Correction test 3

Question de cours
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille de vecteurs de E.

a. Rappeler les propriétés à vérifier pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

b. Rappeler la définition de : "$(f_1, \ldots, f_n)$ est une famille linéairement indépendante".

c. Rappeler la définition de : "$(f_1, \ldots, f_n)$ est une famille génératrice de F".

d. Donner un exemple de base de $\mathbb{R}^3$.

Correction :

a. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :
- F n'est pas vide (ou $0 \in F$) .
- F est stable pour l'addition : $\forall u, v \in F, u + v \in F$.
- F est stable pour la loi externe : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in F, \lambda u \in F$.
F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :
- F n'est pas vide (ou $0 \in F$) .
- F est stable par combinaison lineaire : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u, v \in F, \lambda u + \mu v \in F$.

b. $(f_1, \ldots, f_n)$ est lineairement independante si et seulement si
$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R},\ \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

c. $(f_1, \ldots, f_n)$ est generatrice de F si et seulement si $\langle e_1, \ldots, e_n \rangle = F$, c'est-a-dire si :
$\forall u \in F,\ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R},\ u = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$.

d. R^3 a par exemple la base canonique : (e_1, e_2, e_3) ou $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.

Exercice 1.
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$u = (1, m, 1)$, $v = (m, -m, -m-2)$, $w = (m+2, m, -m)$ où m est un paramètre réel.

a. Pour quelles valeurs de m la famille de vecteurs (u, v, w) est-elle liée ?

b. Que peut-on en déduire pour le rang de (u, v, w) ?

Correction :

a. Soient x, y et z des reels quelconques veri ant $xu + yv + zw = 0$.
On echelonne ce systeme d'inconnues x, y et z par la methode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x + my + (m+2)z = 0 \\ mx - my + mz = 0 \\ x - (m+2)y - mz = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} x & + & my & + & (m+2)\,z & = & 0 & L_1 \\ & - & m(m+1)\,y & - & m(m+1)\,z & = & 0 & L_2 - mL_1 \\ & - & 2(m+1)\,y & - & 2(m+1)\,z & = & 0 & L_3 - L_1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} x & + & (m+2)\,z & + & my & = & 0 & L_1 \\ & & (m+1)\,y & + & (m+1)\,z & = & 0 & -L_3/2 \\ & & & & 0 & = & 0 & L_2 - \frac{m}{2} L_3 \end{array} \right.$$

Pour toute valeur de m, ce systeme homogene echelonne a au moins pour inconnue secondaire z donc la famille (u, v, w) est liee.

On pouvait aussi constate immediatement que pour tout m, $w = 2u + v$, ce qui implique que la famille (u, v, w) est liee.

b. *Le rang d'une famille de 3 vecteurs est inferieur ou egal a 3. De plus, il est egale a 3 si et seulement si la famille est libre. On peut donc deduire de la question 1 que $rang(u, v, w) \leqslant 2$.*

Exercice 2.
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les sous espaces F et G tels que
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y + z = 0 \ \text{ et } \ 3x - y - z = 0 \ \}$,
G est engendré par la famille de vecteurs (v_1, v_2, v_3) où $v_1 = (1, -1, 2)$, $v_2 = (4, -1, 3)$ et $v_3 = (1, 2, -3)$.

a. Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de F et donner sa dimension.
b. Montrer que G admet pour équation $x - 5y - 3z = 0$.
c. Déterminer une base $\mathcal{B}_2$ de G et donner sa dimension.
d. Soit $\mathcal{E}$ la famille de vecteurs obtenue en réunissant $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Montrer que $\mathcal{E}$ n'est pas une famille libre.
e. A l'aide d'un théorème du cours que l'on énoncera, déterminer sans calculs supplémentaires si la famille $\mathcal{E}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
f. On note H l'espace engendré par la famille de vecteurs $\mathcal{E}$. Pourquoi H contient-il les sous espaces F et G ? Déduire des résultats précédents que $\dim H = 2$.
g. On considère maintenant le sous-espace $K = F \cap G$.
Par la méthode de votre choix, déterminer la dimension de K.
h. Comparer $\dim H + \dim K$ et $\dim F + \dim G$.

Correction :

a. *F est l'ensemble des solutions du systeme* $\left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{array} \right.$.

On echelonne ce systeme par la methode du pivot de Gauss :

$$\left\{ \begin{array}{r} z + x + 2y = 0 \\ -z + 3x - y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} z + x + 2y = 0 & L_1 \\ 4x + \ y = 0 & L_2 + L_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} z \quad - 7x = 0 & L_1 - 2L_2 \\ y + 4x = 0 & L_2 \end{array} \right.$$

Ce systeme a pour inconnue secondaire x *et son ensemble de solution est* $F = \{\lambda(1,-4,7)/\lambda \in \mathbb{R}\}$.
On en deduit que F *est la droite (dimension 1) de vecteur directeur* $e_1 = (1,-4,7)$, *donc on peut choisir* $\mathcal{B}_1 = (e_1)$.

b. *On recherche les vecteurs* $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *qui sont combinaisons lineaires de* $v_1 = (1,-1,2)$, $v_2 = (4,-1,3)$ *et* $v_3 = (1,2,-3)$, *c'est-a-dire pour lesquels il existe des reels* a, b *et* c *tels que* $v = av_1 + bv_2 + cv_3$.
On echelonne le systeme lineaire $av_1 + bv_2 + cv_3 = v$ *d'inconnues* a, b *et* c, *par la methode de Gauss :*

$$\left\{\begin{array}{r} a + 4b + c = x \\ -a - b + 2c = y \\ 2a + 3b - 3c = z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} a + 4b + c = x \\ 3b + 3c = x + y \\ -5b - 5c = -2x + z \end{array}\right. \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} a + 4b + c = x \\ b + c = \frac{x+y}{3} \\ 0 = -x + 5y + 3z \end{array}\right. \begin{array}{l} L_1 \\ \frac{1}{3}L_2 \\ 3L_3 + 5L_2 \end{array}$$

Ce systeme lineaire echelonne admet des solutions si et seulement si $x - 5y - 3z = 0$ *qui est donc une equation du sous-espace* G.

c. *On peut extraire une base de la famille generatrice de* G *ou determiner une base a partir de l'equation de* G.
Selon cette deuxieme methode, on exprime l'ensemble des solutions de l'equation $x - 5y - 3z = 0$ *de maniere parametrique.*
En choisissant pour inconnues secondaires y *et* z, *on obtient que*
$G = \{(5\lambda + 3\mu, \lambda, \mu)/\lambda$ *et* μ *reels*$\} = \{\lambda(5,1,0) + \mu(3,0,1)/\lambda$ *et* μ *reels*$\}$.
$e_2 = (5,1,0)$ *et* $e_3 = (3,0,1)$ *sont donc generateurs de* G, *de plus ils sont non colineaires donc libres. Par consequent, on peut choisir* $\mathcal{B}_2 = (e_2, e_3)$ *comme base de* G *qui est de dimension 2.*

d. $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$. *Plusieurs methode sont possibles pour montrer que* $\mathcal{E}$ *n'est pas une famille libre.*
On peut revenir a la definition (methode classique). Soient α_1, α_2 *et* α_3 *des reels quelconques verifiant* $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 0$.
On echelonne ce systeme d'inconnues α_1, α_2 *et* α_3 *par la methode du pivot de Gauss :*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & 5\,\alpha_2 & + & 3\,\alpha_3 & = & 0 \\ -4\,\alpha_1 & + & \alpha_2 & & & = & 0 \\ 7\,\alpha_1 & & & + & \alpha_3 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} \alpha_3 & & & + & 7\,\alpha_1 & = & 0 & L_3 \\ & & \alpha_2 & - & 4\,\alpha_1 & = & 0 & L_2 \\ 3\,\alpha_3 & + & 5\,\alpha_2 & + & \alpha_1 & = & 0 & L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} \alpha_3 & & & + & 7\,\alpha_1 & = & 0 & L_1 \\ & & \alpha_2 & - & 4\,\alpha_1 & = & 0 & L_2 \\ & & 5\,\alpha_2 & - & 20\,\alpha_1 & = & 0 & L_3 - 3L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcll} \alpha_3 & & & + & 7\,\alpha_1 & = & 0 & L_1 \\ & & \alpha_2 & - & 4\,\alpha_1 & = & 0 & L_2 \\ & & & & 0 & = & 0 & L_3/5 - L_2 \end{array}\right.$$

Ce systeme homogene echelonne a une inconnue secondaire donc il admet une solution non nulle et la famille (e_1, e_2, e_3) *n'est pas libre.*

e. $\mathbb{R}^3$ *est un espace vectoriel de dimension 3 et la famille* $\mathcal{E}$ *a pour cardinal 3.*

D'apres le cours, si une famille est de même cardinal que la dimension de l'espace alors elle est generatrice si et seulement si c'est une base ou encore si et seulement si elle est libre.

On en deduit que $\mathcal{E}$ *n'est pas generatrice de* $\mathbb{R}^3$ *car elle n'est pas libre.*

f. H *contient* e_1 *donc egalement tous les vecteurs engendres par* e_1*, c'est-a-dire* F*.*

De même, H *contient* e_2 *et* e_3 *donc egalement* $\langle e_2, e_3 \rangle = G$*.*

G *est de dimension 2 et* $G \subset H$ *donc* $\dim H \geqslant 2$*.*

De plus, H *est inclus dans* $\mathbb{R}^3$ *donc* $\dim H \leqslant 3$*. Or si* H *etait de dimension 3,* $\mathcal{E}$ *serait generatrice de* $\mathbb{R}^3$*, ce qui n'est pas le cas d'apres la question precedente.*

On en conclut que $\dim H = 2$*, et donc que* $H = G$ *car* $G \subset H$ *et* $\dim H = \dim G$*.*

g. *Necessairement* e_1 *appartient au plan* G *sinon* $\mathcal{E}$ *engendrerait* $\mathbb{R}^3$*. On le veri e facilement car* $e_1 = (1, -4, 7)$ *veri e l'equation* $x - 5y - 3z = 0$ *de* G*.*

Par consequent la droite engendree par e_1*, c.a.d.* F *est incluse dans* G *et* $K = F \cap G = F$*.*

On en conclut que K *est de dimension 1.*

h. *On a* $\dim H + \dim K = 3 = \dim F + \dim G$ *ce qui est une application du theoreme* $\dim F + \dim G = \dim(F + G) + \dim(F \cap G)$*.*