Université Paris Diderot
Département Sciences Exactes

Langage Mathématique (LM1)
2012-2013

Correction de l'examen partiel du 10 novembre 2012

Numéro étudiant	

LM1 - Partiel du 10/11/12 **Exercice 1** **ANNEXE 1 - À JOINDRE À LA COPIE**

Compléter le tableau. En 4[e] colonne, inscrire **NOM** ou **PROP** selon le cas. Les seules justifications demandées (7[e] colonne) concernent les variables muettes.

	Expression	Variables	**NOM** ? **PROP**osition ?	Variables libres	Variables muettes	Justification pour les variables muettes	Expression synonyme sans variable muette
E_1	$\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2\}$	$\mathbb{R}$	**NOM**	-	x	Utilisée pour définir un ensemble (mutificateur : { ... | ... }).	L'ensemble vide.
E_2	$\{x \in \mathbb{C} \mid x^2 = 2\}$	$\mathbb{C}$	**NOM**	-	x	Même justification.	$\{\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
E_3	$\int_0^a x t \, dt$	$\mathbb{R}$	**NOM**	a, x	t	Utilisée pour écrire un intégrale (mut. : $\int(\dots)d(\dots)$).	$x\frac{a^2}{2}$
E_4	$x \mapsto e^{ax+b}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.	$\mathbb{R}$	**PROP**	a, b	x	Utilisée pour définir une application (mutificateur : $\mapsto$).	a > 0
E_5	$\lim_{x \to +\infty} \frac{ax+b}{(1+c^2)x+1+d^2} = y$	$\mathbb{R}$	**PROP**	a, b, c, d, y	x	Utilisée pour définir une limite (mutificateur : $\lim_{\dots \to \infty}$).	$y = \frac{a}{1+c^2}$
E_6	$\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$	$\mathbb{N}$	**NOM**	n	k	Utilisée pour définir un produit (mutificateur : Π).	$n+1$
E_7	$(\forall x \in A)\ (\exists y \in A)\ y \neq x.$	cf. sujet	**PROP**	A	x, y	Utilisées pour quantifier une proposition (mut. : $\forall$ et $\exists$).	A a au moins deux éléments.
E_8	$(\forall x \in A)\ (\cos x = 1 \implies x = 0)$	cf. sujet	**PROP**	A	x	Utilisée pour quantifier une proposition (mutificateur : $\forall$).	L'ensemble $A \setminus (2\pi\mathbb{Z}^*)$ est vide.

Numéro étudiant	

LM1 - Partiel du 10/11/12 **Exercice 2** **ANNEXE 2 - À JOINDRE À LA COPIE**

Compléter le tableau. La justification est demandée seulement s'il est impossible de rendre la proposition vraie ou de la rendre fausse.
Utiliser le verso de cette feuille en cas de manque de place.

	Proposition	Valeurs de vérité (**V** ou **F**) qui la rendent vraie			Valeurs de vérité (**V** ou **F**) qui la rendent fausse			Justification de l'impossibilité éventuelle
		A	B	C	A	B	C	
P_1	$\textbf{NON}(A\ \textbf{ET}\ (\textbf{NON}\,B))\ (\ )\ (A =)\ B)$	V	V	-	-	-	-	$A\ )\ B$ est logiquement équivalent à ((**NON** A) **OU** B) et **NON** $(A\ \textbf{ET}\ (\textbf{NON}\ B))$ est logiquement équivalent à ((**NON** A) **OU** B)
P_2	$(A =)\ B)\ \textbf{ET}\ (A =)\ (\textbf{NON}\,B))$	F	V	-	V	V	-	-
P_3	$(A =)\ B)\ \textbf{ET}\ (B =)\ (\textbf{NON}\,A))\ \textbf{ET}\ (C =)\ A)\ \textbf{ET}\ ((\textbf{NON}\,C) =)\ A)$	-	-	-	V	V	V	Si A est fausse, une des propositions $(C\ )\ A)$ ou $((\textbf{NON}\,C)\ )\ A)$ est fausse. Si A est vraie, une des propositions $(A\ )\ B)$ ou $(B\ )\ (\textbf{NON}\,A))$ est fausse.
P_4	$((A =)\ B)\ \textbf{ET}\ ((\textbf{NON}\,A) =)\ C)) =)\ \textbf{NON}\,(B\ \textbf{ET}\ C)$	V	V	F	V	V	V	-

Numéro étudiant	

LM1 - Partiel du 10/11/12 **Exercice 3** **ANNEXE 3 - À JOINDRE À LA COPIE**

Compléter le tableau. Les variables x et y sont astreintes à $\mathbb{R}$.

$A[x;y]$:	$x+y=1$		$x \times y = 0$		$x+y = x \times y$		$e^x = \ln \frac{1}{1+y^2}$	
	VRAI/FAUX	Justification	VRAI/FAUX	Justification	VRAI/FAUX	Justification	VRAI/FAUX	Justification
$P: \quad \forall x \forall y\, A[x;y]$	F	$2+2 \neq 1$: A[2, 2] est fausse.	F	$1 \times 1 \neq 0$: A[2,2] est fausse.	F	$0+1 \neq 0 \times 1$: A[0,1] est fausse.	F	Voir S : P implique S.
$Q: \quad \forall x \exists y\, A[x;y]$	V	Soit $x \in \mathbb{R}$. Prenons $y = 1 - x$: alors $x+y=1$.	V	Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $x \times 0 = 0$.	F	$A[1;y]$ $(1+y=y)$ est fausse pour tout $y \in \mathbb{R}$.	F	Voir S : Q implique S.
$R: \quad \exists y \forall x\, A[x;y]$	F	Si un tel y existe,. alors (en prenant $x = -y$), $x+y=0=1$, contradiction.	V	$y=0$ vérifie : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \times 0 = 0$.	F	Si un tel y existe, alors $y = y+0 = 0 \times y = 0$, mais alors $x+0=0$ pour tout x, impossible.	F	Voir S : R implique S.
$S: \quad \exists x \exists y\, A[x;y]$	V	$0+1=1$: A[0,1] est vraie.	V	$0 \times 1 = 0$: A[0,1] est vraie.	V	$2+2 = 2 \times 2$: A[2,2] est vraie.	F	Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $ln(\frac{1}{1+y^2}) \leq 0$, mais $e^x > 0$: A[x,y] est fausse !

Numéro étudiant	

LM1 - Partiel du 10/11/12 **Exercice 4** **ANNEXE IV - À JOINDRE À LA COPIE**

Compléter le tableau. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Une application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite *périodique* s'il existe un réel $T \neq 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x+T) = g(x)$.

Domaine d'astreinte des variables	Affirmation	Légitime ? Répondre par **OUI** ou **NON**	Brève ustification
$\mathbb{N}$	$x = y$, **donc** $x^2 = y^2$.	Oui	Si $x = y$, alors $x^2 = x \times x = y \times y = y^2$.
$\mathbb{N}$	$x^2 = y^2$, **donc** $x = y$.	Oui	La fonction $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est strictement croissante, donc injective.
$\mathbb{N}$	$x^3 = y^3$, **donc** $x = y$.	Oui	La fonction $x \mapsto x^3$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est strictement croissante, donc injective.
$\mathbb{N}$	$x = \lvert x \rvert$, **donc** $\exists y\ x = y^2$.	Non	$2 = \lvert 2 \rvert$, et pourtant 2 n'est le carré d'aucun entier.
$\mathbb{R}$	$x^2 = y^2$, **donc** $x = y$.	Non	$1^2 = (-1)^2$, mais $1 \neq -1$.
$\mathbb{R}$	$x^3 = y^3$, **donc** $x = y$.	Oui	La fonction $x \mapsto x^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est strictement croissante, donc injective.
$\mathbb{R}$	$x = \lvert x \rvert$, **donc** $\exists y\ x = y^2$.	Oui	x est alors positif, et $\sqrt{x}$ est un réel dont le carré est x.
$\mathbb{C}$	$x^3 = y^3$, **donc** $x = y$.	Non	$(exp(2i\pi/3))^3 = 1^3$, mais $(exp(2i\pi/3)) \neq 1$.
$\mathbb{C}$	$x = \lvert x \rvert$, **donc** $\exists y\ x = y^2$.	Oui	Dans ce cas x est un réel positif, ce qui nous ramène à un cas précédent.
$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	f n'est pas croissante, **donc** f est décroissante.	Non	La fonction sin n'est ni croissante ni décroissante sur $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	f est croissante, **donc** f n'est pas majorée.	Non	La fonction $x \mapsto -1/x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, majorée par 0 sur $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	f est décroissante non minorée, **donc** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.	Oui	Soit $A < 0$. Il existe x_0 tel que $f(x_0) < A$ ("f non minorée"). Pour tout $x \geq x_0$, $f(x) \leq f(x_0) \leq A$, cqfd.
$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	f est continue, **donc** f est dérivable.	Non	$x \mapsto \lvert x \rvert$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	f est dérivable, **donc** f est continue.	Oui	Pour que $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, il faut que $\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.
$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	f est périodique, **donc** f est bornée.	Non	La fonction qui à x associe $tan(x)$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}\}$ et 0 sinon est $\pi -$ périodique non bornée.

Exercice 5

On désigne :

- par $\mathscr{E}$ l'ensemble des quadrilatères convexes du plan ;
- par $\mathscr{T}$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}$ constitué des trapèzes ; - par $\mathscr{P}$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}$ constitué des parallélogrammes ;
- par $\mathscr{L}$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}$ constitué des losanges ; - par $\mathscr{R}$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}$ constitué des rectangles.

Compléter le tableau suivant en indiquant dans chaque cas si la proposition donnée en première colonne est vraie (**V**) ou fausse (**F**) quand la variable Q est astreinte à l'ensemble indiqué [*on ne demande pas de justification*] :

	Q est astreinte à $\mathscr{E}$	Q est astreinte à $\mathscr{T}$	Q est astreinte à $\mathscr{P}$	Q est astreinte à $\mathscr{L}$	Q est astreinte à $\mathscr{R}$
Quel que soit Q, Q a quatre axes de symétrie.	F	F	F	F	F
Quel que soit Q, Q a des diagonales perpendiculaires ou Q a quatre angles droits.	F	F	F	V	V
Quel que soit Q, il existe un point équidistant des 4 sommets de Q.	F	F	F	F	V
Quel que soit Q, la somme des angles de Q est égale à 360°.	V	V	V	V	V
Quel que soit Q, si les diagonales de Q sont de même longueur, alors Q est un carré.	F	F	F	V	F
Quel que soit Q, si les diagonales de Q sont perpendiculaires, alors Q est un losange.	F	F	V	V	V

Exercice 6

On considère la proposition $P[n]$ suivante, dans laquelle les variables a, b, n, k et h sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels :

$$\forall a\, \forall b \quad ((\exists k \quad a - b = k \times n) \Rightarrow (\exists h \quad a+b = h \times n))$$

1. Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est ou si elle n'est pas logiquement équivalente à $P[n]$
(*on ne demande pas de justification*) :

   (A) Quels que soient les entiers naturels a et b, tout diviseur de $a - b$ est un diviseur de $a+b$.

   (B) Quels que soient les entiers naturels a et b, si n divise $a - b$, alors n divise $a+b$.

   (C) Quels que soient les entiers naturels a et b, si $a - b$ est divisible par k, alors $a+b$ est divisible par h.

   La proposition (B) est logiquement équivalente à $P[n]$; les propositions (A) et (C) ne lui sont pas logiquement équivalentes.

2. Démontrer que $P[2]$ est vraie.

   La proposition $P[2]$ s'écrit :

   $$\forall a\, \forall b \quad ((\exists k \quad a - b = k \times 2) \Rightarrow (\exists h \quad a+b = h \times 2))$$

   Elle signifie : pour tous entiers naturels a et b, si $a - b$ est pair, alors $a+b$ est pair.

   Soient a et b deux entiers naturels. Supposons que $a - b$ est pair.
   Alors $a+b = (a - b) + 2b$ est la somme de deux entiers pairs, donc $a+b$ est pair.
   $P[2]$ est ainsi démontrée.

3. Démontrer que $P[3]$ est fausse.

   $P[3]$ s'écrit :

   $$\forall a\, \forall b \quad ((\exists k \quad a - b = k \times 3) \Rightarrow (\exists h \quad a+b = h \times 3))$$

   Elle signifie : Quels que soient les entiers naturels a et b, si 3 divise $a - b$, alors 3 divise $a+b$.

   $P[3]$ est fausse, voici un contre-exemple :
   3 divise $4 - 1$, mais 3 ne divise pas $4+1$.

4. Est-ce que $P[1]$ est vraie ? Justifier la réponse.

   $P[1]$ s'écrit :

   $$\forall a\, \forall b \quad ((\exists k \quad a - b = k \times 1) \Rightarrow (\exists h \quad a+b = h \times 1))$$

Montrons que $P[1]$ est vraie.

Soient a et b deux entiers naturels.
La proposition $(\exists h \in \mathbb{N}; \; a+b=h\times 1)$ est vraie,
donc la proposition $((\exists k \in \mathbb{N}; \; a-b=k\times 1) \Rightarrow (\exists h \in \mathbb{N}; \; a+b=h\times 1))$ est vraie (et ce, quelle que soit la valeur de vérité de la proposition $(\exists k \in \mathbb{N}; \; a-b=k\times 1)$, qui dépend de a et de b).

5. Est-ce que $P[0]$ est vraie ? Justifier la réponse.

   $P[0]$ s'écrit :
$$\forall a \, \forall b \quad ((\exists k \quad a-b=k\times 0) \Rightarrow (\exists h \quad a+b=h\times 0))$$

   Montrons que $P[0]$ est fausse en donnant un contre-exemple :
   pour $a=3$ et $b=3$, on a :
   Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $3-3=0\times k$ (par exemple, $k=1$ convient).
   Par contre, pour tout $h \in \mathbb{N}$, $3+3 \neq 0\times h$.
   Ainsi, la proposition $(\exists k \in \mathbb{N}; \; 3-3=k\times 0)$ est vraie, tandis que la proposition $(\exists h \in \mathbb{N} \; 3+3=h\times 0))$ est fausse.
   Donc la proposition $((\exists k \in \mathbb{N}; \; 3-3=k\times 0) \Rightarrow (\exists h \in \mathbb{N}; \; 3+3=h\times 0))$ est fausse.

6. On considère un entier $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $P[n]$ est vraie.
   a) Démontrer que la proposition $Q[n]$ suivante est vraie :
$$\forall a \, \exists h \quad h\times n = 2a$$

      Soit $a \in \mathbb{N}$.
      Alors $a-a=0\times n$, c'est-à-dire que $\exists k \quad a-a=k\times n$ est vraie.
      Donc, puisque $P[n]$ est vraie, il existe $h \in \mathbb{N}$ tel que $a+a=h\times n$.

      Cela démontre que $Q[n]$ est vraie.

   b) Démontrer que n est un diviseur de 2.

      Puisque $\forall a \; \exists h \quad h\times n=2a$ est vraie, on a en particulier $\exists h \in \mathbb{N} \quad h\times n=2$ (pour $a=1$).
      Ce qui signifie que n est un diviseur de 2.

7. Donner une proposition logiquement équivalente à $P[n]$ dans laquelle ne figure aucune variable muette.

   Une proposition logiquement équivalente a $P[n]$ dans laquelle ne figure aucune variable muette est : « $n=1$ ou $n=2$ ».
   En effet, la question 6.b) indique que si n est un entier tel que $P[n]$ est vraie, alors n est égal à 1 ou à 2 (qui sont les diviseurs de 2) ; les questions 2 et 4 permettent quant à elles d'affirmer que $P[1]$ et $P[2]$ sont vraies.