

TD9 : Développement limités, limites, asymptotes

Exercice 1: Calculs de DL

Trouver un développement limité au voisinage de $x = 0$ à l'ordre précisé pour chacune des fonctions suivantes :

- 1) $\tan(x)^2$ à l'ordre 7 ;
- 2) $\frac{x}{\sin x}$ à l'ordre 7 ;
- 3) $\frac{1}{\cos(x)}$ à l'ordre 7 ;
- 4) $\frac{x^2}{\sin x}$ à l'ordre 7 ;
- 5) $\frac{\log(1+x)}{1+x}$ à l'ordre 4 ;
- 6) $e^{\cos x}$ à l'ordre 7 ;
- 7) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 7 ;
- 8) $(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 7 ;
- 9) $\text{Arctan}(x)^2$ à l'ordre 5 ;
- 10) $\log(1+x\cos x)$ à l'ordre 5.

Exercice 2: Limite à paramètre

Soit a un paramètre réel. Étudier la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{a}{x^2+a}}$.

Exercice 3: Encore une limite à paramètre

Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$ a-t-on la formule :
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2+x+1} = 0$?

Exercice 4: Calculs de limites

Calculer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - 3x^3}{x^4 - x^5}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \cos x)$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 1}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x^2-4}$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{1+x^2}$, où $a \in \mathbb{R}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin^2 x}{(1 - \cos x) \sin x}$;
- 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \sin x}{x^3}$.

Exercice 5: Une formule sur l'arctangente

On définit, pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\frac{1}{x})$.

1) Montrer que f est dérivable en tout point de \mathbb{R} et que $f'(x) = 0$.

2) En déduire la formule $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\frac{1}{x}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

3) Montrer que la fonction $g(x) = \text{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$. La limite est-elle atteinte par valeurs positives ou négatives ?

Exercice 6: Asymptotes

On considère la fonction $f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x^2 - x + 4}$. Montrer que la fonction f admet une asymptote lorsque x tend vers $-\infty$. Déterminer ces deux asymptotes, ainsi que la position de la courbe $y = f(x)$ par rapport à ces asymptotes.

Exercice 7: DL et calculs de limites

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{\cos x}{1 - x^2}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{\cos x - x}{\log(1 + x)}$;

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan(x) - \tan(2x)}{x(1 - \cos(3x))}$;

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \frac{1}{x^2}}{x}$.