Université de Paris 7 — **Second semestre**
L1 INFO – 2013 — **Semaine 6**

TD6 : Applications linéaires

Exercice 1: Matrices d'une même projection du plan

Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la projection sur l'axe des abscisses $\mathbb{R}\vec{i}$ parallèlement à $\mathbb{R}(\vec{i} + \vec{j})$.

1) Déterminer $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$, la matrice de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

2) Même question avec $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ où $\mathcal{B}'$ est la base $(\vec{i} - \vec{j}, -2\vec{i} + 3\vec{j})$ de $\mathbb{R}^2$.

3) Même question avec $\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}')$.

Exercice 2: Matrices et changement de base

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et de base (e_1, e_2, e_3). On désigne par I l'application identité de E. Soit f une application linéaire de E dans E (i.e. un *endomorphisme* de E) telle que $f(e_1) = 2e_2 + 3e_3, f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3, f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$.

1. Donner la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3).
2. Donner la dimension et une base de $Ker(f - I)$.
3. Donner la dimension et une base de $Ker(f^2 + I)$.
4. Montrer que la reunion des bases précédentes constitue une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette nouvelle base ? Et celle de f^2 ?

Exercice 3: Application linéaire sur un espace de matrices

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ donnée par $f : M \mapsto AM$.

1) Montrer que f est linéaire.

2) Déterminer sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 4: Matrice de changement de base

Soient trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de $\mathbb{R}^3$. On note T l'application linéaire définie par $T(e_1) = T(e_3) = e_3$ et $T(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$.

1. Déterminer le noyau de cette application linéaire. Donner la matrice A de T dans la base donnée.
2. On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3. Les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
3. Calculer $T(f_1)$, $T(f_2)$, $T(f_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3. Écrire la matrice B de T dans cette nouvelle base.
4. (Difficile) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}. Quelle relation relie A, B, P et P^{-1} ?

Exercice 5: Endomorphisme de carré nul

Soit φ une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même telle que $\varphi \neq 0$ et $\varphi^2 = 0$.

1. Construire des exemples de telles applications.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(x) \neq 0$. Montrer que $\{x, \varphi(x)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer la matrice de φ dans cette base.

Exercice 6: Matrice à paramètres

Soit M la matrice : $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\,4}(\mathbb{R})$. Déterminer pour quelles valeurs de α et de β l'application linéaire qui lui est associée est surjective.

Exercice 7: Base du noyau et de l'image

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$

et f et f les applications linéaires associées.

1) Déterminer la dimension et une base de $Ker(f)$ et $Ker(f)$.

2) En déduire rg(A) et rg(B).

3) Déterminer une base de l'image pour f et f.