Université Paris Diderot
Département Sciences Exactes

Langage Mathématique (LM1)
2009-2010

Examen du 12 janvier 2010

Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. Toutes les réponses doivent être justifiées. La plus grande importance sera accordée à la qualité de la présentation et de la rédaction de la copie. Les sept exercices sont indépendants.

Exercice 1

Démontrer que les propositions

$$(p \text{ ou } q) \Longrightarrow r$$

et

$$(p \Longrightarrow r) \text{ et } (q \Longrightarrow r)$$

sont logiquement équivalentes.

Exercice 2

Soit A un ensemble non vide.
On suppose que la proposition suivante est vraie :

$$\forall X (X \subset A \Longrightarrow (X = A \text{ ou } X = \emptyset))$$

Démontrer que A est un ensemble à un élément.

Exercice 3

Soit E un ensemble. Pour toute partie X de E, on note X^c le complémentaire de X dans E, c'est-à-dire l'ensemble $\{t \in E \mid t \notin X\}$.

1. Soit X et Y des parties de E telles que $X \cup Y = X \cap Y$. Démontrer que $X = Y$.
2. Démontrer que, quelles que soient les parties A et B de E, on a
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$
3. Est-il possible que des parties A et B de E soient telles que $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$?
4. On suppose dans cette question que l'ensemble E est tel que, quelles que soient les parties A et B de E,
$$(A \cap B)^c = A^c \cap B^c.$$
Démontrer que E est alors l'ensemble vide.

Exercice 4

On désigne par E l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x associe sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.
Étant donné une partie A de $\mathbb{R}$, on note $E(A)$ son image directe par E et $E^{-1}(A)$ son image réciproque par E. Autrement dit, on a

$$E(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid (\exists x \in A)\,(y = E(x))\}$$
$$E^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid E(x) \in A\}$$

1. L'application E est-elle surjective ?
2. L'application E est-elle injective ?
3. Déterminer les parties suivantes de $\mathbb{R}$:
   (a) $E(\mathbb{R})$
   (b) $E(\left\{\sqrt{2}\right\})$
   (c) $E([0,1[)$
   (d) $E(\left]0,\frac{1}{\pi}\right[)$
   (e) $E(\left]\frac{1}{2},2\right])$
   (f) $E(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z})$ [$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ *est le complémentaire de* $\mathbb{Z}$ *dans* $\mathbb{R}$.]
   (g) $E^{-1}(\mathbb{R})$
   (h) $E^{-1}(\left\{\sqrt{2}\right\})$
   (i) $E^{-1}([0,1[)$
   (j) $E^{-1}(\mathbb{Q})$
4. Est-il vrai que, quelles que soient les parties A et B de $\mathbb{R}$, on a
$$E(A\cap B) = E(A)\cap E(B)\,?$$
   Si oui, donner une démonstration. Si non, donner un contre-exemple.

Exercice 5

On rappelle que, pour tout réel $x > 0$, il existe un entier n tel que $\frac{1}{n} < x$.
Dans ce qui suit, la variable a est astreinte à l'ensemble des nombres réels et la variable n est astreinte à l'ensemble des entiers naturels.

1. Indiquer les variables libres (parlantes) et les variables liées (muettes) dans l'expression
$$\bigcup_{n=1}^{+\infty}\left[a, a+\frac{1}{n}\right].$$

2. Pour chacune des quatre expressions suivantes, donner une expression synonyme ne comportant aucune variable muette :

$$\text{A.} \quad \bigcup_{n=1}^{+\infty}\left[a,a+\frac{1}{n}\right] \quad ; \quad \text{B.} \quad \bigcup_{n=1}^{+\infty}\left]a,a+\frac{1}{n}\right[$$

$$\text{C.} \quad \bigcap_{n=1}^{+\infty}\left[a,a+\frac{1}{n}\right] \quad ; \quad \text{D.} \quad \bigcap_{n=1}^{+\infty}\left]a,a+\frac{1}{n}\right[$$

Exercice 6

La variable A est astreinte à l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$, les variables x et y sont astreintes à $\mathbb{R}$. On considère les deux énoncés $\mathscr{F}(A)$ et $\mathscr{G}(A)$ suivants :

$\mathscr{F}(A)$ $\quad (\forall x \in A)(\forall y)(y < x \Rightarrow y \in A)$.

$\mathscr{G}(A)$ $\quad (\forall x \in A)(\exists y \in A)(y < x)$.

1. Indiquer les variables libres (parlantes) et les variables liées (muettes) de $\mathscr{F}(A)$.
2. Dans chacun des exemples suivants, indiquer si l'énoncé $\mathscr{F}(A)$ est vrai ou faux. Dans le cas où il est faux (et seulement dans ce cas), donner une brève justification.
   (a) $A = \mathbb{Z}$.
   (b) $A = \mathbb{R}$.
   (c) $A = \mathbb{Q}$.
   (d) $A =]-\infty, 0]$.
   (e) $A = [0, +\infty[$.
3. Démontrer que la proposition suivante est vraie :
$$\forall A(\mathscr{F}(A) \Rightarrow \mathscr{G}(A)).$$
4. Démontrer, à l'aide d'un contre-exemple, que la proposition réciproque $(\forall A(\mathscr{G}(A) \Rightarrow \mathscr{F}(A)))$ est fausse.
5. Pour chacun des énoncés suivants, indiquer, sans justification, s'il est synonyme de $\mathscr{F}(A)$, s'il est synonyme de $\mathscr{G}(A)$ ou s'il n'est synonyme d'aucun de ces deux énoncés :
   (a) A n'a pas de plus petit élément.
   (b) A est infini.
   (c) A n'est pas minoré.
   (d) A n'a pas de borne inférieure.
   (e) A n'est pas minoré ou A n'a pas de borne inférieure.
   (f) A est soit vide soit un intervalle de $\mathbb{R}$ dont l'extrémité gauche est $-\infty$.

Exercice 7

On considère les deux énoncés suivants, dans lesquels les variables sont astreintes à l'ensemble des entiers naturels :

$$\begin{array}{rl} P[n] \ : & 4^n - 1 \text{ est divisible par } 3 \\ Q[n] \ : & 4^n + 1 \text{ est divisible par } 3 \end{array}$$

1. Démontrer que les deux énoncés suivants sont vrais :

$$\forall k (P(k) \Rightarrow P(k+1)).$$
$$\forall k (Q(k) \Rightarrow Q(k+1)).$$

2. L'énoncé $\forall n P(n)$ est-il vrai ?
3. L'énoncé $\forall n Q(n)$ est-il vrai ?
