Licence 1ère année **LM1 - Langage Mathématique**

Correction des exercices 3 et 4 du partiel de novembre 2009

Exercice 3 :

Pour chaque sous-ensemble A de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, on désigne par $\mathcal{Q}(A)$ l'énoncé suivant :

$$(\forall x \in A)\,(\exists y \in A)\,(y < x)$$

dans lequel x et y sont des variables astreintes à $\mathbb{R}$ et $<$ désigne la relation d'ordre stricte usuelle sur $\mathbb{R}$.

Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'énoncé $\mathcal{Q}(A)$ est vrai ou non :

1. $A = \mathbb{N}$.

$\mathcal{Q}(\mathbb{N})$ est faux car on a $\forall y \in \mathbb{N} \quad y \geqslant 0$ donc $\mathbb{N}$ vérifie $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N}) \quad \neg(y < x)$ qui est la négation de $\mathcal{Q}(A)$.

2. $A = \mathbb{Q}$.

$\mathcal{Q}(\mathbb{Q})$ est vrai : soit $q \in \mathbb{Q}$, on a alors $q - 1 \in \mathbb{Q}$ et $q - 1 < q$.

3. $A = [0, 1]$.

De la même manière qu'en 1. on montre que $\mathcal{Q}([0, 1])$ est faux.

4. $A =]0, 1[$.

$\mathcal{Q}(]0, 1[)$ est vrai : soit $x \in]0, 1[$ on a alors $\frac{x}{2} \in]0, 1[$ et $\frac{x}{2} < x$.

5. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists n \in \mathbb{N}) \left(x = \frac{1}{n}\right)\}$.

$\mathcal{Q}(A)$ est vrai : soit $x \in \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists n \in \mathbb{N}) \left(x = \frac{1}{n}\right)\}$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x = \frac{1}{n_0}$ et on a alors $\frac{1}{n_0 + 1} \in \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists n \in \mathbb{N}) \left(x = \frac{1}{n}\right)\}$ et $\frac{1}{n_0 + 1} < x$.

Exercice 4 :

Est-il possible d'attribuer des valeurs de vérité (VRAI ou FAUX) aux propositions A, B et C de telle sorte que l'énoncé suivant soit faux ?

$$(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((C \Longrightarrow A) \Longrightarrow (C \Longrightarrow B))$$

On peut faire une table de vérité pour vérifier que $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((C \Longrightarrow A) \Longrightarrow (C \Longrightarrow B))$ est une tautologie.

On peut aussi raisonner de la manière suivante :

L'énoncé est faux si et seulement si $(A \Longrightarrow B)$ est vrai et $((C \Longrightarrow A) \Longrightarrow (C \Longrightarrow B))$ est faux.

$((C \Longrightarrow A) \Longrightarrow (C \Longrightarrow B))$ est faux si et seulement si $(C \Longrightarrow A)$ est vrai et $(C \Longrightarrow B)$ est faux.

$(C \Longrightarrow B)$ est faux si et seulement si C est vrai et B est faux.

Mais si C est vrai, alors $(C \Longrightarrow A)$ est vrai si et seulement si A est vrai.

Et si A est vrai et B est faux, alors $(A \Longrightarrow B)$ est faux et l'énoncé est vrai.