

Feuille d'exercices n°3 :

Calculs de limites, développements limités et applications

On rappelle que \log ou \ln désigne (en mathématiques) le logarithme neperien .

Exercice 1 Soit $f(x) = \operatorname{Arctg} x^2$. Calculer $f^{(n)}(0)$.

Exercice 2 Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{|x|} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$;
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1}$;
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - 3x^3}{x^4 - x^5}$;
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \cos x)$;
5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 1}$;
6. $\lim_{x \rightarrow +2+} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2 - 4}$;
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - a\sqrt{1+x}}{x^3}$, où $a \in \mathbb{R}$;
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)^3}{x \sin^2 x}$;
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \sin x}{x^3}$.

Exercice 3 Soit a un paramètre réel. Etudier la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + a} - x \right)$.

Exercice 4 Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$ a-t-on la formule :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + ax^2 + 1} \right) = 0?$$

Exercice 5 Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{(e^x - 1)^2}$;
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x^2} - 1}{\log \cos x}$;
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x+1} \log \left(1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \right)$.

Exercice 6 Trouver un développement limité (D. L.) au voisinage de zéro à l'ordre précisé pour chacune des fonctions suivantes :

1. $\operatorname{tg}^2 x$ à l'ordre 7 ;
2. $\frac{x}{\sin x}$ à l'ordre 7 ;
3. $\frac{1}{\cos x}$ à l'ordre 7 ;
4. $\left(\frac{x}{\sin x} \right)^2$ à l'ordre 7 ;

