Université de Paris 7 — **Second semestre**
L1 INFO – 2013 — **Semaine 4**

TD4 : Espaces vectoriels

Exercice 1: Sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendrés par deux vecteurs

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $\vec{a} = (1,2,1)$, $\vec{b} = (1,3,2)$, $\vec{c} = (1,1,0)$, $\vec{d} = (3,8,5)$.
Soient $F = \mathrm{Vect}(\vec{a},\vec{b})$ et $G = \mathrm{Vect}(\vec{c},\vec{d})$. Montrer que $F = G$.

Exercice 2: Formes possibles

Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $\vec{e}_1 = (1,2,3,4)$ et $\vec{e}_2 = (1,-2,3,-4)$. Peut-on trouver deux réells x et y tels que $(x,1,y,1)$ soit dans $Vect(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$? Et tels que $(x,1,1,y)$ soit dans $Vect(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$?

Exercice 3: Somme de sous-espaces

Soient F, G, H trois sous-espaces d'un espace vectoriel E.
Montrer que $F \cap (G + (F \cap H)) = (F \cap G) + (F \cap H)$.

Exercice 4: Intersection commune

Soient F, G, F', G' des sous-espaces d'un espace vectoriel E.
Montrer que si $F \cap G = F' \cap G'$ alors $(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F$.

Exercice 5: Vrai ou faux ?

Soient $v_1 = (0,1,-2,1), v_2 = (1,0,2,-1), v_3 = (3,2,2,-1), v_4 = (0,0,1,0)$ et $v_5 = (0,0,0,1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathrm{Vect}\{(1,1,0,0), (-1,1,-4,2)\}$.
2. $(1,1,0,0) \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\} \cap \mathrm{Vect}\{v_2, v_3, v_4\}$.
3. $\dim(\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\} \cap \mathrm{Vect}\{v_2, v_3, v_4\}) = 1$ (c'est-à-dire c'est une droite vectorielle).
4. $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2\} + \mathrm{Vect}\{v_2, v_3, v_4\} = \mathbb{R}^4$.
5. $\mathrm{Vect}\{v_4, v_5\}$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 6: Des polynômes

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$. On définit

$$E_a = \{P \in E; (X-a)/P\}$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, E_a est un sous-espace vectoriel de E.

2) Montrer que si $a \neq b$, alors il existe un couple de réels (c, d) tels que $1 = c(X-a) + d(X-b)$.

3) En déduire que $E = E_a + E_b$.

4) Cette somme est-elle directe ?

Exercice 7: Des suites

On rappelle que $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ converge }\}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont des sous-espaces de E et qu'ils sont supplémentaires dans E.