Université de Paris 7 | **Second semestre**
L1 INFO – 2013 | **Semaine 3**

TD3 : Opérations élémentaires et systèmes linéaires

Exercice 1: Puissance d'une matrice

Soit A la matrice de $M_2(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$.

a) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}

b) Pour tout entier positif n, on pose $A^{-n} := (A^{-1})^n$. Montrer que pour tout entier *relatif* n, on a $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$.

c) Soit $B \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer que l'on a $AB = BA$ si et seulement s'il existe $b; c \in \mathbb{R}$ tels que $B = \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

d) Supposons qu'il existe $B \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. Montrer que $AB = BA$.

e) Supposons $a > 0$. Combien existe-t-il de matrices $B \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$?

Exercice 2: Matrices élémentaires

Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est produit de deux ou trois matrices élémentaires.

Exercice 3: Inverse d'une matrice à coefficients complexes

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 2-i & i & 1 \\ i & 1 & 1+i \\ 3-i & i & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 4: Calculs d'inverses

Calculer l'inverse de la matrice quand il existe.

a) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 2 & 9 & -11 \end{pmatrix}$

c) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 4 & -10 \end{pmatrix}$

d) Utilisation d'une relation :
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que A vérifie la relation $A^3 - 2A^2 - 5A - 24I_2 = 0$. En déduire que A est inversible et quel est son inverse.

Exercice 5: Matrices nilpotentes

On appelle *nilpotentes* les matrices carrées dont une puissance est nulle.

a) Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer les puissances de N_1. N_1 est-elle inversible ?

b) Soit $a;b;c \in \mathbb{R}$. On pose $N_2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Calculer les puissances de N_2. N_2 est-elle inversible ?

c) Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure est nilpotente si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous nuls.

d) Soit N une matrice carrée d'ordre n et nilpotente. Montrer que $I_n + N$ est une matrice inversible et donner son inverse.
On pourra s'inspirer de la formule $1 - x^n = (1 - x)(1 + x + \dots + x^{n-1})$.

e) Calculer les inverses de $I_2 + N_1$, $I_3 + N_2$ et de $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tout d'abord avec la méthode du pivot de Gauss puis avec la formule précédente.

Exercice 6: Une matrice particulière

Soit J la matrice de $M_4(\mathbb{R})$ définie par $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calculer J^2 et $I_4 - J$.
b) En déduire que les matrices J et $I_4 - J$ ne sont pas inversibles.
c) Trouver toutes les matrices $X \in M_{4;1}(\mathbb{R})$ telles que $(I_4 - J)X = 0$.

Exercice 7: Quelques systèmes linéaires

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, résoudre les systèmes linéaires suivants :

1. $\left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 1 \\ -x & + & y & = & 2 \end{array} \right.$;

2. $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 1 \end{array} \right.$;

3. $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & -1 \\ 3x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \end{array} \right.$;

4. $\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & - & z & - & t & = & 2 \\ x & + & 3y & + & z & + & t & = & 4 \\ 2x & + & 4y & - & z & - & t & = & 5 \end{array} \right.$.

Exercice 8: Systèmes linéaires à paramètre

Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(\mathcal{S}_m) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} mx & - & y & = & 1 \\ x & + & my & = & 3 \end{array} \right. ; \quad (\mathcal{T}_m) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & m \\ x & + & my & - & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \end{array} \right. :$$

Dans chacun cas, on discutera des solutions suivant la valeur du paramètre m.

Exercice 9: Système linéaire à paramètres

Préciser pour quelles valeurs des nombres réels a et b le système d'équations linéaires
$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & z & = & 3 \\ x & + & 2ay & + & z & = & 4 \\ x & + & y & + & bz & = & 3 \end{array} \right.$$
a zéro, une, ou une infinité de solutions.

Exercice 10: Encore plus de paramètres

Soient $a; b; c$ et m des nombres réels. On considère le système d'équations linéaires
$$(*) \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & 2z & = & a \\ mx & + & (1-m)y & + & 2(m-1)z & = & b \\ 2x & + & my & - & (3m+1)z & = & c \end{array} \right.$$
a) On suppose $m = -1$. Montrer qu'il existe des nombres réels $x; y$ et z vérifiant le système $(*)$ si et seulement si $c = 3a + b$.

b) On suppose $m = -1$ et $c = 3a + b$. Trouver une solution du système $(*)$ et montrer que ce système a une infinité de solutions.

c) On suppose $m \neq -1$. Montrer que le système $(*)$ a une unique solution. La calculer.

d) Pour quelles valeurs de m la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ m & 1-m & 2m-2 \\ 2 & m & -3m-1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Dans ce cas, calculer son inverse.