Université Paris Diderot
Département Sciences Exactes

Langage Mathématique (LM1)
2010-2011

Examen partiel du 6 novembre 2010

Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé. Toutes les réponses doivent être justifiées. On peut obtenir une excellente note sans avoir répondu à toutes les questions. La plus grande importance sera accordée à la qualité de la présentation et de la rédaction de la copie. Les cinq exercices sont indépendants.

Exercice 1

Déterminer dans chacune des expressions suivantes les variables libres (parlantes) et les variables muettes (liées). (Le domaine auquel les variables sont astreintes est indiqué entre crochets dans chaque cas.)

(1) $ax^2+bx+c=0$.
[$\mathbb{R}$]

(2) L'ensemble des points M du plan tels que $OM=1$ est un cercle.
[L'ensemble des points du plan euclidien usuel]

(3) $\forall x\,\big(x>0 \Longrightarrow x=y^2\big)$.
[$\mathbb{R}$]

(4) La suite de terme général 2^{-n} est convergente.
[$\mathbb{N}$]

(5) $e^{\lambda x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
[$\mathbb{R}$]

Exercice 2

1. On considère l'énoncé $\mathscr{E}$ suivant, dans lequel les variables a, x et y sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels :

$$\mathscr{E}: \quad \forall x \forall y (ax=ay)$$

1.a. Indiquer les variables libres et les variables muettes de l'énoncé $\mathscr{E}$.

1.b. Donner une valeur de a pour laquelle l'énoncé $\mathscr{E}$ est vrai, puis une valeur de a pour laquelle l'énoncé $\mathscr{E}$ est faux.

1.c. Donner un énoncé synonyme de $\mathscr{E}$ ne comportant aucune variable muette.

2. On considère les énoncés $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ suivants, dans lesquels les variables sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels :

$\mathscr{F}$: Le système d'équations d'inconnues x et y suivant
$$\begin{cases} x+y=a \\ x+my=b \end{cases}$$
a au moins une solution.

$\mathscr{G}$: Le système d'équations d'inconnues x et y suivant
$$\begin{cases} x+y=a \\ x+my=b \end{cases}$$
a au moins une solution quels que soient les seconds membres.

2.a. Indiquer les variables libres et les variables muettes de chacun des énoncés $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$.

2.b. Donner des valeurs des variables libres de $\mathscr{F}$ pour lesquelles l'énoncé $\mathscr{F}$ est vrai, puis des valeurs des variables libres de $\mathscr{F}$ pour lesquelles l'énoncé $\mathscr{F}$ est faux.

2.c. Donner un énoncé synonyme de $\mathscr{G}$ ne comportant aucune variable muette.

3. On considère l'énoncé $\mathscr{H}$ suivant, dans lequel la variable f est astreinte à l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$\mathscr{H}$: L'application f est strictement croissante.

3.a. Donner un énoncé synonyme de l'énoncé (non $\mathscr{H}$) écrit en utilisant exclusivement les symboles suivants :
la variable f, des variables astreintes à $\mathbb{R}$, les parenthèses, les connecteurs, les quantificateurs et les symboles $\leqslant$, $<$, $\geqslant$ et $>$.

3.b. Montrer que, dans la question 3.a, on peut se passer des symboles $\leqslant$, $<$ et $>$.

Exercice 3

Les variables sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. En utilisant la contraposée, donner un énoncé synonyme de
$$(a \neq -1 \text{ et } b \neq -1) \Longrightarrow (a+b+ab \neq -1)$$
qui n'utilise pas le symbole $\neq$.

2. Démontrer que l'énoncé suivant est vrai :
$$\forall a \forall b((a \neq -1 \text{ et } b \neq -1) \Longrightarrow (a+b+ab \neq -1)).$$

Exercice 4

On considère les propositions suivantes :

$\mathscr{P}$: $((A \text{ ou } B) \Longrightarrow C) \Longrightarrow ((A \Longrightarrow C) \text{ ou } (B \Longrightarrow C))$

$\mathscr{Q}$: $((A \Longrightarrow C) \text{ ou } (B \Longrightarrow C)) \Longrightarrow ((A \text{ ou } B) \Longrightarrow C)$

$\mathscr{R}$: $(A \Longrightarrow B) \text{ et } (B \Longrightarrow C)$

$\mathscr{S}$: $A \Longrightarrow C$

1. Est-ce que $\mathscr{P}$ est une tautologie ?
2. Est-ce que $\mathscr{Q}$ est une tautologie ?
3. Les propositions $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ sont-elles logiquement équivalentes ?

Exercice 5

On considère un ensemble E de nombres entiers naturels (donc un sous-ensemble de $\mathbb{N}$). Dans chacun des quatre cas suivants, indiquer (en justifiant) si on peut ou non répondre avec certitude à la question
« *Est-il vrai que tous les nombres impairs qui appartiennent à l'ensemble E sont des nombres premiers ?* ».
Lorsque c'est possible, donner la réponse à la question, en justifiant.

(1) L'ensemble des éléments de E qui sont des nombres premiers est : $\{5, 11, 17\}$.

(2) L'ensemble des éléments de E qui sont des nombres impairs est : $\{5, 11, 25\}$.

(3) L'ensemble des éléments de E qui sont des nombres non premiers est : $\{6, 16, 28\}$.

(4) L'ensemble des éléments de E qui sont des nombres pairs est : $\{6, 16, 28\}$.
