Université Paris Diderot
Département Sciences Exactes

Corrigé de l'examen partiel du 21 novembre 2009

Exercice 1

Déterminer dans chacune des expressions suivantes les variables libres et les variables muettes.

(1) $x^3 + 4x + c = 0$.

Il n'y a aucun mutificateur dans cette expression : les variables x et c sont libres.

(2) L'ensemble des points M du plan tels que $MA = MB$ et $MC > MO$.

La variable M est muette. Le mutificateur est l'expression « L'ensemble des ... tels que ». Les autres variables (A, B, C et O) sont libres.

(3) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})[x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)]$.

Les variables x et y sont muettes : elles sont mutifiées par les quantificateurs universels. La variable f est libre.

(4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{a}{c}$.

La variable x est muette : elle est mutifiée par le signe $\lim\limits_{\dots \to}$. Les variables a, b, c et d sont libres.

(5) L'ensemble des entiers n tels que que $n^2 + 3$ est un multiple de p.

La variable n est muette : le mutificateur est l'expression « L'ensemble des ... tels que ». La variable p est libre.

Exercice 2

1. On considère l'énoncé $\mathscr{E}$ suivant, dans lequel les variables a, b et x sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels :

$$\mathscr{E} : \quad \forall x (ax + b \neq 0)$$

1.a. Indiquer les variables libres et les variables muettes de l'énoncé $\mathscr{E}$.

La variable x est muette : elle est mutifiée par le quantificateur $\forall$. Les variables a et b sont libres.

1.b. Donner une valeur de a et une valeur de b pour lesquelles l'énoncé $\mathscr{E}$ est faux.

Dans le cas où a vaut 1 et b vaut 0, l'énoncé $\mathscr{E}$ (qui est alors $\forall x (x \neq 0)$) est faux (il n'est pas vrai que tout réel est différent de zéro).

1.c. Donner un énoncé synonyme de $\mathscr{E}$ ne comportant aucune variable muette.

L'énoncé $\mathscr{E}$ est synonyme de

$$a = 0 \text{ et } b \neq 0$$

Pour le prouver, distinguons trois cas :
1er cas : $a = 0$ et $b \neq 0$ est vrai ; alors l'énoncé $\mathscr{E}$ devient $\forall x (b \neq 0)$ qui est vrai dans ce cas ;
2e cas : $a = 0$ et $b \neq 0$ est faux parce que $a = b = 0$; alors l'énoncé $\mathscr{E}$ devient $\forall x (0 \neq 0)$ qui est évidemment faux ;
3e cas : $a = 0$ et $b \neq 0$ est faux parce que $a \neq 0$; alors l'énoncé $\mathscr{E}$ est également faux, car sa négation, qui équivaut à $\exists x (ax + b = 0)$ est vraie ; il est bien connu en effet que l'équation

en x $ax+b=0$ admet une solution (d'ailleurs unique) lorsque a est différent de 0, et ce quelle que soit la valeur de b.
On voit ainsi que, dans tous les cas, l'énoncé $\mathscr{E}$ et l'énoncé $a=0$ et b 6= 0 sont soit tous les deux vrais, soit tous les deux faux.

2. On considère l'énoncé $\mathscr{F}$ suivant, dans lequel les variables p, q et x sont astreintes à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs :

$$\mathscr{F} : \quad 8x(x > p \text{ ou } x \text{ 6 } q)$$

2.a. Indiquer les variables libres et les variables muettes de l'énoncé $\mathscr{F}$.

2.b. Écrire un énoncé équivalent à la négation de $\mathscr{F}$, sans utiliser le mot « non » ni le symbole : .

2.c. Donner un énoncé synonyme de $\mathscr{F}$ ne comportant aucune variable muette.

3. On considère l'énoncé $\mathscr{G}$ suivant, dans lequel $\mathscr{R}$ désigne un repère orthonormé fixé du plan euclidien, et où les variables $a; b; c; d; x$ et y sont astreintes à l'ensemble R des réels :

$\mathscr{G}$: « Les droites d'équations respectives $y=ax+b$ et $y=cx+d$ dans le repère $\mathscr{R}$ sont perpendiculaires. »

3.a. Indiquer les variables libres et les variables muettes de l'énoncé $\mathscr{G}$.

3.b. Donner un énoncé synonyme de $\mathscr{G}$ ne comportant aucune variable muette.

4. En utilisant des variables astreintes à l'ensemble C des nombres complexes, des connecteurs et des quantificateurs, les parenthèses, l'addition, la multiplication, et des exposants entiers, écrire un énoncé synonyme de

« Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées. »

Exercice 3

Pour chaque sous-ensemble A de l'ensemble R des nombres réels, on désigne par $\mathscr{Q}(A)$ l'énoncé suivant :

$$(8x \ 2 \ A)\,(9y \ 2 \ A)\,(y < x)$$

dans lequel x et y sont des variables astreintes à R et < désigne la relation d'ordre stricte usuelle sur R.

Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'énoncé $\mathscr{Q}(A)$ est vrai ou non :

1. $A =$ N.

2. $A =$ Q.

3. $A = [0; 1]$.

4. $A =]0; 1[$.

5. $A = f x \ 2 \ \mathrm{R} \ j \,(9n \ 2 \ \mathrm{N}) \left(x = \dfrac{1}{n}\right) g.$

Exercice 4

Est-il possible d'attribuer des valeurs de vérité (VRAI ou FAUX) aux propositions A, B et C de telle sorte que l'énoncé suivant soit faux ?