

Examen du 17 mai 2013

Durée : 3 heures

Sans documents, à l'exception d'un feuil A4 recto-verso manuscrit.

Les quatre exercices sont indépendants.

Barème indicatif :

exercice 1 : 6,5 points,

exercice 2 : 4,5 points,

exercice 3 : 8 points,

exercice 4 : 4,5 points.

Exercice 1 (Algèbre linéaire)

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $v_1 = e_2 + e_3$, $v_2 = e_1 + e_3$ et $v_3 = e_1 + e_2$.

1. Montrer que $B' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Calculer $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$, et en déduire la matrice A' de f dans la base B' .
3. Écrire la matrice de passage P de la base B à la base B' .
4. Calculer la matrice P^{-1} .
5. Écrire la formule reliant les matrices A , A' et P (on n'exécute pas d'effets de calcul).
6. Calculer la matrice A'^3 .
7. En déduire A^3 . Quel est le résultat ?

Exercice 2 (Primitive d'une fraction rationnelle)

On considère la fraction rationnelle

$$R : x \mapsto R(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

1. Quel est le domaine de définition de R ?
2. Décomposer R en éléments simples.
3. Donner la forme générale d'un primitif de R , sur chaque intervalle où il est défini.
4. Calculer la primitive de la fonction R qui s'annule en 0 et 2.

Exercice 3 (Développements limités)

On rappelle que les fonctions $\cosh(x)$ et $\sinh(x)$ sont respectivement les parties paires et impaires de la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$. Autrement dit, pour tout x ,

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

On rappelle aussi que la fonction $x \mapsto \arctan(x)$ définie sur \mathbb{R} est la fonction réciproque de la fonction $x \in]-\pi/2, +\pi/2[\mapsto \tan(x)$, et que l'on a

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

de la fonction \arctan . On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \sinh(x) \arctan(x)$$