Université Paris Diderot — **Premier semestre 2010-2011**
Licence 1ère année — **LM1 - Langage Mathématique**

Contrôle 3

Exercice 1.
Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a $2^n \geq n$.

Exercice 2. Soient a, b, c des réels strictement positifs vérifiant :

$$(1) \quad abc > 1 \quad \text{et}$$

$$(2) \quad a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

(a) Donner 5 triplets de réels strictement positifs vérifiant ces inégalités.
(b) A l'aide d'un raisonnement par l'absurde démontrer :
  (1) qu'aucun des réels a, b, c ne peut être égal à 1.
  (2) que l'un au moins des réels a, b, c est strictement supérieur à 1.
  (3) que l'un au moins des réels a, b, c est strictement inférieur à 1.
(c) (BONUS) Le but de cette question est de montrer qu'au plus un des réels a, b, c est strictement inférieur à 1.
  On suppose donc que $a < 1$ et $b > 1$ et on va montrer qu'alors $c > 1$.
  (1) Montrer que dans le cas où $ab < 1$, l'inégalité (1) permet de conclure.
  (2) On va montrer que dans le cas où $ab > 1$, il n'existe pas de c tel que a, b, c vérifient les inégalités (1) et (2) : supposons donc qu'il existe un tel c
    Montrer que l'hypothèse $ab > 1$ entraîne $a + b > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.
    Déduire alors des inégalités (1) et (2) que $\frac{1}{ab} < c < 1$,
    En déduire un encadrement de $\frac{1}{c}$.
    Montrer en utilisant l'inégalité (2) que l'on a alors $a + b + \frac{1}{ab} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + ab$ et que ceci est en contradiction avec les hypothèses faites sur a et b (on pourra utiliser la factorisation $a^2b + ab^2 + 1 - b - a - a^2b^2 = (1 - a)(b - 1)(ab - 1)$ que vous vérifierez).

Exercice 3. Dans cet exercice f est une application d'un ensemble E dans un ensemble F.
(a) Soit $A \subset E$, donner une expression en compréhension de $f(A)$.
(b) Soit $B \subset F$, donner une expression en compréhension de $f^{-1}(B)$.
(c) Montrer qu'on a $\forall A \subset E \quad A \subset f^{-1}(f(A))$.
(d) Montrer que si f est injective on a $\forall A \subset E \quad f^{-1}(f(A)) \subset A$
(e) Montrer qu'on a $\forall B \subset F \quad f(f^{-1}B)) \subset B$
(f) Montrer que si f est surjective on a $\forall B \subset F \quad B \subset f(f^{-1}B))$