Université Paris Diderot
Département de Sciences Exactes

Langage Mathématique (LM1)
2012-2013

Examen du 21 juin 2013

(session de rattrapage)
Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé.
Sauf indication contraire, toute réponse doit être justifiée.
La plus grande importance sera accordée à la qualité de la présentation et de la rédaction.
Les sept exercices sont indépendants. Le sujet comporte quatre pages.
On utilisera les quatre feuilles annexes jointes pour rédiger les solutions des exercices 1, 3, 6 et 7. Les exercices 2, 4 et 5 seront traités sur la copie. Se conformer soigneusement aux indications données.

Exercice 1

(*à rédiger sur la feuille annexe I*)

Pour chacune des expressions (a) à (e) ci-dessous,

1. dire s'il s'agit d'un nom ou d'une proposition [*on ne demande pas de justification*] ;
2. indiquer les variables libres (parlantes) et les variables liées (muettes)
[*une justification est demandée uniquement pour les variables muettes*] ;
3. donner une expression synonyme ne comportant aucune variable muette
[*on ne demande pas de justification*].

L'ensemble indiqué entre crochets à droite en regard de chaque expression est celui auquel sont astreintes toutes les variables qui apparaissent dans l'expression.

(a) La dérivée au point a de l'application $x \longmapsto \int_1^x \frac{y}{t}\, dt$ $[\mathbb{R}_+^*]$

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+a^2}{x^3+b^2x+1} = z$ $[\mathbb{R}]$

(c) Le point de coordonnées (u,v) appartient à la courbe d'équation $x^2+y^2=1$ $[\mathbb{R}]$

(d) $N = \sum\limits_{k=1}^{n} k$ $[\mathbb{N}]$

(e) $\sum\limits_{k=1}^{n} 2^p$ $[\mathbb{N}]$

Exercice 2

(*à rédiger sur la copie*)

Sans utiliser de table de vérité, démontrer que, pour toutes propositions A, B et C, la proposition

$$((A \Longrightarrow B) \text{ ET } ((\text{NON } A) \Longrightarrow C)) \Longrightarrow (B \text{ OU } C)$$

est vraie.

Exercice 3

(*à rédiger sur la feuille annexe II*)

Toutes les réponses doivent être justifiées.
Dans cet exercice, p_1, p_2, p_3 et p_4 sont des variables propositionnelles, pouvant désigner des propositions quelconques.
Une *distribution de valeurs de vérité sur* $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ est un quadruplet $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ d'éléments de l'ensemble $\{0, 1\}$ où chacune des p_i prend le valeur de vérité ε_i (0 étant la valeur FAUX et 1 la valeur VRAI).

1. Combien y a-t-il de distributions de valeurs de vérité sur $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$?
2. Déterminer toutes les distributions de valeurs de vérité sur $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ qui donnent la valeur VRAI à la proposition

$$(p_1 \Longrightarrow p_2) \text{ ET } (p_2 \Longrightarrow p_3) \text{ ET } (p_3 \Longrightarrow p_4).$$

u7Qq1 1 275.641 571.2 7 cm d .3 m 6 .71 l SQBT F4 1 . 1 Tf 255.153 717.14 Td T F5 1 . 1 Tf 3.633 d 75 feuille

les lettres A, B et C, des lettres minuscules pour représenter des variables astreintes à E, le symbole d'appartenance $\in$, les connecteurs NON, ET, OU, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, des parenthèses,

Écrire une proposition P' logiquement équivalente à la proposition P suivante :

Aucun des trois ensembles $A \cap B$, $A \cap C$ et $B \cap C$ n'est vide et l'ensemble $A \cap B \cap C$ est vide.

2. Dans le cas où E est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, donner un exemple de choix des sous-ensembles A, B et C de E pour lequel la proposition P est vraie.
3. On considère la proposition Q suivante, dans laquelle les variables x et y sont astreintes à E :

$$Q : \qquad \forall x \ \big((x \in A \text{ OU } x \in B) \Longrightarrow (x \in A \text{ ET } x \in C)\big)$$

En utilisant exclusivement des symboles choisis parmi les suivants :

les lettres A, B et C, le symbole d'intersection $\cap$, le symbole de réunion $\cup$, le symbole d'inclusion $\subset$, les connecteurs NON, ET, OU, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, des parenthèses,

Écrire une proposition Q' logiquement équivalente à la proposition Q.

Exercice 6

(*à rédiger sur la feuille annexe III*)

Les réponses aux questions 2, 3 et 4 doivent être justifiées.
Dans cet exercice la variable ε est astreinte à $\mathbb{R}$ et la variable n est astreinte à $\mathbb{N}$

On considère quatre suites de nombre réels, $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $d = (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies comme suit :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = (-2)^n$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \dfrac{1}{n+1}$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$

Pour chaque suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels, on considère les quatre propositions suivantes :

$$\begin{array}{ll} P[u] : & \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n \quad |u_n| < \varepsilon \\ Q[u] : & \exists n \ \ \forall \varepsilon > 0 \quad |u_n| < \varepsilon \\ R[u] : & \exists \varepsilon > 0 \ \ \forall n \quad |u_n| < \varepsilon \\ S[u] : & \forall n \ \ \exists \varepsilon > 0 \quad |u_n| < \varepsilon \end{array}$$

1. On demande de compléter le tableau ci-après, reproduit sur la feuille annexe III, en indiquant dans chaque case si la proposition figurant en tête de la ligne est vraie (V) ou fausse (F) lorsque u est la suite figurant en tête de la colonne :

   (*Aucune justification n'est demandée pour cette question.*) :

u	a	b	c	d
$P[u]$				
$Q[u]$				
$R[u]$				
$S[u]$				

2. Est-il possible de trouver une suite u pour laquelle $P[u]$, $Q[u]$ et $R[u]$ sont fausses ?
3. Est-il possible de trouver une suite u pour laquelle $P[u]$ est fausse et $Q[u]$ est vraie ?
4. Pour chaque suite u de réels, on désigne par $T[u]$ la proposition suivante :

   « u converge vers 0 »

   Dire de chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse (justifier la réponse) :

   (a) Pour tout suite u de nombres réels, $P[u] \Longrightarrow T[u]$

   (b) Pour tout suite u de nombres réels, $T[u] \Longrightarrow P[u]$

Exercice 7

(*à rédiger sur la feuille annexe IV*)

Dans cet exercice, on considère des énoncés $A[x,y]$ à deux variables libres x et y qui sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et, pour chacun d'eux, six énoncés clos obtenus en quantifiant ces variables de diverses façons. On demande d'indiquer pour chacun de ces énoncés clos s'il est vrai ou non, **sans donner de justification**.
On remplira pour cela le tableau ci-après, reproduit dans la feuille annexe IV, en inscrivant dans chaque case vide V ou F selon que l'énoncé correspondant est vrai ou faux.

$A[x,y]$:	$(x+y)^2 = x^2+y^2$	$(x+y)^2 = x^2-y^2$	$y = x^2+x+1$	$y = x^3+x+1$	$x^3-y^6 = (x^2+xy^2+y^4)(x-y^2)$
$\forall x\ \forall y\ A[x,y]$					
$\forall x\ \exists y\ A[x,y]$					
$\exists x\ \forall y\ A[x,y]$					
$\exists x\ \exists y\ A[x,y]$					
$\forall y\ \exists x\ A[x,y]$					
$\exists y\ \forall x\ A[x,y]$					