Université Paris Diderot
Département de Sciences Exactes

MI2 – Année 2010/11
L2 Info

Feuille d'exercices n°2 : Algèbre linéaire (matrices, applications linéaires, dimension, rang)

On note $I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ *la matrice identité de taille* $n \times n$.

CALCUL MATRICIEL

Exercice 1 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2×2 ; on définit sa *trace* par $\mathrm{Tr}(A) = a + d$ et son *déterminant* par $\det(A) = ad - bc$.

1. Vérifier l'équation (théorème de Cayley-Hamilton en dimension deux) :

$$A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0.$$

2. Posons $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$; montrer que pour toute matrice A on a l'égalité : $A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det(A)I_2$.
3. Montrer que A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et que, dans ce cas :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

4. Supposons que $A^2 = 0$ (on dit que A est *nilpotente*), montrer que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $\det(A) = 0$.
5. Montrer que pour A et B matrices carrées de taille 2×2 on peut avoir $AB \neq BA$ mais qu'on a toujours

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

Exercice 2 Soit A, B deux matrices $n \times n$ telles que $AB = I_n$.

1. Montrer que A et B sont des matrices inversibles.
2. Montrer que $BA = I_n$ ("l'inverse à gauche est égal à l'inverse à droite").

Exercice 3 Déterminer l'ensemble des matrices A de taille 2×2 à coefficients réels telles que $A\,{}^tA = I_2$ (on donnera également une interprétation géométrique des transformations linéaires associées).

Exercice 4 (Quaternions) On note dans cet exercice $\mathbf{1}$ la matrice identité de taille 2×2. On définit également les matrices suivantes à coefficients complexes :

$$I := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad K := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier les formules $I^2 = J^2 = K^2 = -\mathbf{1}$, $IJ = -JI = K$, $JK = -KJ = I$ et $KI = -IK = J$.
2. Montrer également que, si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, on a

$$(a\mathbf{1} + bI + cJ + dK)(a\mathbf{1} - bI - cJ - dK) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\mathbf{1}$$

3. En déduire que si la matrice $M = a\mathbf{1} + bI + cJ + dK$ n'est pas nulle, elle est inversible.

Exercice 5 Soit $A = ((a_{i,j}))_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}$ une matrice de taille $m \times n$, on définit la *transposée* de A par la formule

$${}^tA = ((b_{j,i}))_{1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant i \leqslant m}, \qquad \text{avec } b_{j,i} = a_{i,j}$$

(noter que c'est une matrice de taille $n \times m$). Montrer que ${}^t(A.B) = {}^tB.{}^tA$ et, si A est carrée inversible ${}^t\left(A^{-1}\right) = \left({}^tA\right)^{-1}$. En déduire que, si A et B sont carrées et inversibles on a l'égalité ${}^t(A.B)^{-1} = {}^tA^{-1}.{}^tB^{-1}$.

IMAGE, NOYAU, RANG

Exercice 6 Soit l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x,y,z) = (2y - z, z - 2x, x - y).$$

1. Discuter, selon les valeurs des paramètres a, b, c, les solutions du système linéaire

$$\begin{cases} 2y - z &= a \\ z - 2x &= b \\ x - y &= c \end{cases} \tag{S}$$

2. En déduire des équations et des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que les vecteurs $b_1 := (1,1,2)$, $b_2 := (1,-1,0)$ et $b_3 := (1,1,-1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette base. (On pourra commencer par calculer $f(b_1)$, $f(b_2)$ et $f(b_3)$ en fonction de b_1, b_2, b_3).

Exercice 7 Soit $u : E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer les inclusions de sous-espaces vectoriels

$$\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2) \subset \mathrm{Ker}(u^3) \subset \dots$$

2. Montrer que u envoie le sev $\mathrm{Ker}(u^2)$ dans le sev $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$.
3. Montrer que l'application $u : Ker(u^2) \to \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u)$ est surjective.
4. En déduire l'inégalité :

$$\dim \mathrm{Ker}(u^2) \leqslant 2 \dim \mathrm{Ker}(u)$$

et donner un exemple où $\dim \mathrm{Ker}(u^2) = 2 \dim \mathrm{Ker}(u)$

Exercice 8 On définit l'application linéaire $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par :

$$u(x,y,z) = (x + 6y - z, x + z, x - 3y + 2z).$$

On note id l'application linéaire "identité" de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Ecrire la matrice A de u dans la base canonique $e_1 := (1,0,0)$, $e_2 := (0,1,0)$, $e_3 := (0,0,1)$.
2. Donner une base de $\mathrm{Im}(u)$ et une équation de $\mathrm{Im}(u)$.
3. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u - 3id)$ sont de dimension 1 ; donner un vecteur formant une base de chacun de ces sous-espaces.
4. Calculer la matrice de u^2 et en déduire que $\mathrm{Ker}(u^2)$ est un sous-espace de dimension 2, contenant $\mathrm{Ker}(u)$.
5. Construire une base f_1, f_2, f_3 de $\mathbb{R}^3$ telle que f_1 soit une base de $\mathrm{Ker}(u - 3id)$, f_2 une base de $\mathrm{Ker}(u)$ et $\{\mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3\}$ une base de $\mathrm{Ker}(u^2)$. Comment s'écrit la matrice B de u dans cette nouvelle base ?

Exercice 9 Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f \neq 0$ mais $f^2 = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est inclus dans $\mathrm{Ker}(f)$ et en déduire le rang de f.
2. Soit e_3 un vecteur de E tel que $f(e_3) \neq 0$. On pose $e_2 = f(e_3)$, montrer qu'on peut choisir un vecteur e_1 dans $\mathrm{Ker}(f)$ non colinéaire avec e_2.
3. En déduire que $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de E et écrire la matrice de f dans cette base.
4. (Exemple) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $A^2 = 0$, choisir les vecteurs e_1, e_2 et e_3 comme ci-dessus et écrire la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Exercice 10 On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs lignes $e_1 = (1,0,1,0)$, $e_2 = (-1,1,1,1)$, $e_3 = (2,3,4,0)$ ainsi que $f_1 = (-1,2,-3,1)$, $f_2 = (-1,2,1,3)$, $f_3 = (-1,2,5,-1)$. On pose $E = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$ et $F = \langle f_1, f_2, f_3\rangle$.

1. Calculer $\dim(E)$ et $\dim(F)$.
2. Trouver des équations et une base de $E \cap F$.
3. Extraire une base $\mathbb{R}^4$ de $\{e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3\}$.

Exercice 11 Soit $f(x,y,z) = (-x+y+z, -6x+4y+2z, 3x-y+z)$.

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et vérifier que $A^2 = 2A$.
2. Montrer que si $v \in \mathrm{Im}(f)$ alors $f(v) = 2v$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.
4. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$, et, si $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est la base de $\mathbb{R}^3$ formée par la réunion de ces bases (de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$), écrire la matrice de f dans la base $\mathbf{B}$.

Exercice 12 On note e_1, e_2, e_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A := \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Soient $e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$ et $e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$.

1. Montrer que e'_1, e'_2, e'_3 est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $f(e'_1)$, $f(e'_2)$ et $f(e'_3)$ et en déduire B la matrice de f dans la base e'_1, e'_2, e'_3.
3. Ecrire la matrice de passage (que l'on notera P) de la base e_1, e_2, e_3 à la base e'_1, e'_2, e'_3 ; calculer P^{-1}.
4. Ecrire la formule générale reliant A, B et P et faire la vérification de la formule obtenue.
5. Calculer B^4 et A^4.

Exercice 13 Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $E = E_d$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $< d$. Soient $a_1 < a_2 < \cdots < a_d$ des réels distincts. On définit les polynômes

$$P_j(X) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{d} \frac{(X - a_i)}{(a_j - a_i)} \qquad \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant d.$$

1. Vérifier que $P_j(a_i) = 0$ si $i \neq j$ et $P_j(a_j) = 1$. En déduire que les P_j forment une base de E.
2. Montrer que pour tous $b = (b_1, \ldots, b_d) \in \mathbb{R}^d$ il existe un unique polynôme $P \in E$ tel que $P(a_i) = b_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant d$.

Exercice 14 Soit u un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension n, tel que $u^2 = id$.

1. Soit $x \in E$, montrer que le vecteur $x_1 := u(x) + x$ (resp. $x_2 := x - u(x)$) vérifie $u(x_1) = x_1$ (resp. $u(x_2) = -x_2$).
2. Montrer que
$$E = \mathrm{Ker}(u - id) \oplus \mathrm{Ker}(u + id).$$
3. En déduire l'existence d'un entier $s \in [0, n]$ et d'une base de E dans laquelle la matrice de u s'écrit :
$$\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & -I_{n-s} \end{pmatrix}.$$