TD5 : Indépendance linéaire, bases, dimension

Exercice 1: Exemples et contre-exemples

Les espaces suivants sont-ils des espaces vectoriels ? Si oui, donner leur dimension.

1) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } 2x - y + 3z = 0\}$.
2) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } x^2 - y^2 = 0\}$.
3) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } e^x e^y = 1\}$.
4) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } z(x - y) = 0\}$.

Exercice 2: Recherche de bases

Soit $\vec{u} = (1, -1, 1)$, $\vec{v} = (0, -1, 2)$ et $\vec{w} = (1, -2, 3)$ dans $\mathbb{R}^3$.

1) Montrer que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est liée.
2) On note F le sous-espace engendré par $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$. Déterminer une base de F.
3) Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$.
   a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   b) Déterminer une base de G.
   c) En déduire que $G = F$.
   d) Déterminer un supplémentaire de F (dans $\mathbb{R}^3$).

Exercice 3: Base de solutions d'un système linéaire

Trouver des bases des espaces vectoriels composés des solutions (dans $\mathbb{R}^4$) des systèmes d'équations linéaires suivants :

1. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 5x & + & 3y & + & 5z & + & 12t & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & + & 5t & = & 0 \\ x & + & 7y & + & 9z & + & 4t & = & 0 \end{array}\right.$;

2. $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 9x & + & 6y & + & 7z & + & 10t & = & 0 \\ 6x & + & 4y & + & 2z & + & 3t & = & 0 \end{array}\right.$.

Exercice 4: Bases et équations de sous-espaces

On considère dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs lignes $e_1 = (1, 0, 1, 0)$, $e_2 = (-1, 1, 1, 1)$, $e_3 = (2, 3, 4, 0)$ ainsi que $f_1 = (-1, 2, -3, 1)$, $f_2 = (-1, 2, 1, 3)$, $f_3 = (-1, 2, 5, -1)$.

On pose $E = Vect(e_1, e_2, e_3)$ et $F = Vect(f_1, f_2, f_3)$.

1) Montrer que $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une famille libre. En déduire $\dim(E)$.
2) Montrer que $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une famille libre. En déduire $\dim(F)$.
3) Trouver quatre réels a, b, c, d tels que $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | a.x + b.y + c.z + d.t = 0\}$.
4) Trouver quatre réels a, b, c, d tels que $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | a.x + b.y + c.z + d.t = 0\}$.
5) Exhiber une base de $E \cap F$. En déduire sa dimension.
6) Extraire une base de $\mathbb{R}^4$ de la famille $\{e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3\}$.

Exercice 5: Encore des bases et des équations

Trouver la dimension, une base et une écriture sous forme d'espace de solutions de certaines équations (comme dans l'exercice 4 questions 1 et 2) pour les espaces vectoriels E, F, puis $E \cap F$ et $E + F$.

1) Dans $\mathbb{R}^3$, $E := Vect((1,2,1),(1,1,-1),(1,3,3))$ et $F := Vect((1,2,2),(2,5,-1),(1,3,-3))$.

2) Dans $\mathbb{R}^3$, $E := Vect((1,2,1),(1,1,-1),(1,3,3))$ et $F := Vect((1,2,2),(2,3,-1),(1,3,-3))$.

3) (difficile) Dans $\mathbb{R}^5$, $E := Vect((-1,6,4,7,-2),(2,3,0,5,-2),(-3,6,5,6,-5))$ et $F := Vect((1,1,2,1,-1),(0,-2,0,-1,-5),(2,0,2,1,-3))$.

Exercice 6: Suites récurrentes

Soit E l'ensemble des suites réelles $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n.$$

1) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2) En utilisant le fait qu'une suite $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ dans E est entièrement déterminée par u_0 et u_1, montrer que $\dim(E) \leqslant 2$.

3) Déterminer les suites de la forme $u_n = a^n$ (avec $a \in \mathbb{R}$) qui appartiennent à E.

4) Donner une expression de la suite $\{u_n\}_{n\geqslant 0}$ dans E telle que $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$.

Exercice 7: Indépendance linéaire des exponentielles

Soient $a_1, ..., a_n$ des nombres réels deux à deux distincts (on pourra les supposer ordonnés). Montrer que les fonctions $x \mapsto e^{a_1 x}, \ldots, x \mapsto e^{a_n x}$ forment une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$. (Indication : faire le cas $n = 2$ en utilisant les valeurs des limites en $+\infty$ et $-\infty$ d'une fonction exponentielle $x \mapsto e^{ax}$, puis faire le cas général par récurrence).

Exercice 8: Sous-espaces de matrices

On note M_n l'espace des matrices carrées de taille n à coefficients réels.

On note S_n le sous-ensemble des matrices symétriques, i.e. l'ensemble des matrices $A \in M_n$ telles que ${}^tA = A$.

On note A_n le sous-ensemble des matrices antisymétriques, i.e. telles que ${}^tA = -A$.

Enfin on note T_n le sous-ensemble des matrices triangulaires supérieures i.e. telles que le coefficient $a_{i,j}$ de A est nul pour tout $i > j$.

1) Vérifier que S_n, A_n et T_n sont des sous-espaces vectoriels de M_n.

2) Calculer les dimensions de M_n, S_n, A_n et T_n.

3) Calculer la dimension de la somme et de l'intersection de deux de ces sous-espaces.

Exercice 9: Intersection et somme

Soient U, V, W des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

1) Montrer que si $\dim U + \dim V > \dim E$ alors $U \cap V \neq \{0\}$.

2) A-t-on toujours $U \cap (V + W) = (U \cap V) + (U \cap W)$?

3) Montrez que $(U + W) \cap (V + W) \cap (V + U) = ((W + V) \cap U) + ((V + U) \cap W)$.