Université de Paris 7 **Second semestre**
L1 INFO – 2013 **Semaine 1**

TD1 : Révisions

Exercice 1: Configuations de droites et de plans vectoriels dans l'espace usuel.

a) On se donne trois droites de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine. Décrire toutes les « configurations » possibles de ces trois droites.

b) On se donne trois plans de $\mathbb{R}^3$. Décrire les configurations possibles avec ces trois plans.

c) Même chose avec deux droites et un plan, puis avec deux plans et une droite.

Exercice 2: Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

On dit que $F \subseteq \mathbb{R}^3$ est un *sous-espace vectoriel* de $\mathrm{I\!R}^3$ s'il est non vide et s'il vérifie les deux conditions suivantes.

1) Il est stable par multiplication par les scalaires.

2) Il est stable par addition.

a) Montrer que le vecteur nul appartient à F.

b) Donner des exemples de tels sous-espaces. Commencer par les sous-espaces de coordonnées (voir exercice suivant).

c) Décrire les différents « types » de sous-espaces vectoriels de $\mathrm{I\!R}^3$.

d) Vérifier alors que les sous-espaces de $\mathrm{I\!R}^3$ se répartissent en quatre familles.

e) À quelle condition la réunion de deux sous-espaces vectoriels est-elle un sous-espace vectoriel ?

f) On suppose que la réunion des sous-espaces $F_1; F_2; :::; F_n$ est égale à $\mathbb{R}^3$. Que peut-on dire alors ?

g) On suppose que la famille des sous-espaces vectoriels $(F_i)_{i=1,\dots,n}$ de $\mathrm{I\!R}^3$ est strictement croissante. Qu'est-ce que cela peut bien signifier ? Que peut-on dire alors de n ?

Exercice 3: Sous-espaces de coordonnées.

Les axes de coordonnées Ox, Oy et Oz et les plans de coordonnées xOy, xOz et yOz sont des sous-espaces vectoriels manifestes de $\mathrm{I\!R}^3$. Le sous-espace vectoriel $\{0\}$ et l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier seront considérés aussi comme des sous-espaces de coordonnées (triviaux).

1) Donner des équations et des générateurs des sous-espaces de coordonnées.

2) Généraliser à $\mathrm{I\!R}^4$. Les sous-espaces de coordonnées de $\mathrm{I\!R}^4$ tels que $Oxyz$ ou $Oxyt$ sont appelés *hyperplans de coordonnées de* $\mathrm{I\!R}^4$. Quel en est le nombre ?

3) Soit Π un plan quelconque passant par l'origine. Déterminer l'intersection de Π avec les différents axes et les différents plans de coordonnées.

3) Donner des équations et des générateurs des seize sous-espaces de coordonnées de $\mathrm{I\!R}^4$.

4) Généraliser à $\mathrm{I\!R}^n$. Donner en particulier le nombre des « p-sous-espaces de coordonnées ».

Exercice 4: Sous-espace vectoriel engendré par...

Soit A une partie quelconque de R^3. On note $< A >$ le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathrm{I\!R}^3$ contenant A et on l'appelle le sous-espace vectoriel de $\mathrm{I\!R}^3$ *engendré par la partie* A.

1) Déterminer $< \Delta >$, où Δ est une droite affine de $\mathrm{I\!R}^3$, c'est-à-dire une droite ne passant pas obligatoirement par l'origine.

2) Déterminer $< \Pi >$, où Π est un plan affine de $\mathrm{I\!R}^3$, c'est-à-dire un plan ne passant pas obligatoirement par l'origine.

3) Déterminer $< (C) >$, où (C) est un cercle quelconque plongé dans $\mathbb{R}^3$.
4) Déterminer <A>, quand A est formé de quatre vecteurs.

Exercice 5: L'espace vectoriel des fonctions polynômes réelles.
1) Vérifier que l'on peut ajouter deux fonctions polynômes et multiplier une fonction polynôme par un scalaire.
2) Étendre la notion de sous-espace vectoriel et de sous-espace vectoriel engendré par une partie A à l'espace des fonctions polynomiales. Peut-on introduire raisonnablement ici une notion naturelle de sous-espaces de coordonnées ?
3) Déterminer le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions polynômes de degré deux.
4) Idem pour les fonctions polynomiales de la forme $f(x) = x^2 + ax + b$.
5) Tenter un dessin de la situation.

Exercice 6: Des systèmes linéaires très particuliers.
1) Résoudre l'équation $x + 2y - 5z + 0t = 1$.
2) Résoudre de système linéaire

$$x + 0y + 2z - t = 1 \quad x + 2y - 5z + 0t = 1:$$

Exercice 7: Formes linéaires.
On dit qu'une application $f = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une *forme linéaire* si pour tous v et w dans $\mathbb{R}^3$ et dans $\mathbb{R}$, on a

$$f(v + \ w) = f(v) + \ f(w):$$

1) Vérifier que lécriture $f(x;y;z) = x + 2y - 5z$ définit une forme linéaire.
2) Que faut-il demander pour que la fonction

$$f(x;y;z) = \ \sin(xyz) + \ xy^2z - \ xyz + \ x^2 + \ y + \ z +$$

soit une forme linéaire.
3) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. L'application f est-elle surjective ? Est-elle injective ? Montrer que l'ensemble des vecteurs $v \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(v) = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Décrire alors l'ensemble des vecteurs $w \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(w) = 1$ et l'ensemble des vecteurs $u \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(u) = 3{=}2$.
4) Montrer que toute forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique comme *combinaison linéaire* des formes linéaires $c_1 : (x;y;z) \mapsto x$, $c_2 : (x;y;z) \mapsto y$ et $c_3 : (x;y;z) \mapsto z$. Déterminer les coefficients de la combinaison en fonction de f et des vecteurs de la base canonique $(e_1;e_2;e_3)$, où $e_1 = (1;0;0)$, $e_2 = (1;0;0)$ et $e_3 = (0;0;1)$.
5) Que faut-il demander pour que le produit de deux formes linéaires soit une forme linéaire ?
6) Vérifier que l'écriture $xx' + 2yy' - 3zz'$ est une « forme bilinéaire », en un sens à préciser.

Exercice 8: Le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
On considère l'ensemble des nombres réels de la forme $a+b\sqrt{2}$, où a et b sont quelconques dans le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. On considère de même $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. On laisse à l'éudiant le soin de définir la notion d'*isomorphisme de deux structures.*
1) Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est à la fois un corps et un espace vectoriel sur Q.
2) Est-ce que les espaces vectoriels $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et $Q(\sqrt{3})$ sont isomorphes ?
3) Est-ce que les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et $Q(\sqrt{3})$ sont isomorphes ?