

Feuille d'exercices 10

Exercice 1 Soit la courbe paramétrée par

$$x(t) = t^2 + \frac{2}{t} + 1, \quad y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}.$$

- 1) Quel est l'ensemble de définition de ces deux fonctions ? Calculer leurs dérivées.
- 2) Dresser le tableau de variation.
- 3) Quelles sont les droites asymptotes et les directions asymptotiques de ? Quelle est la position de la courbe par rapport aux asymptotes éventuelles ?
- 4) Déterminer les points stationnaires (=singuliers) de , préciser les tangentes à la courbe et la position de par rapport aux tangentes en ces points. Un dessin local en ce(s) point(s) sera apprécié.
- 5) Chercher tous les couples (t, θ) de nombres réels distincts avec $t < \theta$ tels que $x(t) = x(\theta)$ et $y(t) = y(\theta)$. Quels sont les points doubles de la courbe (c'est-à-dire les points où deux branches de la courbe se croisent) ? Donner les équations des différentes tangentes en ces points.
- 6) Dessiner sommairement la courbe (en y faisant figurer les résultats de toutes les questions précédentes).

Exercice 2 On considère la courbe paramétrée suivante :

$$x(t) = t(t + 2), \quad y(t) = \frac{t^3}{3t + 2}.$$

- 1) Quel est l'ensemble de définition des fonctions $x(t)$ et $y(t)$. Déterminer leurs dérivées.
- 2) Dresser le tableau de variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$.
- 3) Quelles sont les asymptotes à la courbe ? Étudier les directions asymptotiques.
- 4) Calculer les développements limités à l'ordre 4 en $t = -1$ des fonctions $x(t)$ et $y(t)$.
- 5) Déterminer les points stationnaires de la courbe et préciser leur nature. Dessiner l'allure locale de la courbe en ces points.
- 6) Tracer la courbe en y faisant apparaître les éléments déterminés aux questions précédentes.