Université Paris Diderot
Département de Sciences Exactes

MI2 – Année 2010/11
L2 Info

Feuille d'exercices n°4 :

Intégrales : propriétés et calculs de primitives

Exercice 1 Calculer la limite de la suite suivante (pour $a, b > 0$:

$$u_n := \frac{1}{na} + \frac{1}{na+b} + \frac{1}{na+2b} + \cdots + \frac{1}{na+(n-1)b} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{na+kb}$$

Exercice 2 *On rappelle que* log *ou* ln *désigne (en mathématiques) le logarithme neperien, c'est-à-dire la fonction définie, pour* $x > 0$ *par la formule :*

$$\log x := \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

En utilisant les propriétés de l'intégrale montrer les propriétés suivantes du logarithme.

1. La fonction logarithme est croissante.
2. Si $x \geqslant 1$ (resp. si $0 < x \leqslant 1$) alors $\log x \geqslant 0$ (resp. $\log x \leqslant 0$).
3. Utiliser (en les démontrant) les inégalités suivantes pour démontrer que $\frac{n}{2} \leqslant \log(2^n) \leqslant n$:

$$\frac{1}{2} = \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{dt}{2^{k+1}} \leqslant \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{dt}{t} \leqslant \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{dt}{2^k} = 1$$

4. En se souvenant que $\log(x^{-1}) = -\log x$, en déduire

$$\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty; \qquad \lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty; \qquad \lim_{x\to 0^+} x \log x = 0.$$

Exercice 3 Résoudre cet exercice en utilisant le minimum de calcul.

1. Calculer la valeur des intégrales

$$I_1 := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x(3+\sin^2 x)}{\cos^2 x + \cos x + 1} dx; \quad I_2 := \int_{-1}^{+1} x e^{x^2} dx$$

2. Justifier les majorations suivantes

$$\left| \int_0^1 \frac{\sin t}{1+t^2} dt \right| \leqslant \frac{\pi}{4}; \qquad 0 \leqslant \int_1^2 e^{-x^2} dx \leqslant e^2 - e.$$

3. Calculer l'intégrale $\int_0^1 x e^x dx$ et en déduire la majoration (où m est un réel) :

$$\left| \int_0^1 \frac{x \sin(mx) e^x}{\sqrt{1+x^4}} dx \right| \leqslant 1.$$

4. Montrer que

$$\int_{-1}^{1} x^2 \cos^2 x e^{-x^2} dx \leqslant \int_{-2}^{2} x^2 \cos^2 x e^{-x^2} dx \leqslant 2 \int_0^2 x^2 dx = \frac{16}{3}.$$

Exercice 4 Calculer les primitives des fonctions suivantes

1. $x^4 - 6x^3 + 2$
2. $\mathrm{Arctg}(x)$

3. $\mathrm{tg}(x)$
4. $\frac{1}{\sin(x)}$
5. $\sqrt[5]{2x+1}$

Exercice 5 Calculer les primitives des fonctions suivantes à l'aide d'intégrations par parties

1. $x^2 e^{-x}$
2. $(x^3 - 2x + 3)e^{-2x}$
3. $\log(1 + x^2)$
4. $\mathrm{ch}(x)\cos(x)$

Exercice 6 Calculer les primitives des fonctions suivantes (pour certaines un changement de variables est suggéré entre parenthèse)

1. $x(2x+1)^7$
2. $\frac{1}{e^x+1}$
3. $\frac{x}{\sqrt{x+1}}$
4. $\frac{1}{x \log^m x}$

Exercice 7 Calculer les intégrales suivantes

1. $\int_0^1 \log x := \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 \log x dx$.
2. $\int_0^\infty e^{-x}\cos(x)dx = \lim_{X \to +\infty} \int_0^X e^{-x}\cos(x)dx$

Exercice 8 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et f une fonction continue,

1. Montrer que la fonction $G(x) := \int_0^{g(x)} f(t)dt$ est dérivable et admet pour dérivée $G'(x) = g'(x)f(g(x))$.
2. On définit la fonction
$$F(x) = \int_0^{\sin^2(x)} \mathrm{Arcsin}(\sqrt{t})dt + \int_0^{\cos^2(x)} \mathrm{Arcos}(\sqrt{t})dt$$
Déterminer son domaine de définition, une période et sa parité.
3. Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée.
4. Calculer $F(0)$ (on pourra effectuer le changement de variable $u = \mathrm{Arcos}(\sqrt{t})$). En déduire la valeur de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 Calculer la valeur de l'intégrale
$$I_1 := \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{\left(2 - \sin^2(t)\right)^2} dt$$
(indication : on pourra utiliser le changement de variable $x = \cos(t)$).

On définit maintenant les intégrales :
$$I_n := \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n(t)}{\left(2 - \sin^2(t)\right)^2} dt.$$
Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a :
$$I_{n+1} \leqslant I_n.$$

Exercice 10 On se propose de calculer une primitive de
$$f(x) = \frac{(\cos(x)+1)^3}{\sin(x)(2+\sin(x))(\cos(x)+\sin(x)+1)^2}$$

1. Effectuer un changement de variables ramenant le calcul d'une primitive de f au calcul d'une primitive de fonction rationnelle.
2. Décomposer la fraction rationnelle obtenue en éléments simples.
3. Calculer une primitive de $(t^2 + t + 1)^{-1}$.
4. En déduire une primitive de f.

Exercice 11

1. Effectuer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle suivante :

$$f(t) = \frac{5}{(t-2)(t-1)^2(t^2+1)}$$

2. En déduire une primitive de f.

Exercice 12 On définit l'intégrale suivante

$$J(X) := \int_0^X \sqrt{\frac{t}{t+1}} \frac{dt}{(2t^2+2t+1)}.$$

1. Factoriser sur $\mathbb{R}$ le polynôme $X^4 + 1$.
2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :

$$f(X) = \frac{X^2}{X^4+1}$$

3. En déduire une primitive de f.
4. A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{\frac{t}{t+1}}$ calculer $J(X)$ et $\lim_{X \to \infty} J(X)$.