

CONTRÔLE 2

EXERCICE 1. Associativité de l'équivalence.

- (a) Montrer que la proposition $(A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C))$ est logiquement équivalente à $((A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C)$ mais pas à $((A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C))$.

Pour vérifier cela on peut utiliser une table de vérité :

A	B	C	$A \Leftrightarrow B$	$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$	$B \Leftrightarrow C$	$A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$	$(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	F	F	V	V	V	F
F	V	V	F	F	V	F	F
F	V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	F
F	F	F	V	F	V	F	V

- (b) La première constatation aurait pu nous conduire à adopter une écriture simplifiée $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$. Expliquer pourquoi la deuxième nous incite à ne pas le faire.

La première constatation montre que l'équivalence est associative et pourrait nous conduire à écrire $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C$ sans parenthèse. Mais cette écriture serait plutôt interprétée comme $((A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C))$ qui n'est pas équivalente à $(A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C))$ et $((A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C)$, donc il faut éviter cette notation.

EXERCICE 2.

Déterminer l'ensemble E des entiers n compris (au sens large) entre 1 et 20 qui satisfont l'énoncé

$$\ll n \text{ est pair} \Rightarrow n + 1 \text{ est premier} \gg$$

puis l'ensemble F des entiers n compris (au sens large) entre 1 et 20 qui ne satisfont pas l'énoncé précédent.

Dans E il y a les entiers n compris entre 1 et 20 tels que :

n est pair et $n + 1$ est premier

n est impair (antécédent faux donc implication vraie).

Donc $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19\}$.

D'où $F = \{8, 14, 20\}$.

EXERCICE 3.

- (a) Énoncer un théorème (sous forme d'implication) dont la démonstration peut se faire par contraposée.

Énoncer cette contraposée, et rédiger une démonstration.

Deux propositions, à vous de les vérifier : les variables x, y, ε sont astreintes à \mathbb{R} .

$$\forall x (\forall \varepsilon > 0 \quad x \leq \varepsilon) \Rightarrow x \leq 0.$$

$$\forall x \forall y \quad (x \neq y) \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$$

- (b) Énoncer un théorème dont la démonstration peut se faire par l'absurde, et rédiger une démonstration.

Une proposition : Soit f une application d'un ensemble E dans l'ensemble de ses parties, alors f n'est pas surjective.

EXERCICE 4.

On considère une suite de propositions $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$

- (a) Montrer que les propositions $[(\neg A_1) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_2)]$ et $[A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow A_1)]$ sont des tautologies.

La proposition $[(\neg A_1) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_2)]$ est fausse si et seulement si $\neg A_1$ est vraie et $(A_1 \Rightarrow A_2)$ est fausse, ce qui est impossible car alors A_1 est fausse, et donc $(A_1 \Rightarrow A_2)$ est vraie.

$[(\neg A_1) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_2)]$ est donc une tautologie.

La proposition $[A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow A_1)]$ est fausse si et seulement si A_1 est vraie et $(A_2 \Rightarrow A_1)$ est fausse, ce qui est impossible car si A_1 est vraie, $(A_2 \Rightarrow A_1)$ est vraie aussi.

$[A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow A_1)]$ est donc une tautologie.

- (b) Montrer que la proposition $[(\neg A_1) \Rightarrow (\neg A_2 \Leftrightarrow (A_2 \Rightarrow A_1))]$ est une tautologie.

La proposition $[(\neg A_1) \Rightarrow (\neg A_2 \Leftrightarrow (A_2 \Rightarrow A_1))]$ est fausse si et seulement si $\neg A_1$ est vraie et $(\neg A_2 \Leftrightarrow (A_2 \Rightarrow A_1))$ est fausse. Mais alors A_1 est fausse, et donc $(A_2 \Rightarrow A_1)$ est vraie si et seulement si A_2 est fausse, donc $(\neg A_2 \Leftrightarrow (A_2 \Rightarrow A_1))$ est vraie.

La proposition $[(\neg A_1) \Rightarrow (\neg A_2 \Leftrightarrow (A_2 \Rightarrow A_1))]$ est donc une tautologie.

- (c) Montrer que la proposition $[(A_1 \Rightarrow A_2) \Rightarrow ((A_2 \Rightarrow A_3) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_3))]$ est une tautologie.

La proposition $[(A_1 \Rightarrow A_2) \Rightarrow ((A_2 \Rightarrow A_3) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_3))]$ est fausse si et seulement si $(A_1 \Rightarrow A_2)$ est vraie et $((A_2 \Rightarrow A_3) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_3))$ est fausse, c'est-à-dire si et seulement si $(A_1 \Rightarrow A_2)$ est vraie et $(A_2 \Rightarrow A_3)$ est vraie et $(A_1 \Rightarrow A_3)$ est fausse. Mais on a alors A_1 vraie et A_3 fausse donc quelque soit la valeur de vérité de A_2 , l'une des deux implications $(A_1 \Rightarrow A_2)$ ou $(A_2 \Rightarrow A_3)$ est fausse. La proposition $[(A_1 \Rightarrow A_2) \Rightarrow ((A_2 \Rightarrow A_3) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_3))]$ est donc une tautologie.

- (d) (bonus) Montrer qu'on a :

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_i \Rightarrow A_i$ est une tautologie.

On a $(A_i \Rightarrow A_i) \equiv (\neg A_i \vee A_i)$ qui est trivialement une tautologie.

Pour tout $i, j, k \in \mathbb{N}$, si $A_i \Rightarrow A_j$ est une tautologie et si $A_j \Rightarrow A_k$ est une tautologie, alors $A_i \Rightarrow A_k$ est une tautologie.

On a vu dans le TD 2 que $[(A_i \Rightarrow A_j) \wedge (A_j \Rightarrow A_k)] \Rightarrow (A_i \Rightarrow A_k)$ est une tautologie, donc si $A_i \Rightarrow A_j$ et $A_j \Rightarrow A_k$ sont des tautologies, c'est-à-dire toujours vraies, $A_i \Rightarrow A_k$ l'est aussi d'après la tautologie ci-dessus.

Attention, il y avait une erreur dans l'énoncé, voici la rectification :

Pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, si $A_i \Rightarrow A_j$ et $A_j \Rightarrow A_i$ sont des tautologies, alors A_i et A_j sont logiquement équivalents.

On a vu que $(A_i \Leftrightarrow A_j) \equiv [(A_i \Rightarrow A_j) \wedge (A_j \Rightarrow A_i)]$, donc si $A_i \Rightarrow A_j$ et $A_j \Rightarrow A_i$ sont des tautologies, $A_i \Leftrightarrow A_j$ est aussi une tautologie, donc A_i et A_j sont logiquement équivalents.