

Examen partiel du 21 novembre 2009

Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé. Toutes Les réponses doivent être justifiées. On peut obtenir une excellente note sans avoir répondu à toutes les questions. La plus grande importance sera accordée à la qualité de la présentation et de la rédaction de la copie. Les cinq exercices sont indépendants.

Exercice 1

Déterminer dans chacune des expressions suivantes les variables libres et les variables muettes.

- (1) $x^3 + 4x + c = 0$.
 - (2) L'ensemble des points M du plan tels que $MA = MB$ et $MC \geq MO$.
 - (3) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})[x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)]$.
 - (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}$.
 - (5) L'ensemble des entiers n tels que $n^2 + 3$ est un multiple de p .
-

Exercice 2

1. On considère l'énoncé \mathcal{E} suivant, dans lequel les variables a , b et x sont astreintes à l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels :

$$\mathcal{E} : \exists x(ax + b \neq 0)$$

- 1.a. Indiquer les variables libres et les variables muettes de l'énoncé \mathcal{E} .
- 1.b. Donner une valeur de a et une valeur de b pour lesquelles l'énoncé \mathcal{E} est faux.
- 1.c. Donner un énoncé synonyme de \mathcal{E} ne comportant aucune variable muette.

2. On considère l'énoncé \mathcal{F} suivant, dans lequel les variables p , q et x sont astreintes à l'ensemble \mathbb{Z} des nombres entiers relatifs :

$$\mathcal{F} : \exists x(x \geq p \text{ ou } x \leq q)$$

- 2.a. Indiquer les variables libres et les variables muettes de l'énoncé \mathcal{F} .
- 2.b. Écrire un énoncé équivalent à la négation de \mathcal{F} , sans utiliser le mot « non » ni le symbole \neg .
- 2.c. Donner un énoncé synonyme de \mathcal{F} ne comportant aucune variable muette.

3. On considère l'énoncé \mathcal{G} suivant, dans lequel \mathcal{R} désigne un repère orthonormé fixé du plan euclidien, et où les variables a , b , c , d , x et y sont astreintes à l'ensemble \mathbb{R} des réels :

\mathcal{G} : « Les droites d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = cx + d$ dans le repère \mathcal{R} sont perpendiculaires. »

3.a. Indiquer les variables libres et les variables muettes de l'énoncé \mathcal{G} .

3.b. Donner un énoncé synonyme de \mathcal{G} ne comportant aucune variable muette.

4. En utilisant des variables astreintes à l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, des connecteurs et des quantificateurs, les parenthèses, l'addition, la multiplication, et des exposants entiers, écrire un énoncé synonyme de

« Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées. »

Exercice 3

Pour chaque sous-ensemble A de l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels, on désigne par $\mathcal{Q}(A)$ l'énoncé suivant :

$$(\exists x \in A)(\exists y \in A)(y < x)$$

dans lequel x et y sont des variables astreintes à \mathbb{R} et $<$ désigne la relation d'ordre stricte usuelle sur \mathbb{R} .

Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'énoncé $\mathcal{Q}(A)$ est vrai ou non :

1. $A = \mathbb{N}$.
2. $A = \mathbb{Q}$.
3. $A = [0, 1]$.
4. $A =]0, 1[$.
5. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} \left(x = \frac{1}{n}\right)\}$.

Exercice 4

Est-il possible d'attribuer des valeurs de vérité (VRAI ou FAUX) aux propositions A , B et C de telle sorte que l'énoncé suivant soit faux ?

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C \Rightarrow A) \Rightarrow (C \Rightarrow B))$$

Exercice 5

La suite de Fibonacci est la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_1 = u_2 = 1 \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$$

Démontrer, par récurrence, que,

$$\text{pour tout entier } n \geq 1, u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} + (-1)^n.$$

La clarté et la précision de la rédaction de cette démonstration seront un élément d'appréciation essentiel pour le correcteur.