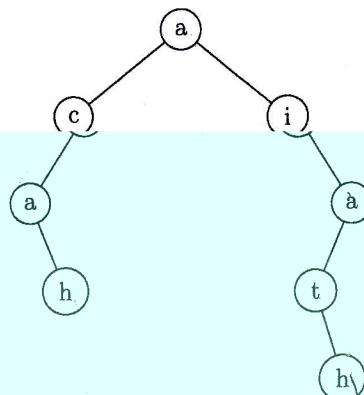


FIGURE 2 - arbre 2

C/ Arbres binaires récursion et complexité.

- C1- Dessiner les neuf arbres binaires avec 0, 1, 2, et 3 nœuds.
- C2- Expliquer comment obtenir tous les arbres binaires avec n ($n \geq 1$) nœuds à partir des arbres binaires avec k nœuds et $n - 1 - k$ nœuds. En particulier, donner toutes les valeurs possibles de k .
- C3- En déduire un algorithme (en français) récursif touslesArbres construisant tous les arbres binaires avec n nœuds. Expliciter clairement les conditions d'arrêt et le corps de la récursion dans votre algorithme.
- C4- Soit T_n la complexité de la fonction touslesArbres de la question précédente. On suppose que $T_0 = 0$ et $T_1 = 1$ (i.e., la complexité de la construction d'un arbre vide est 0 et celle d'un arbre avec un nœud est 1). Montrer que

$$T_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} (T_k + T_{n-1-k}) .$$

(Suggestion : on pourra s'appuyer sur des schémas commentés.)

D/ Listes et matrices creuses. Dans cet exercice, on considère des matrices d'entiers. Une matrice creuse est une matrice essentiellement composée de 0. Seules quelques valeurs sont donc non nulles. A titre d'exemple, voici une matrice creuse

0	2	0	0	0
1	0	-3	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	6	0

Notons que l'élément situé ligne 4, colonne 4 vaut 6. On souhaite représenter une matrice creuse avec une liste chaînée constituée des éléments non-nuls avec leurs indices, donc la matrice ci-dessus pourrait être représentée par :

$[(2, (1, 2)), (1, (2, 1)), (-3, (2, 2)), (6, (4, 4)), (0, (4, 5))]$