

TD8 : Développements limités

Exercice 1: DL et limites

1) Donner le DL à l'ordre 2 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

$$u(x) = \cos(x) - 1$$

$$v(x) = x \sin(x)$$

$$w(x) = e^x - 2\sqrt{1+x} + 1.$$

2) En déduire les limites quand x tend vers 0 des fonctions

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x \sin(x)} \text{ et } g(x) = \frac{e^x - 2\sqrt{1+x} + 1}{x^2}.$$

Exercice 2: DL et trigonométrie

1) Montrer que $\frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \frac{1}{1 + \cos(x)}.$

2) En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$

Exercice 3: DL ailleurs qu'en 0

Donner un DL à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

$$f(x) = \cos(x) \text{ au voisinage de } x = \frac{\pi}{4}.$$

$$g(x) = x \exp\left(\frac{1}{x}\right) \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty.$$

Exercice 4: DL et composition

On admet le DL suivant : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(1 - X) = -X - \frac{X^2}{2} - \dots - \frac{X^n}{n} + X^n \epsilon(X)$$

avec $\lim_{X \rightarrow 0} \epsilon(X) = 0.$

Donner le DL de $f(x) = \ln(\cos(x))$ en 0 à l'ordre 6.

Exercice 5: Formule de Taylor polynomiale

On rappelle que si P est un polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n et a est un réel, alors (Formule de Taylor polynomiale)

$$P(X) = P(a) + P'(a)(X - a) + \frac{P''(a)}{2!}(X - a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X - a)^n.$$

1) Écrire la formule de Taylor au voisinage de 2 de la fonction polynomiale

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5.$$

2) Écrire le polynôme $P(X) = X^3 + 3X^2 - 2X + 1$ sous la forme d'un polynôme en $(X - 2).$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Écrire le polynôme $P(X) = X^n$ sous la forme d'un polynôme en $(X - 1).$

4) Trouver l'unique polynôme $P(X)$ du second degré tel que $P(3) = 3, P'(3) = 2$ et $P''(3) = 1.$