MM1 – TD nº 3

Exercice 1. — On considère l'égalité $(X+1)^{m+n} = (X+1)^m(X+1)^n$.

1. Calculer le coefficient de X^k dans chacun des deux membres pour $0 \leq k \leq m+n$.
2. En déduire une relation sur les coefficients binomiaux.

Exercice 2. — Montrer que le polynôme P est divisible par le polynôme A dans les cas suivants sans effectuer les divisions.

1. $P = X^3 - 3iX + 5(1+i)$ et $A = X - (1-i)$
2. $P = X^4 + 4X^3 + 4X^2 - 3X - 6$ et $A = X^2 + X - 2$

Exercice 3. — Pour quelles valeurs de n le polynôme $P = (X+1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par $Q = X^2 + X + 1$?

Exercice 4. — Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

$$P_1 = X^4 + 1 \;;\; P_2 = X^8 - 1 \;;\; P_3 = X^4 - X^2 + 1$$

Exercice 5. — Montrer qu'un polynôme à coefficients réels de degré 3 admet au moins une racine réelle.

Exercice 6. — Soit P un polynôme à coefficients complexes non constant et $m \geq 1$. On suppose que α est racine de multiplicité m de P. Montrer que α est racine de multiplicité $m-1$ de P'.

Exercice 7 (Polynômes de Tchebychev de première espèce). — Soit n un entier, on se propose d'étudier les polynômes $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P_n(\cos(x)) = \cos(nx)$$

1. Calculer P_0, P_1 et P_2.
2. Montrer que pour tout entier n et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\cos(nx) + \cos((n+2)x) = 2\cos(x)\cos((n+1)x)$$
3. Montrer que pour tout entier n,
$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$
4. Montrer par récurrence que pour tout n entier, le degré de P_n est n.
5. Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $\cos(nx) = 0$ et en déduire l'ensemble des racines de P_n.

Exercice 8. — Effectuer la division euclidienne du polynôme A par le polynôme B dans les cas suivants :

1. $A = 2X^3 - 3X^2 + X - 1$ et $B = X^2 + X + 2$.
2. $A = X^6 - 1$ et $B = X^3 - 1$.
3. $A = 6X^4 - X^3 + 5X^2 - X + 1$ et $B = 2X^2 + X + 1$.

Exercice 9 (Partiel 2011). — On cherche les racines du polynôme $P(X) = X^5 - 4X^4 + 2X^3 - X^2 + 4X - 2$.

1. Faire la division euclidienne de P(X) par $X^3 - 1$.
2. En déduire les racines de P(X) (on les donnera, au choix pour chaque racine, sous forme algébrique ou exponentielle).

Exercice 10 **(Examen 2012)**. — 1. On suppose que b est un paramètre dans $\mathbb{C}$ et on considère le polynôme $S_b(X) = X^3 - b^3$ de variable complexe X. Effectuer la division euclidienne de $S_b(X)$ par $X - b$.

2. On considère dans la suite le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 9$. Effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $x - 1$.
3. Déduire de la question précédente que $P(x)$ peut s'écrire comme la différence de deux cubes.
4. Déduire des question précédentes une factorisation de $P(x)$ en un produit de polynômes de degré un à coefficients complexes.

Exercice 11. — Trouver tous les couples (P, Q) de polynômes à coefficients réels tels que $Q^2 = XP^2$ *(Indication : comparer les degrés).*

Exercice 12. — Soient a et b deux nombres réels.

1. Montrer que a et b sont racines du polynôme $X^2 - (a+b)X + ab$.
2. Trouver les solutions réelles du système

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -6 \end{cases}$$

Exercice 13. — Montrer que les seuls polynômes P à coefficients complexes tels que P′ divise P sont les polynômes de la forme $a(X-\alpha)^k$ avec $a, \alpha \in \mathbb{C}$ et $k \geq 1$.

Exercice 14 **(Interpolation de Lagrange)**. — Soit $n \in \mathbb{N}$. On se donne $n+1$ nombres réels distincts $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

1. Pour $k \in \{0, \ldots, n\}$, montrer qu'il existe un unique polynôme L_k de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\begin{cases} L_k(x_i) = 0 & \text{si } i \neq k \\ L_k(x_k) = 1 \end{cases}$$

2. Soit $n+1$ nombres complexes $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Déduire de la question précédente que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(X)$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall j \in \{0, \ldots, n\}, \quad P(x_j) = y_j$$

AMAURY FRESLON • *E-mail* : freslon@math.jussieu.fr • *Url* : http://www.math.jussieu.fr/~freslon