TD2 : Matrices

Exercice 1: Produits de deux matrices

Effectuer tous les produits possibles de deux matrices choisies parmi les quatre suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2: Puissance d'une matrice

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2, A^3 et A^4.
2) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3: Formule de Cayley-Hamilton

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2×2 à coefficients réels ; on définit sa *trace* par $Tr(A) = a + d$ et son *déterminant* par $det(A) = ad - bc$.

1) Vérifier l'équation (théorème de Cayley-Hamilton en dimension deux) :

$$A^2 - Tr(A)A + det(A)I_2 = 0.$$

2) Posons $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$; montrer que pour toute matrice A on a l'égalité :

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = det(A)I_2.$$

3) Montrer que A est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$ et que, dans ce cas :
$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
4) Supposons que $A^2 = 0$ (on dit que A est *nilpotente*), montrer que $Tr(A) = 0$ et $det(A) = 0$.
5) Supposons que $A^2 = A$ (on dit que A est *idempotente*), montrer que $Tr(A) \in \{0, 1, 2\}$.
6) Montrer que pour A et B matrices carrées de taille 2×2 on peut avoir $AB = BA$ mais qu'on a toujours $Tr(AB) = Tr(BA)$.
7) Montrer que pour toutes matrices 2×2 A, B, C, on a l'identité :

$$(AB - BA)^2 C = C(AB - BA)^2.$$

Pour cela, on pourra appliquer la formule de Cayley-Hamilton à la matrice $AB - BA$.

Exercice 4: Quaternions

On note dans cet exercice $\mathbf{1}$ la matrice identité de taille 2×2. On définit également les matrices suivantes à coefficients complexes :

$$I := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad K := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Vérifier les formules $I^2 = J^2 = K^2 = -\mathbf{1}$, $IJ = -JI = K$, $JK = -KJ = I$ et $KI = -IK = J$.
2) Montrer également que, si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, on a $(a\mathbf{1} + bI + cJ + dK)(a\mathbf{1} - bI - cJ - dK) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\mathbf{1}$.
3) En déduire que si la matrice $M = a\mathbf{1} + bI + cJ + dK$ n'est pas nulle, elle est inversible.

Exercice 5: Rotations et réflexions

On rappelle que la *transposée* de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est définie comme $A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Déterminer l'ensemble des matrices A de taille 2×2 à coefficients réels telles que $A^T A = I_2$ (on donnera également une interprétation géométrique des transformations linéaires associées).