

## TD11 : Changements de variables et fractions rationnelles

### Exercice 1: Calculs d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes : (des indications sont données en-dessous)

1.  $\int_0^x \tan^2(t) dt$ ;
2.  $\int_3^x \frac{1}{t \ln(t)} dt$ ;
3.  $\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt$ ;
4.  $\int_0^x \arcsin(t) dt$ ;
5.  $\int_0^x \frac{1}{3+e^{-t}} dt$ ;
6.  $\int_1^x \frac{-1}{\sqrt{4t-t^2}} dt$ ;
7.  $\int_1^x \frac{1}{t \sqrt{1-\ln^2(t)}} dt$ ;
8.  $\int_0^x \cos(t) e^t dt$ ;
9.  $\int_0^x \sin^2(t) \cos^3(t) dt$ ;

Indications : 2)  $u = \ln(t)$ , 3)  $u = \sqrt{t+1}$  ou IPP, 4) IPP, 5)  $u = e^t$ , 6)  $u = \frac{t}{2} - 1$ ,  
7)  $u = \ln(t)$ , 8) deux IPP, 9) linéariser à l'aide des formules trigonométriques du TD 10.

### Exercice 2: Symétries et changement de variables

1) (Préliminaires) Soient  $p$  une fonction paire et  $i$  une fonction impaire définies et continues sur l'intervalle  $[-c; c]$ .

Montrer que  $\int_{-c}^c p(x) dx = 2 \int_0^c p(x) dx$  et  $\int_{-c}^c i(x) dx = 0$ . On pourra utiliser le changement de variable  $y = -x$ .

2) Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$  telle que  $\forall x \in [a; b]; f(a+b-x) = f(x)$ .

Montrer que  $\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$  à l'aide d'un changement de variable approprié.

3) Dédurre de la question précédente la valeur de  $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2(x)} dx$ .

### Exercice 3: Calcul d'une primitive

Le but de cet exercice est de déterminer une primitive de la fonction  $\frac{1}{\sin(u)}$ .

1) Montrer que  $\forall x \in ]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[; \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{1}{\sin(u)} du = \int_0^{\cos x} \frac{1}{y^2-1} dy$ .

2) Trouver une primitive de  $\frac{1}{y^2-1}$  à l'aide d'une décomposition en éléments simples.

3) En déduire que  $F : x \mapsto \ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$  est une primitive de  $u \mapsto \frac{1}{\sin(u)}$ .

4) À l'aide des formules trigonométriques de duplication, montrer que  $F(x) = \ln(\tan(\frac{x}{2}))$ .