Université Paris Diderot
Département de Sciences Exactes

MI2 – Année 2010/11
L2 Info

Feuille d'exercices n

4. Lorsque $|a| \neq 2$, montrer que les solutions sont bornées.
5. Lorsque $|a| = 2$, montrer que les solutions ne sont pas bornées.

Exercice 8 Résoudre les équations différentielles suivante

1. $y" - 2y' + y = \operatorname{ch} x$; puis $y" - 3y' + 2y = t \operatorname{sh} x$
2. $y" - 2y' + ay = \cos x$ (où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre)
3. $y" + y = x \sin x$; puis $y" + y = \cos^3 x$.

Exercice 9 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), on note E_d l'ensemble des fonctions de la forme $y(x) = P(x) \exp(\alpha x)$ avec $P(x)$ polynôme de degré $\leqslant d$.

1. Vérifier que E_d est un espace vectoriel de dimension $d + 1$.
2. Pour toute fonction y deux fois dérivable, on pose $L(y) = y" + ay' + by$. Vérifier que L est une application linéaire de E_d vers E_d
3. Soit $F = \operatorname{Ker} L$ où $L : E_{\rightarrow} E_d$; montrer que $F = \{0\}$ (resp. $\dim F = 1$, resp. $dimF = 2$) lorsque α n'est pas racine de $X^2 + aX + b$ (resp. est racine simple, resp. est racine double).
4. En déduire que l'image de $L : E_{\rightarrow} E_d$ est E_d (resp. E_{d-1}, resp. E_{d-2}) lorsque α n'est pas racine de $X^2 + aX + b$ (resp. est racine simple, resp. est racine double).

Application : Utiliser l'observation qu'il existe une solution de la forme $(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)e^x$ à l'équation différentielle $y" - 2y' + y = xe^x$ pour résoudre celle-ci.

Exercice 10 On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2 y" + xy' - y = 0 \tag{3}$$

1. L'équation (3) est-elle linéaire ?
2. On se place sur l'intervalle $]0, +\infty)$. Effectuer le changement de variables $x = e^t$ (ou encore $t = \log x$) en introduisant la fonction $z(t) = y(e^t)$ et montrer que z vérifie une équation linéaire du second ordre à coefficients constants.
3. Trouver les solutions de l'équation différentielle que vérifie $z(t)$ et en déduire une description des solutions de (3).

Exercice 11 On veut étudier les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$yy' = xy^2 + 1. \tag{4}$$

1. L'équation (4) est-elle linéaire ?
2. Montrer que la fonction $z(x) := y(x)^2$ vérifie une équation linéaire du premier ordre.
3. Trouver les solutions de l'équation différentielle que vérifie $z(x)$ et en déduire une description des solutions de (4).