Université Paris Diderot
Département de Sciences Exactes

Langage Mathématique (LM1)
2010-2011

Examen du 11 janvier 2011

Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf pour l'exercice 4.
La plus grande importance sera accordée à la qualité de la présentation et de la rédaction.
Les sept exercices sont indépendants. Le sujet comporte trois pages.

Exercice 1

Déterminer dans chacune des expressions suivantes les variables libres (parlantes) et les variables liées (muettes).

(a) $\int_0^x f(t)\,dt \leqslant 1+\varepsilon$

(b) $\lim_{x\to a} f(x) = k$

(c) L'ensemble des points M tels que $MA = 2MB$

(d) L'image par la fonction f de l'intervalle $[\alpha, +\infty[$.

Exercice 2

Démontrer que, pour n'importe quelles propositions A, B et C, les énoncés

$$(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow C$$

et

$$(B \Longrightarrow C) \text{ et } (A \text{ ou } C)$$

sont logiquement équivalents.

Exercice 3

Dans ce qui suit, les variables x et ε sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{R}$. Soit E et F les énoncés :

$$E : \quad \exists x > 0 \ \ \forall \varepsilon > 0 \quad 0 < x < \varepsilon .$$

$$F : \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x > 0 \quad 0 < x < \varepsilon .$$

1. L'énoncé $E \Longrightarrow F$ est-il vrai ?
2. L'énoncé E est-il vrai ?
3. L'énoncé F est-il vrai ?
4. L'énoncé $F \Longrightarrow E$ est-il vrai ?

Exercice 4

Cet exercice est consacré à des traductions d'énoncés mathématiques, d'une part du langage naturel vers un langage formalisé (question 1), d'autre part d'un langage formalisé vers le langage naturel (question 2). On ne demande pas de justifications.

On désigne par $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dans ce qui suit, les variables f et g sont astreintes à l'ensemble $\mathscr{F}$ et les autres variables à l'ensemble $\mathbb{R}$.

1. Pour chacun des énoncés $(\mathsf{A}_1), \ldots, (\mathsf{A}_8)$ ci-dessous, donner un énoncé synonyme écrit en n'utilisant aucun symbole autre que :

   - des parenthèses,
   - des variables astreintes à $\mathbb{R}$,
   - des variables astreintes à $\mathscr{F}$,
   - les connecteurs non, et, ou, $\Longrightarrow, \Longleftrightarrow$,
   - les quantificateurs $\forall, \exists$,
   - les symboles $=, \neq, <, \leqslant, >, \geqslant$,
   - les signes $-$ (opposé), $+$ (addition), . (multiplication),
   - les constantes $0, 2, \pi$.

   (A$_1$) f est strictement positive.

   (A$_2$) f est paire.

   (A$_3$) f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

   (A$_4$) f est majorée.

   (A$_5$) f n'est pas croissante.

   (A$_6$) f n'est pas injective.

   (A$_7$) f est 2π-périodique.

   (A$_8$) f est linéaire.

2. Pour chacun des énoncés $(\mathsf{B}_1), \ldots, (\mathsf{B}_8)$ ci-dessous, donner un énoncé synonyme ne comportant aucune variable muette :

   (B$_1$) $\forall y \ \exists x \ f(x) = y$

   (B$_2$) $\exists y \ \forall x \ f(x) = y$

   (B$_3$) $\forall x \, \forall y \ \ x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$ ou $\forall x \, \forall y \ \ x < y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)$

   (B$_4$) $\exists T \neq 0 \quad \forall x \quad f(x+T) = f(x)$

   (B$_5$) $\forall x \ \forall x' \ f(x) = f(x')$

   (B$_6$) $\exists l \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \quad |x| \leqslant \delta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$

   (B$_7$) $\exists g \in \mathscr{F} \quad \forall x \quad f(g(x)) = g(f(x)) = x$

   (B$_8$) $\forall x \ \forall x' \ f(x).f(x') > 0$.

Exercice 5

On admet que, pour qu'une partie X de $\mathbb{R}$ soit un intervalle, il faut et il suffit que tout réel compris entre deux éléments de X soit toujours un élément de X, c'est-à-dire que

$$\forall x \in X \quad \forall y \in X \quad \forall v \in \mathbb{R} \qquad x \leqslant v \leqslant y \implies v \in X \ . \tag{$*$}$$

1. Pour chacun des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$, indiquer, en justifiant, s'il s'agit ou non d'un intervalle de $\mathbb{R}$:

$$A = \mathbb{R}_+^*$$
$$B = \mathbb{R}^*$$
$$C = \quad x \in \mathbb{R} \quad x^2 - x - 2 < 0 \text{ et } x^3 \geqslant 1$$
$$D = [0,2] \cap \mathbb{Q}\,.$$

2. Soit I et J des intervalles quelconques de $\mathbb{R}$.
   (a) En utilisant la propriété $(*)$, démontrer que $I \cap J$ est un intervalle.
   (b) On suppose que $I \cap J$ n'est pas vide. Soit x un élément de I, y un élément de J et v un réel tel que $x \leqslant v \leqslant y$. Démontrer que $v \in I \cup J$. [*Indication : choisir un élément $a \in I \cap J$ et utiliser la propriété $(*)$ dans chacun des cas $v \leqslant a$ et $v > a$.*]
3. En déduire, toujours à l'aide de la propriété $(*)$, que l'énoncé suivant est vrai :

   Quels que soient les intervalles I et J de $\mathbb{R}$, si $I \cap J \neq \varnothing$, alors $I \cup J$ est un intervalle.

4. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 6

On considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et des sous-espaces vectoriels F et F' de E.

1. Soit v et v' deux éléments de E tels que $v \in F \setminus F'$ et $v' \in F' \setminus F$. Démontrer que $v + v' \notin F \cup F'$.
2. En déduire que, si $F \cup F' = E$, alors on a $F \subseteq F'$ ou $F' \subseteq F$.
3. Démontrer que, si $F \cup F' = E$, alors $F = E$ ou $F' = E$.

Exercice 7

Soit a et b deux réels tels que $a > 0$ et $a + b \geqslant 0$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(a+b)^n \ \geqslant \ a^n + n\,a^{n-1}b\,.$$
