Université Paris Diderot
Département Sciences Exactes

Langage Mathématique (LM1)
2009-2010

Corrigé de l'examen du 12 janvier 2010

Exercice 1

Démontrer que les propositions

$$(p \text{ ou } q) \Longrightarrow r$$

et

$$(p \Longrightarrow r) \text{ et } (q \Longrightarrow r)$$

sont logiquement équivalentes.

La proposition $(p \text{ ou } q) \Longrightarrow r$ est fausse si et seulement si r est fausse et $(p \text{ ou } q)$ est vraie. Autrement dit, elle est fausse si et seulement si r est fausse et l'une au moins des propositions p, q est vraie.
La proposition $(p \Longrightarrow r)$ et $(q \Longrightarrow r)$ est fausse si et seulement si l'une au moins des propositions $(p \Longrightarrow r)$, $(q \Longrightarrow r)$ est fausse. Or $(p \Longrightarrow r)$ est fausse si et seulement si r est fausse et p est vraie ; et $(q \Longrightarrow r)$ est fausse si et seulement si r est fausse et q est vraie. On voit donc que, pour que $(p \Longrightarrow r)$ et $(q \Longrightarrow r)$ soit fausse, il faut et il suffit que r soit fausse et que l'une au moins des propositions p, q soit vraie.
Les conditions dans lesquelles $(p \text{ ou } q) \Longrightarrow r$ est fausse et celles dans lesquelles $(p \Longrightarrow r)$ et $(q \Longrightarrow r)$ est fausse sont donc identiques : ces deux propositions sont logiquement équivalentes.

Exercice 2

Soit A un ensemble non vide. On suppose que la proposition suivante est vraie :

$$\forall X (X \subset A \Longrightarrow (X = A \text{ ou } X = \varnothing))$$

Démontrer que A est un ensemble à un élément.
Par hypothèse, l'ensemble A contient au moins un élément. Soit donc a un élément de A. Posons $X = \{a\}$ et appliquons à X la proposition de l'énoncé. L'hypothèse $X \subset A$ étant vérifiée, on a $X = A$ ou $X = \varnothing$. Mais X n'est pas vide, donc $X = A$. On a ainsi montré que $A = \{a\}$.

Exercice 3

Soit E un ensemble. Pour toute partie X de E, on note X^c le complémentaire de X dans E, c'est-à-dire l'ensemble $\{t \in E \mid t \notin X\}$.

1. Soit X et Y des parties de E telles que $X \cup Y = X \cap Y$. Démontrer que $X = Y$.

   Quelles que soient les parties X et Y de E, on a $X \cap Y \subset X \subset X \cup Y$ et $X \cap Y \subset Y \subset X \cup Y$. Par conséquent, si on suppose que $X \cup Y = X \cap Y$, on en déduit les égalités $X \cap Y = X = X \cup Y$ et $X \cap Y = Y = X \cup Y$, ce qui exige évidemment $X = Y$.

2. Démontrer que, quelles que soient les parties A et B de E, on a
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$
   On a les égalités successives : $(A \cap B)^c = \{t \in E \mid t \notin A \cap B\} = \{t \in E \mid \text{non}(t \in A \cap B)\} = \{t \in E \mid \text{non}(t \in A \text{ et } t \in B)\} = \{t \in E \mid \text{non}(t \in A) \text{ ou non}(t \in B)\} = \{t \in E \mid (t \in A^c) \text{ ou } (t \in B^c)\} = A^c \cup B^c$.

3. Est-il possible que des parties A et B de E soient telles que $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$?

   Oui, c'est possible : il suffit de choisir $A = B$. En effet on a alors $A \cap B = A$, donc $(A \cap B)^c = A^c$, $A^c = B^c$, donc $A^c \cap B^c = A^c$, et on en déduit bien $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$.

4. On suppose dans cette question que l'ensemble E est tel que, quelles que soient les parties A et B de E,
$$(A \cap B)^c = A^c \cap B^c.$$
   Démontrer que E est alors l'ensemble vide.

   Appliquons l'hypothèse en choisissant $A = E$ et $B = \emptyset$. On obtient ainsi
$$(E \cap \emptyset)^c = E^c \cap \emptyset^c. \qquad (*)$$
   Or on a $E^c = \emptyset$, $\emptyset^c = E$ et $E \cap \emptyset = \emptyset \cap E = \emptyset$. On en déduit que $(E \cap \emptyset)^c = \emptyset^c = E$ et que $E^c \cap \emptyset^c = \emptyset \cap E = \emptyset$. La relation $(*)$ montre donc que $E = \emptyset$.

   On peut donner une autre démonstration du même résultat en utilisant les questions 1 et 2. D'après la question 2, l'hypothèse faite ici équivaut à : quelles que soient les parties A et B de E,
$$A^c \cup B^c = A^c \cap B^c.$$
   Mais d'après la question 1, cette dernière égalité n'est possible que si $A^c = B^c$, c'est-à-dire $A = B$ (deux sous-ensembles qui ont des complémentaires égaux sont égaux !). Ainsi E vérifie la propriété suivante : quelles que soient les parties A et B de E, $A = B$. Autrement dit, E a au plus un sous-ensemble, ce qui signifie exactement que E est vide : l'ensemble vide a un seul sous ensemble (lui-même !), et un ensemble E qui n'est pas vide a au moins deux sous-ensembles distincts, $\emptyset$ et E.

Exercice 4

On désigne par E l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.
Étant donné une partie A de $\mathbb{R}$, on note $E(A)$ son image directe par E et $E^{-1}(A)$ son image réciproque par E. Autrement dit, on a

$$E(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid (\exists x \in A)\,(y = E(x))\}$$
$$E^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid E(x) \in A\}$$

1. L'application E est-elle surjective ?

   NON : il n'existe aucun réel x tel que $E(x) = \dfrac{1}{2}$ (seuls les entiers sont dans l'image de l'application E).

2. L'application E est-elle injective ?

   NON : il n'est pas difficile de trouver deux réels distincts ayant même partie entière (par exemple $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{2}$).

3. Déterminer les parties suivantes de $\mathbb{R}$:

   (a) $E(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$

   (b) $E\left(\left\{\sqrt{2}\right\}\right) = \left\{1\right\}$

   (c) $E\left(\left[0,1\right[\right) = \left\{0\right\}$

   (d) $E\left(\left]0,\dfrac{1}{\pi}\right[\right) = \left\{0\right\}$

   (e) $E\left(\left]\dfrac{1}{2},2\right]\right) = \left\{0,1,2\right\}$

   (f) $E(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ [L'inclusion de gauche à droite résulte de (a). L'inclusion inverse est due au fait que, pour tout entier relatif n, on a $n = E\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$.]

   (g) $E^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ [Cela est vrai pour n'importe quelle application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.]

   (h) $E^{-1}\left(\left\{\sqrt{2}\right\}\right) = \emptyset$ [Aucun réel n'a pour partie entière $\sqrt{2}$.]

   (i) $E^{-1}(\left[0,1\right[) = \left[0,1\right[$ [Soit x un réel tel que $E(x) \in \left[0,1\right[$. Alors $E(x) = 0$, car 0 est l'unique entier dans l'ensemble $\left[0,1\right[$. Or les réels qui ont pour partie entière 0 sont ceux de l'ensemble $\left[0,1\right[$.]

   (j) $E^{-1}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ [Tout réel a sa partie entière dans $\mathbb{Z}$, donc dans $\mathbb{Q}$.]

4. Est-il vrai que, quelles que soient les parties A et B de $\mathbb{R}$, on a

$$E(A \cap B) = E(A) \cap E(B)\,?$$

   Si oui, donner une démonstration. Si non, donner un contre-exemple.

La réponse est NON : le contre-exemple est fourni par les questions 3 (d) et 3 (e). Posons en effet $A = \left]0, \frac{1}{\pi}\right[$ et $B = \left]\frac{1}{2}, 2\right]$. On a $A \cap B = \varnothing$ (car $\frac{1}{\pi} < \frac{1}{2}$), donc $E(A \cap B) = \varnothing$, tandis que $E(A) \cap E(B) = \{0\} \cap \{0, 1, 2\} = \{0\} \neq \varnothing$.

Exercice 5

On rappelle que, pour tout réel $x > 0$, il existe un entier n tel que $\frac{1}{n} < x$.
Dans ce qui suit, la variable a est astreinte à l'ensemble des nombres réels et la variable n est astreinte à l'ensemble des entiers naturels.

1. Indiquer les variables libres (parlantes) et les variables liées (muettes) dans l'expression

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[a, a + \frac{1}{n}\right].$$

Les deux occurrences de n sont muettes (le mutificateur est le symbole de réunion indexée). Les deux occurrences de a sont parlantes (libres).

2. Pour chacune des quatre expressions suivantes, donner une expression synonyme ne comportant aucune variable muette :

A. $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[a, a + \frac{1}{n}\right]$; B. $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left]a, a + \frac{1}{n}\right[$

C. $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[a, a + \frac{1}{n}\right]$; D. $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]a, a + \frac{1}{n}\right[$

A. $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[a, a + \frac{1}{n}\right] = \left[a, a+1\right]$.

En effet, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $a + \frac{1}{n} \leqslant a + 1$, donc $\left[a, a + \frac{1}{n}\right] \subset \left[a, a+1\right]$, d'où l'on déduit l'inclusion $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[a, a + \frac{1}{n}\right] \subset \left[a, a+1\right]$.

L'inclusion inverse $\left[a, a+1\right] \subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[a, a + \frac{1}{n}\right]$ résulte du fait que $\left[a, a+1\right]$ est l'un des intervalles qui figurent dans la réunion, plus précisément le premier, celui qui correspond à l'indice $n = 1$.

B. $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left]a, a + \frac{1}{n}\right[= \left]a, a+1\right[$

L'inégalité $a+\dfrac{1}{n} \leqslant a+1$ montre que l'on a, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\left]a, a+\dfrac{1}{n}\right[\subset \left]a, a+1\right[$, d'où l'inclusion $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left]a, a+\frac{1}{n}\right[\subset \left]a, a+1\right[$.

Exactement comme en A, l'inclusion inverse, $\displaystyle\left]a, a+1\right[\subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left]a, a+\frac{1}{n}\right[$, résulte du fait que l'intervalle correspondant, dans le second membre, à l'indice $n=1$, est précisément $\left]a, a+1\right[$.

C. $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[a, a+\frac{1}{n}\right] = \{a\}$.

D'une part, on a, pour tout entier $n \geqslant 1$, $a \in \left[a, a+\dfrac{1}{n}\right]$, et donc $\displaystyle\{a\} \subset \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[a, a+\frac{1}{n}\right]$.

D'autre part, soit x un élément de l'ensemble $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[a, a+\frac{1}{n}\right]$. Alors on a, pour tout entier $n \geqslant 1$, $a \leqslant x \leqslant a+\dfrac{1}{n}$. Cela montre en particulier que x est supérieur ou égal à a. Raisonnant par l'absurde, supposons que l'inégalité soit stricte ($x > a$). Alors on aurait $x-a > 0$ et, d'après la propriété rappelée au début de l'exercice, il existe un entier n (évidemment supérieur ou égal à 1) tel que $\dfrac{1}{n} < x-a$, c'est-à-dire $a+\dfrac{1}{n} < x$. Cela contredit l'inégalité $x \leqslant a+\dfrac{1}{n}$ qui était valable pour tout entier $n \geqslant 1$. L'inégalité $x \geqslant a$ ne peut donc pas être stricte. On en déduit que $x = a$. On a ainsi prouvé l'inclusion $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[a, a+\frac{1}{n}\right] \subset \{a\}$.

Finalement on a bien établi l'égalité annoncée.

D. $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]a, a+\frac{1}{n}\right[= \square$.

On remarque que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intervalle ouvert $\left]a, a+\dfrac{1}{n}\right[$ est inclus dans l'intervalle fermé correspondant $\left[a, a+\dfrac{1}{n}\right]$. On en déduit l'inclusion

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]a, a+\frac{1}{n}\right[\subset \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[a, a+\frac{1}{n}\right],$$

c'est-à-dire, vu ce qui a été démontré en C,

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]a, a+\frac{1}{n}\right[\subset \{a\}.$$

Or a n'appartient à aucun des intervalles ouverts $\left]a, a+\frac{1}{n}\right[$, donc n'appartient pas à leur intersection. Il en résulte que $\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left]a, a+\frac{1}{n}\right[$ est un sous-ensemble de $\{a\}$ qui ne contient pas l'élément a : ce ne peut donc être que l'ensemble vide.

Exercice 6

La variable A est astreinte à l'ensemble des parties de R, les variables x et y sont astreintes à R. On considère les deux énoncés $\mathscr{F}(A)$ et $\mathscr{G}(A)$ suivants :

$$\mathscr{F}(A) \qquad (\forall x \in A)(\forall y)(y < x \Rightarrow y \in A).$$
$$\mathscr{G}(A) \qquad (\forall x \in A)(\exists y \in A)(y < x).$$

1. Indiquer les variables libres (parlantes) et les variables liées (muettes) de $\mathscr{F}(A)$.

   La variable A est parlante. Les variables x et y sont muettes (les mutificateurs étant les quantificateurs) .

2. Dans chacun des exemples suivants, indiquer si l'énoncé $\mathscr{F}(A)$ est vrai ou faux. Dans le cas où il est faux (et seulement dans ce cas), donner une brève justification.

   (a) $A = \mathsf{Z}$.
   $\mathscr{F}(A)$ est FAUX : on a par exemple $2 \in A$, $\sqrt{2} < 2$ et pourtant $\sqrt{2} \notin A$.

   (b) $A = \mathsf{R}$.
   $\mathscr{F}(A)$ est VRAI : la partie droite de l'implication ($y \in A$) est vraie quel que soit le réel y.

   (c) $A = \mathsf{Q}$.
   $\mathscr{F}(A)$ est FAUX : le même exemple qu'en 1 le prouve.

   (d) $A =]-\infty, 0]$.
   $\mathscr{F}(A)$ est VRAI : pour tout réel x négatif ou nul, et pour tout réel y, si y est inférieur à x, alors y est négatif ou nul.

   (e) $A = [0, +\infty[$.
   $\mathscr{F}(A)$ est FAUX : on a par exemple $0 \in A$, $-1 < 0$ et pourtant $-1 \notin A$.

3. Démontrer que la proposition suivante est vraie :
   $\forall A(\mathscr{F}(A) \Rightarrow \mathscr{G}(A))$.

   Soit A une partie de R telle que l'énoncé $\mathscr{G}(A)$ soit faux. Alors la négation de $\mathscr{G}(A)$, c'est-à-dire l'énoncé

   $$(\exists x \in A)(\forall y \in A)(x \leqslant y),$$

   est vraie, ce qui signifie que A a un plus petit élément. Appelons-le a. On a alors $a - 1 < a$ et $a - 1 \notin A$ (puisque a est le plus petit élément de A). Cela prouve que l'énoncé $\mathscr{F}(A)$ est également faux. On a ainsi montré que chaque fois que $\mathscr{G}(A)$ est faux, $\mathscr{F}(A)$ est également faux, ce qui revient à dire que la proposition $\forall A(\mathscr{F}(A) \Rightarrow \mathscr{G}(A))$ est vraie.

4. Démontrer, à l'aide d'un contre-exemple, que la proposition réciproque de celle de la question 3, c'est-à-dire la proposition $\forall A(\mathscr{G}(A) \Rightarrow \mathscr{F}(A))$, est fausse.

   En choisissant $A = \mathsf{Z}$, on voit que $\mathscr{G}(A)$ est vrai (Z n'a pas de plus petit élément), alors que $\mathscr{F}(A)$ est faux (voir 2 (a)). Donc la proposition $\forall A(\mathscr{G}(A) \Rightarrow \mathscr{F}(A))$ est fausse.

5. Pour chacun des énoncés suivants, indiquer, sans justification, s'il est synonyme de $\mathscr{F}(A)$, s'il est synonyme de $\mathscr{G}(A)$ ou s'il n'est synonyme d'aucun de ces deux énoncés :

   (a) A n'a pas de plus petit élément.

   Cet énoncé est synonyme de $\mathscr{G}(A)$ (voir 3).

   (b) A est infini.

   Cet énoncé n'est synonyme ni de $\mathscr{F}(A)$ ni de $\mathscr{G}(A)$: en effet l'ensemble $A = [0, +\infty[$ est infini, ne satisfait pas l'énoncé $\mathscr{F}(A)$ (voir 2 (e)) et ne satisfait pas non plus l'énoncé $\mathscr{G}(A)$, puisqu'il a un plus petit élément (0).

   (c) A n'est pas minoré.

   Cet énoncé n'est synonyme ni de $\mathscr{F}(A)$ ni de $\mathscr{G}(A)$: en effet l'ensemble $A = \mathsf{Z}$ n'est pas minoré mais ne satisfait pas l'énoncé $\mathscr{F}(A)$ (voir 2 (e)), et l'ensemble $]0,1[$ est minoré (par exemple par 0) mais il satisfait l'énoncé $\mathscr{G}(A)$, puisqu'il n'a pas de plus petit élément.

   (d) A n'a pas de borne inférieure.

   Cet énoncé n'est synonyme ni de $\mathscr{F}(A)$ ni de $\mathscr{G}(A)$: en effet l'ensemble $A = \mathsf{Z}$ n'a pas de borne inférieure mais ne satisfait pas l'énoncé $\mathscr{F}(A)$ (voir 2 (e)), et l'ensemble $]0,1[$ a une borne inférieure (c'est 0) mais il satisfait l'énoncé $\mathscr{G}(A)$, puisqu'il n'a pas de plus petit élément.

   (e) A est soit vide soit un intervalle de R dont l'extrémité gauche est $-\infty$.

   Cet énoncé est synonyme de $\mathscr{F}(A)$.

   Rappelons d'abord qu'un sous-ensemble X de R est un intervalle si et seulement si, quels que soient les éléments x et y de X tels que $x < y$, tout réel z tel que $x < z < y$ est aussi un élément de X.

   Soit A un ensemble tel que $\mathscr{F}(A)$ soit vrai, soit x et y des éléments de A tels que $x < y$, et soit z un réel tel que $x < z < y$. Puisque $\mathscr{F}(A)$ est vrai et que $y \in A$, tout réel strictement inférieur à y est dans A, donc $z \in A$. Ainsi A est un intervalle. Si cet intervalle n'était pas vide et si son extrémité gauche n'était pas $-\infty$, cette extrémité serait par exemple un réel a. Mais on aurait alors $a-1 < a$ et $a-1 \notin A$, ce qui contredirait l'énoncé $\mathscr{F}(A)$. Donc A ne peut être que l'ensemble vide ou un intervalle de R dont l'extrémité gauche est $-\infty$.

   Maintenant, soit A un ensemble tel que $\mathscr{F}(A)$ soit faux. Dans ce cas c'est sa négation, c'est-à-dire l'énoncé $(\exists x \in A)(\exists y)(y < x$ et $y \notin A)$, qui est vraie. Il y a donc un réel x_0 appartenant à A et un réel y_0 n'appartenant pas à A qui vérifient l'inégalité $y_0 < x_0$. Cela montre d'abord que A n'est pas vide (il contient l'élément x_0). Par ailleurs A ne peut pas être un intervalle dont l'extrémité gauche serait $-\infty$, car celui-ci devrait alors contenir l'intervalle $]-\infty, x_0]$, mais c'est impossible puisque $y_0 < x_0$ et $y_0 \notin A$.

Exercice 7

On considère les deux énoncés suivants, dans lesquels les variables sont astreintes à l'ensemble des entiers naturels :

$$P[n] \quad : \quad 4^n - 1 \text{ est divisible par } 3$$
$$Q[n] \quad : \quad 4^n + 1 \text{ est divisible par } 3$$

1. Démontrer que les deux énoncés suivants sont vrais :

$$\forall k(P[k] \Rightarrow P[k+1]).$$
$$\forall k(Q[k] \Rightarrow Q[k+1]).$$

Soit k un entier naturel tel que $P[k]$ soit vrai, c'est-à-dire tel que $4^k - 1$ soit divisible par 3. On a l'égalité $4^{k+1} - 1 = 4(4^k - 1) + 3$. L'entier $4^{k+1} - 1$ est donc la somme de deux multiples de 3. Il est donc lui-même divisible par 3. L'énoncé $P[k+1]$ est donc vrai. Nous avons prouvé que l'énoncé $\forall k(P[k] \Rightarrow P[k+1])$ est vrai.

De manière analogue, considérons un entier k tel que $Q[k]$ soit vrai, c'est-à-dire tel que $4^k + 1$ soit divisible par 3. On a l'égalité $4^{k+1} + 1 = 4(4^k + 1) - 3$. L'entier $4^{k+1} + 1$ est donc la différence de deux multiples de 3. Il est donc lui-même divisible par 3. L'énoncé $Q[k+1]$ est donc vrai. Nous avons prouvé que l'énoncé $\forall k(Q[k] \Rightarrow Q[k+1])$ est vrai.

2. L'énoncé $\forall n P[n]$ est-il vrai ?

OUI : en effet, l'énoncé $P[0]$ est vrai ($4^0 - 1 = 0$, donc est divisible par 3). On a prouvé d'une part que $P[0]$ est vrai et d'autre part que $\forall k(P[k] \Rightarrow P[k+1])$ est vrai. Le principe de récurrence nous permet d'en conclure que l'énoncé $P[n]$ est vrai pour tout entier naturel n.

3. L'énoncé $\forall n Q[n]$ est-il vrai ?

NON : par exemple $Q[0]$ est faux puisque $4^0 + 1 = 2$, qui n'est pas divisible par 3.

En fait l'énoncé $Q[n]$ n'est vrai pour AUCUN entier naturel n. Il suffit pour s'en convaincre de remarquer que, pour tout $n \in \mathsf{N}$, $(4^n + 1) - (4^n - 1) = 2$. Comme $4^n - 1$ est toujours divisible par 3 (question 2), s'il y avait une valeur de n pour laquelle $4^n + 1$ était divisible par 3, la différence $(4^n + 1) - (4^n - 1)$ serait aussi divisible par 3, ce qui est faux puisqu'elle est égale à 2.

Évidemment, le raisonnement par récurrence n'est pas applicable pour cette question 3, bien que l'énoncé $\forall k(Q[k] \Rightarrow Q[k+1])$ soit vrai. C'est l'étape initiale d'un tel raisonnement qui est en défaut.