Université de Paris 7 — **Second semestre**
L1 INFO – 2013 — **Semaine 10**

TD10 : Intégration et primitives

Exercice 1: Calculs de primitives

Dans chaque cas, f est une fonction continue sur l'intervalle I contenant le réel a. Calculer la primitive F de f sur I telle que $F(a) = 0$.

1) $I = \mathbb{R}$, $a = \frac{1}{2}$ et $f(x) = (2x-1)^3$.
2) $I = \mathbb{R}$, $a = \frac{1}{2}$ et $f(x) = \sinh(2x-1)$.
3) $I = \mathbb{R}$, $a = \frac{\pi}{4}$ et $f(x) = \sin(2x)$.
4) $I = \mathbb{R}$, $a = \frac{\pi}{6}$ et $f(x) = \sin(3x)$.
5) $I = \mathbb{R}$, $a = \frac{1}{2}$ et $f(x) = \cosh(2x-1)$.
6) $I = \mathbb{R}$, $a = 0$ et $f(x) = xe^x$.
7) $I = \mathbb{R}$, $a = 0$ et $f(x) = x^2e^x$.
8) $I = \mathbb{R}$, $a = 0$ et $f(x) = x^2\sin(x)$.
9) $I =]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, $a = 0$ et $f(x) = \tan(x)$.
10) $I =]-1;1[$, $a = 0$ et $f(x) = \arcsin(x)$.
11) $I = \mathbb{R}$, $a = 0$ et $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$.

Exercice 2: Formules de trigonométrie

1) Montrer les égalités suivantes, pour x et y des réels :

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$$

2) En déduire la valeur des primitives suivantes :

$$I(x) = \int_0^x \sin(3t)\sin(2t)dt$$

$$J(x) = \int_0^x \sin(3t)\cos(5t)dt$$

Exercice 3: Somme de Riemann

On étudie la fonction $f(x) = x^2$ sur $[0;1]$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2) En déduire que la somme de Riemann $I(f;n)$ vérifie $I(f;n) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{3}$.

On peut donc en déduire que $\int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$, ce qu'on peut aussi calculer grâce à la primitive de $x \mapsto x^2$.

Exercice 4: Une suite d'intégrales

Soit $a_n = \int_0^1 t^n e^t dt$.

1) Calculer a_0, a_1, a_2 et a_3.
2) Trouver une formule de récurrence vérifiée par a_n.
3) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de termes strictement positifs.
4) Avec l'aide des questions précédentes, déterminer la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5: Intégrales de Wallis

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$.

1) Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
2) En déduire les valeurs de I_{2p} et I_{2p+1}.
3) Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de termes strictement positifs.
4) En déduire que $I_n \sim I_{n+1}$.
5) Calculer nI_nI_{n+1}.
6) En déduire un équivalent simple de I_n.