Université Paris-Diderot – L2 d'informatique 2012-2013
Algèbre et Analyse élémentaires II (MI2)

Partiel du 2 mars 2013

Durée : 3 heures

Sans documents, à l'exception d'une feuille A4 recto-verso manuscrite.

Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1 (Un système à paramètre)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Mettre le système suivant sous forme matricielle puis déterminer l'ensemble de ses solutions dans $\mathbb{R}^3$. On discutera suivant la valeur du paramètre a.

$$\begin{cases} (1+a)x + y + z = 0 \\ x + (1+a)y + z = 0 \\ x + y + (1+a)z = 0 \end{cases}$$

Appelons S_a le système linéaire de l'énoncé, qui dépend du paramètre $a \in \mathbb{R}$, et SM_a sa forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+a \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1+a & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+a \\ 0 & a & -a \\ 0 & -a & -2a-a^2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (1+a)L_1 \end{matrix}$$

Supposons $a \neq 0$. Dans ce cas on a :

$$SM_a \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -a & -2a-a^2 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow \tfrac{1}{a} L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3a-a^2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + aL_2$$

Supposons $-a^2 - 3a \neq 0$, i.e. $a \neq -3$. Dans ce cas on a :

$$SM_a \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow \tfrac{1}{-a(a+3)} L_3$$

Ainsi, si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$, alors S_a a une unique solution $(x,y,z) = (0,0,0)$.
Regardons maintenant les cas restants :
$S_0 \Leftrightarrow x + y + z = 0$ en supprimant L_2 et L_3 qui sont équivalentes à la tautologie $(0 = 0)$.
L'ensemble des solutions de S_0 est donc infini et vaut $\{(-y-z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$.

Ensuite $SM_{-3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ en supprimant L_3 qui équivaut à la tautologie $(0 = 0)$.

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ par l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$.

On a donc $S_{-3} \Leftrightarrow (x = z$ et $y = z)$
L'ensemble des solutions de S_{-3} est donc infini et vaut $\{(z,z,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 2 (Trace et déterminant pour les matrices 2x2.)

On se place dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices réelles 2×2.

Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *on pose :* $\det A = ad - bc$ *et* $\mathrm{tr}(A) = a + d$.

1. *Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, pour tout $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a $\det AB = \det A \times \det B$.*

   On prend $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. On a alors $AB = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}$, de sorte que $\det(AB) = (ax+bz)(cy+dt) - (cx+dz)(ay+bt) = adxt + bcyz - adyz - cxbt = (ad-bc)(xt-yz)$.

2. *Soit* $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *telle que* $M^3 = \mathrm{I}_2$. *Montrer que* $\det(M) = 1$.
On a $1 = \det(\mathrm{I}_2) = \det(M^3) = \det(M)^3$. Le nombre réel $\det(M)$ vérifie donc l'équation $0 = x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$. Il vaut donc 1.

3. *Soit* $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. *Montrer que* $M^2 - \operatorname{tr}(M)M + \det(M)\,\mathrm{I}_2 = 0$.
C'est un calcul direct, déjà fait en TD.

4. *On suppose dorénavant que* $M^3 = \mathrm{I}_2$.

a. *Montrer que* $\left(\operatorname{tr}(M)^2 - 1\right) M = \left(\operatorname{tr}(M) + 1\right) \mathrm{I}_2$ *(*)*
D'après les questions 2) et 3), on a $M^2 = \operatorname{tr}(M)M - \mathrm{I}_2$, qui donne après multiplication par M, $\mathrm{I}_2 = M^3 = \operatorname{tr}(M)M^2 - M = \operatorname{tr}(M)\left(\operatorname{tr}(M)M - \mathrm{I}_2\right) - M$. L'égalité demandée par l'énoncé résulte dès lors par développement et factorisation.

b. *Montrer que si* $\operatorname{tr}(M) \neq -1$, *alors* $M = \mathrm{I}_2$.
Si $\operatorname{tr}(M) \neq -1$, on simplifie par $\operatorname{tr}(M)+1$ (non nul) dans l'égalité (*). On obtient alors $\left(\operatorname{tr}(M) - 1\right) M = \mathrm{I}_2$. La matrice M ne peut être donc de trace 1 et est par conséquent scalaire (réelle), de cube égal à I_2 : c'est donc l'identité.

c. *Montrer que l'ensemble des matrices de* $M(2,\mathbb{R})$ *telles que* $M^3 = \mathrm{I}_2$ *est formé de la matrice identité et de l'ensemble des matrices de déterminant* 1 *et de trace* -1.
Il s'agit d'établir par double inclusion que

$$\{M \mid \det(M) = 1 \text{ et } \operatorname{tr}(M) = -1\} \cup \{\mathrm{I}_2\} = \{M \mid M^3 = \mathrm{I}_2\}.$$

Si M est de déterminant 1 et de trace -1, elle vérifie d'après 3), $M^2 + M + \mathrm{I}_2 = 0$, ce qui prouve par multiplication par $M - \mathrm{I}_2$ que $M^3 = \mathrm{I}_2$. On a donc clairement l'inclusion directe.
Si $M^3 = \mathrm{I}_2$ et $\operatorname{tr}(M) \neq -1$, on a vu en b) que $M = \mathrm{I}_2$. Cela établit l'inclusion inverse.

Exercice 3 (Fonctions paires et impaires.)

On considère E *l'espace vectoriel des fonctions réelles (de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*).*
Soit $\mathcal{P}$ *l'ensemble des fonctions réelles paires :* $\mathcal{P} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$.
Soit $\mathcal{I}$ *l'ensemble des fonctions réelles impaires :* $\mathcal{I} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\}$.

1. *Montrer que* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{I}$ *sont des sous-espaces vectoriels de* E.
$\mathcal{P}$ est un sous-ensemble de E. De plus la fonction nulle est paire donc appartient à $\mathcal{P}$.
Soit maintenant λ, $\mu \in \mathbb{R}$ et f, $g \in \mathcal{P}$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$(\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x)$.
On a donc $\lambda f + \mu g \in \mathcal{P}$. On conclut que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de E.
De même, $\mathcal{I}$ est un sous-ensemble de E qui contient la fonction nulle et pour tout λ, $\mu \in \mathbb{R}$, f, $g \in \mathcal{I}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
$(\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(-x) + \mu g(-x) = \lambda(-f(x)) + \mu(-g(x)) = -(\lambda f + \mu g)(x)$,
ce qui montre que $\mathcal{I}$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. *Soit* $f \in E$. *Trouver deux fonctions* $g \in \mathcal{P}$ *et* $h \in \mathcal{I}$ *telles que* $f = g + h$.
On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g(x) = \frac{(f(x)+f(-x))}{2}$ et $h(x) = \frac{(f(x)-f(-x))}{2}$. g est paire, h est impaire et on a bien $f = g + h$.
En déduire que $E = \mathcal{P} + \mathcal{I}$.
$\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de E donc leur somme $\mathcal{P} + \mathcal{I}$ est un sous-espace vectoriel de E. De plus on vient de montrer que tout élément de E se décompose en somme d'un élément de $\mathcal{P}$ et d'un élément de $\mathcal{I}$, d'où $E = \mathcal{P} + \mathcal{I}$.

3. *Montrer que* $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.
Comme $E = \mathcal{P} + \mathcal{I}$ il suffit de montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$. Soit $f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(-x) = f(x)$ et $f(-x) = -f(x)$ d'où $f(x) = -f(x)$, ou encore $2f(x) = 0$.Comme $f(x) \in \mathbb{R}$, on en déduit que $f(x) = 0$. Ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc f est la fonction nulle.

4. *On considère les fonctions* $s(x) = \sin x$ *et* $p(x) = 3x^3 - 2x^2 + 1$.

a. *Montrer que ces deux fonctions forment une famille libre de* E.
Soit λ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda s + \mu p = 0$. En évaluant cette fonction en 0 on obtient : $\lambda s(0) + \mu p(0) = 0$ c'est-à-dire $\lambda \times 0 + \mu \times 1 = 0$ et donc $\mu = 0$. Par suite $\lambda s = 0$ et en évaluant en $\frac{\pi}{2}$ on obtient $\lambda = 0$. On en déduit que la famille (s, p) est libre dans E.

b. *Donner la décomposition de chacune de ces deux fonctions suivant la somme directe $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.*
La fonction sinus est impaire donc $s = 0 + s$ est la décomposition demandée.
Un monôme de degré pair est une fonction paire et un monôme de degré impair est une fonction impaire donc en posant $g(x) = -2x^2$ et $h(x) = 3x^3 + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p = g + h$ est la décomposition demandée.

5. *On considère l'application $\Phi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(f) = f(0)$.*

a. *Montrer que Φ est linéaire.*
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{P}$. Alors on a :
$\Phi(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = \lambda\Phi(f) + \mu\Phi(g)$. On conclut que Φ est linéaire.

b. *Montrer que $\mathcal{I} \subset \mathrm{Ker}(\Phi)$.*
Soit $f \in \mathcal{I}$. Alors $f(-0) = -f(0)$. Par ailleurs $-0 = 0$ donc $f(-0) = f(0)$. On a ainsi $f(0) = -f(0)$ ou encore $2f(0) = 0$ ce qui implique que $f(0) = 0$.

c. *Montrer que Φ est surjective.*
Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère f_a la fonction constante de valeur a ($\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a(x) = a$). f_a est bien un élément de E et on a $\Phi(f_a) = f_a(0) = a$. Ainsi on a montré que tout élément de $\mathbb{R}$ a (au moins) un antécédent par Φ, donc Φ est surjective.

d. *Φ est-elle injective ?*
La fonction sinus appartient au noyau de Φ et n'est pas la fonction nulle donc Φ n'est pas injective.

Exercice 4 (Une matrice de rang 2.) *On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}.$$

1. *A l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes, mettre A sous forme échelonnée réduite. La matrice A est-elle inversible ?*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & -36 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 13L_1 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & -36 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{-4}L_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 8L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 12L_2 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

La forme échelonné réduite de A a au moins une ligne de zéros, donc A n'est pas inversible.

2. *Soit f_A l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par A dans la base canonique $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$ de l'espace $\mathbb{R}^4$.*

a. *Caractériser $\mathrm{Ker}(f_A)$ par des équations et en donner une base.*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f_A) \Leftrightarrow A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$, \quad \begin{aligned} x \quad z \quad 2t &= 0 \\ y + 2z + 3t &= 0 \end{aligned} \quad , \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + 2t \\ 2z \quad 3t \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc Ker(