Université Paris 7 Denis Diderot
MT1 (Algèbre et analyse élémentaires)
Groupe 1D4, 2008-2009

Feuille d'exercices 5

Exercice 1 Resoudre les systemes d'equations suivants :

a) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+3z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ x-4y+7z=3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y+3z+2t=-2 \\ 2x+3y+4z+t=-1 \\ 3x+7y+z-6t=6 \end{cases}$

Exercice 2 Resoudre en utilisant la methode du pivot de Gausse :

a) $\begin{cases} x-3y-2z=-1 \\ 2x+y-4z=3 \\ x+4y-2z=4 \\ 5x+6y-10z=10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y+3z-2t=6 \\ 2x-y-2z-3t=8 \\ 3x+2y-z+2t=4 \\ 2x-3y+2z+t=-8 \end{cases}$

Exercice 3 Resoudre et discuter les systeme suivants d'inconnues x, y et z :

a) $\begin{cases} x+2y-z=a_1 \\ -2x-3y+3z=a_2 \\ x+y-2z=a_3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \lambda x+y+z=a^2 \\ x+\lambda y+z=a \\ x+y+\lambda z=1 \end{cases}$

Exercice 4 Ecrire des systeme d'equations lineaires dont les solution sont les ensembles suivants, ou u et v parcourent $\mathbb{R}$

a) $\begin{cases} x=u+v-2 \\ y=-u+2v+1 \\ z=u-v \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=u+2v-3 \\ y=-u+v-2 \\ z=2u+2v-1 \\ t=-u-v+3 \end{cases}$

Exercice 5 Soit le systeme

$$(S)\begin{cases} x+3y+4z=0 & (L_1) \\ 3x+2y+4z=0 & (L_2) \\ x+2y+3z=0 & (L_3) \end{cases}$$

On remplace L_1 par $L_1' = L_2 - L_1$, L_2 par $L_2' = L_2 - L_3$ et L_3 par $L_3' = L_1 - L_3$. Le systeme (S) est-il equivalent au systeme $(S')\begin{cases} (L_1') \\ (L_2') \\ (L_3') \end{cases}$

Exercice 6 E ectuer tous les produits possibles de deux matrices choisies parmi les quatre

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 3 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathfrak{M}(2, \mathbb{R})$, les parties suivantes sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1) l'ensemble I des matrices inversibles ;
2) l'ensemble F des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$ ou a et b parcourent $\mathbb{R}$;
3) l'ensemble G des matrice qui commutent avec une matrice A xee.

Exercice 8 On se donne une droite D et un point A dans $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe une unique droite D' passant par A et parallele a D.

Exercice 9 1) On se donne deux points distinct $A = (a, b)$ et $B = (c, d)$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique droite D passant par A et B. Determiner l'equation qui de nit la droite D.

2) Montrer que trois points $A = (a , b)$ ($i = 1, 2, 3$) de $\mathbb{R}^2$ sont alignes si et seulement si $a_1 b_2 + a_2 b_3 + a_3 b_1 = b_1 a_2 + b_2 a_3 + b_3 a_1$.
3) Soient A, B, C et D quatres points dans $\mathbb{R}^2$ parmi lesquels trois points quelconques sont non-alignes. Montrer que $(AB) \parallel (CD)$ et $(AC) \parallel (BD)$ si et seulement si $[A, D]$ et $[B, C]$ ont même milieu.

Exercice 10 1) Soient $A = (1, 0, 2)$, $B = (-1, 4, 2)$ et $C = (3, -2, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que A, B, C ne sont pas alignes et deteminier l'equation du plan (ABC).

2) Les points $(1, 1, 0)$, $(2, 0, 1)$, $(1, 2, 0)$ et $(-1, 4, 2)$ de $\mathbb{R}^3$ sont-ils coplanaires ?
3) Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ d'equation $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - z = 2 \end{cases}$. Montrer qu'il existe un unique plan P de $\mathbb{R}^3$ passant par $A = (1, 0, 0)$ et contenant D. Determiner l'equation cartesienne qui caracterise P.

Exercice 11 On considere $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $e_1 = 1$ et $e_2 = i$ forment une base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$. En deduire la dimension de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$.
2) Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, ou x et y d R F d b F
ca tb