Université Paris Diderot
Département Sciences Exactes

Examen du 21 juin 2013
(session de rattrapage)

Corrigé

Corrigé de l'exercice 1

Pour chacune des expressions (a) à (e) ci-dessous,

1. dire s'il s'agit d'un nom ou d'une proposition [*on ne demande pas de justification*] ;
2. indiquer les variables libres (parlantes) et les variables liées (muettes) [*une justification est demandée uniquement pour les variables muettes*] ;
3. donner une expression synonyme ne comportant aucune variable muette [*on ne demande pas de justification*].

L'ensemble indiqué entre crochets à droite en regard de chaque expression est celui auquel sont astreintes toutes les variables qui apparaissent dans l'expression.

	Expression	Variables astreintes à	**NOM** ? / **PROP**osition ?	Variables libres	Variables muettes	Justification pour les variables muettes	Expression synonyme sans variable muette
(a)	La dérivée au point a de l'application $x \mapsto \int_1^x \frac{y}{t}\,dt$	$\mathbb{R}_+$	NOM	a, y	x, t	x est mutifiée par $\ldots \mapsto$ t est mutifiée par $\int \quad d\ldots$	$\frac{y}{a}$
(b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+a^2}{x^3+b^2x+1} = z$	$\mathbb{R}$	PROP	a, b, z	x	x est mutifiée par $\lim\limits_{\ldots \to}$	$z = 0$
(c)	Le point de coordonnées (u, v) appartient à la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 1$	$\mathbb{R}$	PROP	u, v	x, y	x et y sont mutifiées par l'expression « d'équation »	$u^2 + v^2 = 1$
(d)	$N = \sum\limits_{k=1}^{n} k$	$\mathbb{N}$	PROP	N, n	k	k est mutifiée par $\sum\limits_{\ldots=}$	$N = \frac{n(n+1)}{2}$
(e)	$\sum\limits_{k=1}^{n} 2^p$	$\mathbb{N}$	NOM	n, p	k	k est mutifiée par $\sum\limits_{\ldots=}$	$n \quad 2^p$

Corrigé de l'exercice 2

Sans utiliser de table de vérité, démontrer que, pour toutes propositions A, B et C, la proposition

$$((A \Longrightarrow B) \text{ ET } ((\text{NON } A) \Longrightarrow C)) \Longrightarrow (B \text{ OU } C)$$

est vraie.

Supposons que $(B \text{ OU } C)$ soit fausse, c'est-à-dire que B et C soient toutes les deux fausses. Alors, puisque l'une des deux propositions A, (NON A) est vraie, l'une des deux propositions $A \Longrightarrow B$, $(\text{NON } A) \Longrightarrow C$ est fausse (prémisse vraie et conclusion fausse). On en déduit que $((A \Longrightarrow B) \text{ ET } ((\text{NON } A) \Longrightarrow C))$ est fausse. Il est donc impossible que l'on ait simultanément :
$((A \Longrightarrow B) \text{ ET } ((\text{NON } A) \Longrightarrow C))$
vraie et
$(B \text{ OU } C)$
fausse.
Ainsi, la proposition donnée est toujours vraie.

Corrigé de l'exercice 3

1. Combien y a-t-il de distributions de valeurs de vérité sur $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$?

   Il y a 16 distributions de valeurs de vérité sur $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. En effet, le nombre de quadruplets d'éléments de l'ensemble $\{0,1\}$, qui est aussi le nombre d'applications de $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ dans $\{0,1\}$, est 2^4.

2. Déterminer toutes les distributions de valeurs de vérité sur $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ qui donnent la valeur VRAI à la proposition

   $$(p_1 \Longrightarrow p_2) \text{ ET } (p_2 \Longrightarrow p_3) \text{ ET } (p_3 \Longrightarrow p_4).$$

   Pour qu'une distribution de valeurs de vérité sur $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ donne la valeur FAUX à cette proposition, il faut et il suffit qu'il existe un indice $i \in \{1,2,3\}$ tel que, pour cette distribution, p_i soit vrai et p_{i+1} soit faux, autrement dit, qu'on puisse trouver dans le quadruplet un 1 immédiatement suivi d'un 0. On en déduit qu'il y a **cinq** distributions de valeurs de vérité sur $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ qui donnent la valeur VRAI à la proposition considérée :

   $$(0,0,0,0) \quad , \quad (0,0,0,1) \quad , \quad (0,0,1,1) \quad , \quad (0,1,1,1) \quad , \quad (1,1,1,1).$$

Corrigé de l'exercice 4

Démontrer que, pour tout entier $n > 6$,

$$n! > n \times 2^n.$$

On fait une démonstration par récurrence.

Étape initiale :

On a $6! = 720$ et $6 \times 2^6 = 6 \times 64 = 384$; donc $6! > 6 \times 2^6$.

Étape de récurrence :

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 6, et supposons (hypothèse de récurrence) que

$$k! > k \times 2^k.$$

On a alors

$$(k+1)! = (k+1) \times k! > (k+1) \times k \times 2^k.$$

Or $k > 6 > 2$, donc $k \times 2^k > 2 \times 2^k = 2^{k+1}$.
On en déduit la conclusion espérée :

$$(k+1)! > (k+1) \times 2^{k+1}.$$

On a donc bien prouvé que, pour tout entier $n > 6$,

$$n! > n \times 2^n.$$

Le lecteur vérifiera facilement que cette inégalité est fausse pour toutes les valeurs de l'entier n comprises entre 0 et 5.

Corrigé de l'exercice 5

On considère un ensemble E et des sous-ensembles A, B et C de E.

1. En utilisant exclusivement des symboles choisis parmi les suivants :

   les lettres A, B et C, des lettres minuscules pour représenter des variables astreintes à E, le symbole d'appartenance $\in$, les connecteurs NON, ET, OU, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, des parenthèses,

   écrire une proposition P' logiquement équivalente à la proposition P suivante :

   Aucun des trois ensembles $A \cap B$, $A \cap C$ et $B \cap C$ n'est vide et l'ensemble $A \cap B \cap C$ est vide.

   La proposition P' suivante répond à la question :

$$\exists x\,(x \in A \text{ ET } x \in B) \text{ ET } \exists y\,(y \in A \text{ ET } y \in C) \text{ ET } \exists z\,(z \in B \text{ ET } z \in C) \text{ ET } \forall v\, \text{NON}\,(v \in A \text{ ET } v \in B \text{ ET } v \in C)$$

2. Dans le cas où E est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, donner un exemple de choix des sous-ensembles A, B et C de E pour lequel la proposition P est vraie.

   Les sous-ensembles suivants répondent à la question :

   $$A = \{0,1\} \quad , \quad B = \{0,2\} \quad , \quad C = \{1,2\}.$$

3. On considère la proposition Q suivante, dans laquelle les variables x et y sont astreintes à E :

   $$Q : \qquad \forall x \ ((x \in A \text{ OU } x \in B) \Longrightarrow (x \in A \text{ ET } x \in C))$$

   En utilisant exclusivement des symboles choisis parmi les suivants :

   > les lettres A, B et C, le symbole d'intersection $\cap$, le symbole de réunion $\cup$, le symbole d'inclusion $\subset$, les connecteurs NON, ET, OU, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, des parenthèses,

   écrire une proposition Q' logiquement équivalente à la proposition Q.

   La proposition Q' suivante répond à la question :

   $$A \cup B \subset A \cap C.$$

Corrigé de l'exercice 6

Dans cet exercice la variable ε est astreinte à $\mathbb{R}$ et la variable n est astreinte à $\mathbb{N}$

On considère quatre suites de nombre réels, $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $d = (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies comme suit :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = (-2)^n$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \dfrac{1}{n+1}$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$

Pour chaque suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels, on considère les quatre propositions suivantes :

$$\begin{array}{ll} P[u] : & \forall \varepsilon > 0 \ \exists n \ \ |u_n| < \varepsilon \\ Q[u] : & \exists n \ \forall \varepsilon > 0 \ \ |u_n| < \varepsilon \\ R[u] : & \exists \varepsilon > 0 \ \forall n \ \ |u_n| < \varepsilon \\ S[u] : & \forall n \ \exists \varepsilon > 0 \ \ |u_n| < \varepsilon \end{array}$$

1. On demande de compléter le tableau ci-après en indiquant dans chaque case si la proposition figurant en tête de la ligne est vraie (V) ou fausse (F) lorsque u est la suite figurant en tête de la colonne :

   (*Aucune justification n'est demandée pour cette question.*) :

u	a	b	c	d
$P[u]$	V	F	V	V
$Q[u]$	V	F	F	V
$R[u]$	F	F	V	V
$S[u]$	V	V	V	V

Commentaires : On commence par remarquer que « $\forall \varepsilon > 0 \quad |u_n| < \varepsilon$ » est synonyme de « $u_n = 0$ ». Les propositions $P[a]$, $Q[a]$, $P[d]$ et $Q[d]$ sont vraies parce que $a_0 = d_0 = 0$ (il suffit donc de prendre $n = 0$). $Q[b]$ et $Q[c]$ sont fausses car les suites b et c ne prennent jamais la valeur 0. $P[b]$ est fausse car, pour tout n, $|b_n| \geqslant 1$, et donc, pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il n'existe pas d'entier n tel que $|b_n| < \varepsilon$. $P[c]$ est vraie parce que la suite c converge vers 0 (ε étant donné, il suffit de prendre pour n n'importe quel entier supérieur à ε). La proposition $R[u]$ est clairement synonyme de « La suite u est bornée » ; c'est vrai pour les suites c et d (on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < c_n \leqslant 1$ et $0 \leqslant d_n < 1$) et faux pour les suites a et b. Enfin la proposition $S[u]$ est vraie pour n'importe quelle suite u : en effet, un entier n quelconque étant donné, il suffit de choisir $\varepsilon = |u_n| + 1$.

2. Est-il possible de trouver une suite u pour laquelle $P[u]$, $Q[u]$ et $R[u]$ sont fausses ?

   Oui, la suite b répond à la question.

3. Est-il possible de trouver une suite u pour laquelle $P[u]$ est fausse et $Q[u]$ est vraie ?

   Non, ce n'est pas possible : soit u une suite telle que $Q[u]$ soit vraie ; on peut donc trouver un entier naturel, disons n_0, tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, on ait $|u_{n_0}| < \varepsilon$; ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n (en l'occurrence n_0), tel que $|u_n| < \varepsilon$, ce qui prouve que $P[u]$ est également vraie.
   On aura remarqué que les propositions $P[u]$ et $Q[u]$ ne diffèrent que par l'ordre des deux quantifications qu'elles comportent. On est donc ici dans un cas particulier de la propriété générale suivante : quelle que soit la proposition $A[x,y]$, dans laquelle x et y sont des variables libres (astreintes à des ensembles quelconques), la proposition suivante est vraie :

   $$\exists y \ \forall x \ A[x,y] \implies \forall x \ \exists y \ A[x,y].$$

   On sait en revanche que l'implication réciproque peut, elle, être fausse.

4. Pour chaque suite u de réels, on désigne par $T[u]$ la proposition suivante :

   « u converge vers 0 »

   Dire de chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse (justifier la réponse) :

   (a) Pour tout suite u de nombres réels, $P[u] \implies T[u]$ FAUSSE

   La suite a est un contre-exemple : $P[a]$ est vraie (voir question 1) mais $T[a]$ est fausse puisque la suite a n'est évidemment pas convergente. Donc la proposition $P[a] \implies T[a]$ est fausse.

   (b) Pour tout suite u de nombres réels, $T[u] \implies P[u]$ VRAIE

   Soit u une suite telle que $T[u]$ soit vraie, c'est-à-dire une suite convergente de limite 0.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on ait $|u_n| < \varepsilon$. On a donc notamment $|u_N| < \varepsilon$, ce qui prouve que $P[u]$ est également vraie.

Ainsi, la proposition $T[u] \Longrightarrow P[u]$ est vraie.

Corrigé de l'exercice 7

Dans cet exercice, on considère des énoncés $A[x,y]$ à deux variables libres x et y qui sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et, pour chacun d'eux, six énoncés clos obtenus en quantifiant ces variables de diverses façons. On demande d'indiquer pour chacun de ces énoncés clos s'il est vrai ou non, **sans donner de justification**.
On remplira pour cela le tableau ci-après en inscrivant dans chaque case vide V ou F selon que l'énoncé correspondant est vrai ou faux.

$A[x,y]$:	$(x+y)^2 = x^2+y^2$	$(x+y)^2 = x^2-y^2$	$y = x^2+x+1$	$y = x^3+x+1$	$x^3-y^6 = (x^2+xy^2+y^4)(x-y^2)$
$\forall x\ \forall y\ A[x,y]$	F $A[1,1]$ est faux : $4 \neq 2$	F $A[1,1]$ est faux : $4 \neq 0$	F $A[0,0]$ est faux : $0 \neq 1$	F $A[0,0]$ est faux : $0 \neq 1$	V Un calcul simple montre que l'égalité est toujours vraie.
$\forall x\ \exists y\ A[x,y]$	V Prendre $y=0$	V Prendre $y=0$	V Prendre $y=x^2+x+1$	V Prendre $y=x^3+x+1$	V Toujours vrai.
$\exists x\ \forall y\ A[x,y]$	V Prendre $x=0$	F $\forall x\ \exists y$ non $A[x,y]$ est vrai : prendre $y=1$ si $x=0$ et $y=x$ si $x \neq 0$	F $\forall x\ \exists y$ non $A[x,y]$ est vrai : prendre $y=x^2+x$	F $\forall x\ \exists y$ non $A[x,y]$ est vrai : prendre $y=x^3+x$	V Toujours vrai.
$\exists x\ \exists y\ A[x,y]$	V Se déduit de $\forall x\ \exists y\ A[x,y]$	V Se déduit de $\forall x\ \exists y\ A[x,y]$	V Se déduit de $\forall x\ \exists y\ A[x,y]$	V Se déduit de $\forall x\ \exists y\ A[x,y]$	V Toujours vrai.
$\forall y\ \exists x\ A[x,y]$	V Prendre $x=0$	V Prendre $x=-y$	F Il n'existe pas de réel x tel que $x^2+x+1=0$	V L'application $x \mapsto x^3+x+1$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est surjective.	V Toujours vrai.
$\exists y\ \forall x\ A[x,y]$	V Prendre $y=0$	V Prendre $y=0$	F L'application $x \mapsto x^2+x+1$ n'est pas constante !	F L'application $x \mapsto x^3+x+1$ n'est pas constante !	V Toujours vrai.