Université Paris Diderot
Département Sciences Exactes

Langage Mathématique (LM1)
2012-2013

Examen du 7 janvier 2013

Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. La plus grande importance sera accordée à la qualité de la présentation et de la rédaction de la copie. Les six exercices sont indépendants.

On traitera les exercices 1 à 3 directement sur les feuilles annexes I à III en remplissant les cases prévues pour les réponses. L'annexe II comporte deux feuilles. On joindra les quatre feuilles an-

[redacted]

et b et on désigne par X l'ensemble

$$\{a,b,\{b\}\}$$

1. Donner une définition en extension de l'ensemble $\mathscr{P}(X)$ des parties de X.

2. On suppose maintenant que $a=\emptyset$ (l'ensemble vide) et que $b=\mathbb{N}$ (l'ensemble des entiers naturels). On a donc

$$X=\{\emptyset,\mathbb{N},\{\mathbb{N}\}\}$$

Pour chacune des douze propositions suivantes (E_1 à E_{12}), indiquer si elle est vraie ou fausse, en donnant une justification dans le cas où elle est fausse.

[Utiliser le tableau donné dans l'annexe I.]

E_1	$\emptyset\in X$	E_2	$\emptyset\subset X$	E_3	$\mathbb{N}\in X$	E_4	$\mathbb{N}\subset X$
E_5	$\{\emptyset\}\in X$	E_6	$\{\emptyset\}\subset X$	E_7	$\{\mathbb{N}\}\in X$	E_8	$\{\mathbb{N}\}\subset X$
E_9	$\{\emptyset,\mathbb{N}\}\in X$	E_{10}	$\{\emptyset,\mathbb{N}\}\subset X$	E_{11}	$\{\{\mathbb{N}\}\}\in X$	E_{12}	$\{\{\mathbb{N}\}\}\subset X$

On complétera le tableau de l'annexe I et on joindra la feuille de cette annexe à la copie.
Ne pas oublier d'inscrire son numéro d'étudiant.

Exercice 2 [*à rédiger sur les deux feuilles de l'annexe II*]

Dans cet exercice, la variable n est astreinte à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et la variable A est astreinte à l'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$.
On donne ci-dessous six propositions : $P_1[A]$ à $P_6[A]$ (on pourra noter simplement P_i au lieu de $P_i[A]$).

$$\begin{array}{lll}
P_1[A] & : & 0\in A \\
P_2[A] & : & 5\in A \\
P_3[A] & : & \forall n\ \ (n\in A \Longrightarrow n+1\in A) \\
P_4[A] & : & \forall n\ \ (n+1\in A \Longrightarrow n\in A) \\
P_5[A] & : & \forall n\ \ n\in A \\
P_6[A] & : & \forall n\ \ n\notin A
\end{array}$$

1. [*Pour cette question, on ne demande pas de justification.*]
   Pour chacune de ces six propositions, indiquer si elle est vraie ou fausse
   a) lorsque $A = \emptyset$;
   b) lorsque $A = \mathbb{N}$;
   c) lorsque $A = \{0\}$;
   d) lorsque $A = \{5\}$;
   e) lorsque $A = 2\mathbb{N}$ (ensemble des entiers naturels pairs).

   [*Utiliser pour les réponses le tableau de la première feuille de l'annexe II.*]
2. Justifier les réponses données à la question précédente pour les propositions P_3 et P_4.
   [*Utiliser encore pour les réponses la première feuille de l'annexe II.*]
3. Pour chacune des propositions suivantes, indiquer, en justifiant la réponse, si elle est vraie ou fausse :
   a) $\forall A \quad (P_3[A] \Longrightarrow P_2[A])$
   b) $\forall A \quad (P_4[A] \Longrightarrow P_1[A])$
   c) $\forall A \quad ((P_2[A] \text{ et } P_4[A]) \Longrightarrow P_1[A])$
   d) $\forall A \quad ((P_1[A] \text{ et } P_4[A]) \Longrightarrow P_2[A])$
   e) $\forall A \quad ((P_1[A] \text{ et } P_3[A]) \Longrightarrow P_2[A])$
   f) $\forall A \quad ((P_1[A] \text{ et } P_3[A]) \Longrightarrow P_5[A])$
   g) $\forall A \quad ((P_1[A] \text{ et } P_3[A]) \Longrightarrow P_4[A])$
   h) $\forall A \quad ((P_4[A] \text{ et non } P_1[A]) \Longrightarrow P_6[A])$

   [*Utiliser pour les réponses le tableau de la deuxième feuille de l'annexe II.*]

Ne pas oublier d'inscrire son numéro d'étudiant.

Exercice 3 [*à rédiger sur la feuille annexe III*]

Soit E un ensemble et A, B et C des sous-ensembles de E.
Pour tout sous-ensemble X de E, on note X^c le complémentaire de X dans E :

$$X^c = \{x \in E \mid x \notin X\}.$$

1. [*Pour cette question, on ne demande pas de justification.*]
   Compléter le tableau de la feuille annexe IV en inscrivant dans chaque case vide une proposition synonyme de celle qui figure dans l'autre case de la même ligne, en respectant les contraintes suivantes :
   – dans la colonne de gauche, utiliser exclusivement les symboles

   $$A \quad B \quad C \quad A^c \quad B^c \quad C^c \quad E \quad \emptyset \quad = \quad \subset \quad \cup \quad \cap \quad \setminus \quad) \quad ($$

   [*On rappelle que le symbole $\setminus$ désigne l'opération de différence ensembliste : quels que soient les sous-ensembles X et Y de E, $X \setminus Y = \{x \in E \mid x \in X \text{ et } x \notin Y\}$. Par ailleurs, le symbole $\subset$ désigne l'inclusion au sens large, que l'on note parfois aussi $\subseteq$. On peut donc utiliser indifféremment l'un ou l'autre des symboles $\subset$ et $\subseteq$.*]
   – dans la colonne de droite, utiliser exclusivement les symboles suivants : A, B, C, une variable x astreinte à l'ensemble E, le symbole d'appartenance $\in$, le symbole $\notin$, les connecteurs, les quantificateurs, les parenthèses.

2. Les réponses à cette question doivent être justifiées.

   On rappelle que, quels que soient les sous-ensembles X et Y de E, la *différence symétrique* de X et Y est l'ensemble

$$X \Delta Y = (X \cap Y^c) \cup (X^c \cap Y).$$

   Démontrer que, quels que soient les sous-ensembles X et Y de E :

   a) $X \cap Y = \emptyset$ si et seulement si $X \cap Y^c = X$.

   b) $X \cap Y = \emptyset$ si et seulement si $X \Delta Y = X \cup Y$.

   c) $X \cup Y = E$ si et seulement si $X \Delta Y = X^c \cup Y^c$.

   d) $X \Delta Y = \emptyset$ si et seulement si $X = Y$.

On joindra la feuille annexe III à la copie.
Ne pas oublier d'inscrire son numéro d'étudiant.

Exercice 4 *[à rédiger sur la copie]*

Pour chaque entier $n > 0$, on désigne par E_n l'intervalle semi-ouvert $\left]3 + \frac{1}{n}\,,\ 3n+2\right]$.
Autrement dit, on a

$$E_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; 3 + \frac{1}{n} < x \leqslant 3n+2 \right\}.$$

1. Écrire les intervalles E_1, E_2 et E_3.
2. Déterminer la réunion de tous les intervalles E_n, qu'on désignera par X. On a donc

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n.$$

   La description de X demandée ne doit comporter aucune variable muette.
   La réponse doit être justifiée.
3. Déterminer l'intersection de tous les intervalles E_n, qu'on désignera par Y. On a donc

$$Y = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} E_n.$$

   La description de Y demandée ne doit comporter aucune variable muette.

Exercice 6 [*à rédiger sur la copie*]

Toutes les réponses à cet exercice doivent être justifiées.

Étant donné des ensembles E et F, on désigne par F^E l'ensemble des applications de E dans F et par $I(E,F)$ l'ensemble des applications injectives de E dans F :

$$I(E,F)=\{g\in F^E \mid (\forall x\in E)\ (\forall y\in E)\ (x\neq y \Longrightarrow g(x)\neq g(y))\}.$$

Lorsque les ensembles E et F sont finis et ont respectivement p éléments et n éléments (p et n appartiennent donc à $\mathbb{N}$), le nombre d'éléments de $I(E,F)$, qui ne dépend que des nombres p et n, est noté A_n^p. Ainsi, A_n^p est le nombre d'applications injectives d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.
On admettra que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $A_n^0=1$.

1. Exprimer A_n^1 en fonction de n, pour $n\in\mathbb{N}^*$.
2. Calculer A_3^2.
3. Démontrer que, quels que soient les entiers naturels n et p, si $n<p$, alors $A_n^p=0$.

On considère maintenant deux entiers j et k tels que $0<j\leqslant k+1$, on désigne par S l'ensemble $\{1,2,\ldots,j\}$ et par T un ensemble à $k+1$ éléments.
On fixe un élément $a\in T$.
Pour chaque entier i compris entre 1 et j, on pose

$$X_i=\{g\in I(S,T)\mid g(i)=a\}.$$

4. Quel est le nombre d'éléments de l'ensemble X_i ?
5. Démontrer que
$$I(S,T)=I(S,T\setminus\{a\})\cup\bigcup_{1\leqslant i\leqslant j}X_i.$$
6. En déduire que
$$A_{k+1}^j=A_k^j+j\,A_k^{j-1}.$$
7. Démontrer par récurrence que la propriété suivante est vraie pour tout entier $n\in\mathbb{N}$:
$$\text{Quel que soit } p\in\{0,1,\ldots,n\},\quad A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}.$$