Exercice 1

. On a bien $\alpha^{1} - \alpha^{0} \geq 1$

. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha^{n} \geq n$

Alors $\alpha^{n+1} = \alpha^{1} \times \alpha^{n} \geq \alpha^{1} \times n = n + n \geq n + 1$

On a donc démontré par récurrence que
$\forall n \geq 1 \quad \alpha^{n} \geq n$

Exercice 2:

) Les triplets suivants vérifient les inéquations (1) et (2) :

(100 ; 100 ; 0,001) (0,2 ; 2 ; 3) (0,1 ; 3 ; 4)

(1,1 ; 1,3 ; 0,7) (0,05 ; 2 ; 12)

upposons $a = 1$ ou $b = 1$ ou $c = 1$

$= 1$, alors de (1) on déduit $bc > 1$
de (2) on déduit $b + c < \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

$b + c < \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \iff b + c < \frac{b+c}{bc}$

$\iff bc < 1$ d'où une contradiction.

manière, on montre que l'on a $b \neq 1$ et $c \neq 1$

E

a

(1

b)(1) Si

. Si a

Mais

De la même

(2) On veut montrer $a > 1$ ou $b > 1$ ou $c > 1$

Supposons sa négation, c'est-à-dire $a \leq 1$ et $b \leq 1$ et $c \leq 1$.
On aurait alors $abc \leq 1$ ce qui est en contradiction avec l'inégalité (1)

(3) On veut montrer $a < 1$ ou $b < 1$ ou $c < 1$

Supposons sa négation, c'est-à-dire $a \geq 1$ et $b \geq 1$ et $c \geq 1$
On aurait alors $a \geq \frac{1}{a}$ et $b \geq \frac{1}{b}$ et $c \geq \frac{1}{c}$

D'où $a+b+c \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ce qui est en contradiction avec l'inégalité (2)

c) (1) Si $ab < 1$, alors de (1) on déduit $c > \frac{1}{ab} > 1$

(2) $ab > 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} < a+b$

D'après l'inégalité (1), $c > \frac{1}{ab}$

D'après l'inégalité (2), on a $a+b+c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Or $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < a+b$ donc c doit vérifier $c < \frac{1}{c}$

c'est-à-dire $c < 1$

On a donc $\frac{1}{ab} < c < 1$

et donc $ab > \frac{1}{c} > 1$

Donc $a+b+c > a+b+\frac{1}{ab}$

et $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} < \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+ab$

On déduit alors de l'inégalité (2) que l'on a

$$a+b+\frac{1}{ab} < \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+ab$$

c'est-à-dire $a^2b+ab^2+1-b-a-a^2b^2<0$

$\iff (1-a)(b-1)(ab-1)<0$

Or $a<1$ donc $1-a>0$

$b>1$ donc $b-1>0$

$ab>1$ donc $ab-1>0$

On a donc une contradiction.

Donc quand $ab>1$ on ne peut pas trouver de nombre c tel que a, b, c vérifient les inégalités (1) et (2).

Exercice 3

a) $f(A)=\{x\in F,\ \exists t\in A\ x=f(t)\}$

) $f^{-1}(B)=\{x\in E,\ f(x)\in B\}$

) Soit $A\subset E$ et $x\in A$