Université de Paris 7 — Second semestre
L1 INFO – 2013 — Semaine 12

TD12 : Fractions rationnelles et équations différentielles

1 Décomposition en éléments simples

Exercice 1: Termes de degré 1 et logarithmes

1) Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ fixés. Calculer les dérivées des fonctions $x \mapsto \ln(|ax+b|)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{(ax+b)^n}$.

2) En déduire des primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{4x-3}$ et de $\dfrac{1}{(2x+1)^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

3) Via une décomposition en éléments simples, trouver une primitive de $\dfrac{1}{(4x-3)(2x+1)^3}$.

Exercice 2: Termes simples de degré 2 et arctangente

1) Soient $b, c \in \mathbb{R}$ tels que $b^2 - 4c < 0$. Montrer que $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} \arctan\left(\dfrac{x + \frac{b}{2}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}}\right)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+bx+c}$.

2) En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ quand $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$ sont tels que $aX^2 + bX + c$ est un polynôme sans racines réelles.

3) Calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$, puis une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+x+1}$.

4) En déduire (via une décomposition en éléments simples) une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^3-1}$.

Exercice 3: Termes multiples de degré 2 et formules de récurrence

1) À l'aide de la formule d'intégration par parties, montrer que

$$\int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{x}{x^2+1} + \int_0^x \frac{2t^2}{(t^2+1)^2}\,dt.$$

2) En déduire que

$$\int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{x}{2(x^2+1)}.$$

3) D'une manière similaire, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^{n+1}}\,dt = \frac{2n-1}{2n}\int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt + \frac{x}{2n(x^2+1)^n}.$$

4) Calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{3x^3+5}{(x^2+1)^2}$.

5) (Plus difficile) Soient $b, c \in \mathbb{R}$ tels que $b^2 - 4c < 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^x \frac{1}{(t^2+bt+c)^{n+1}}\,dt = \frac{4n-2}{n(4c-b^2)}\int_0^x \frac{1}{(t^2+bt+c)^n}\,dt + \frac{2x+b}{(4c-b^2)n(x^2+bx+c)^n}.$$

2 Équations différentielles linéaires

Exercice 4: Degré 1

Résoudre les équations suivantes

1. $y'(t) + 2ty(t) = e^{t - t^2}$;
2. $y'(t) + y(t) = \sin(t) + 3\sin(2t)$;
3. $y'(t) + \dfrac{1}{\tan(t)}y(t) = \sin(t)$.

Exercice 5: Degré 1 avec discontinuité

Résoudre l'équation différentielle :

$$(1-t^2)y'(t) + ty(t) = \frac{1}{t} + t\ln(t) - t,$$

1. sur les intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$,
2. puis sur $]0,+\infty[$.

Exercice 6: Degré 2

Résoudre les équations suivantes

1. $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = te^{2t}$;
2. $y''(t) - y'(t) + \lambda y(t) = \sin(t)$;
3. $y''(t) - 2y'(t) + \lambda y(t) = e^{2t} + e^{t}\sin(t)$,
4. $y''(t) + \omega^2 y(t) = \sin(t)^3$.