

SECTION B

Partiel du 26 novembre 2011

Duree : 3 heures. Sans document, ni calculatrice, telephones mobiles eteints et ranges.

Exercice 1. Question de cours

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Rappeler la définition des énoncés :

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ (où x_0 et l sont des réels).
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 2.

Soit un entier $n \geq 1$.

On considère un nombre complexe non nul $Z = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

On note A l'ensemble des racines n -ièmes complexes de Z .

1. Donner la liste des éléments de A .
2. Donner des nombres complexes z_0 et u tels que $A = \{z_0 u^0, z_0 u^1, z_0 u^2, \dots\}$.
3. Soit un entier $p \geq 1$, calculer la somme $S = \sum_{z \in A} z^p$.

Exercice 3.

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Etudier $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. f est-elle continue sur \mathbb{R} ?
2. Donner, en le justifiant, un tableau des variations de f .
3. Déterminer, en le justifiant, si f est injective.
4. Déterminer, en le justifiant, si f est surjective.
5. Soit $A = [-1, 2]$. Calculer $f(A)$ puis $f^{-1}(f(A))$ et comparer les ensembles A et $f^{-1}(f(A))$.
6. Donner un exemple d'application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ (N.B. l'ensemble d'arrivée) telle que pour toute partie A de \mathbb{R} , $g^{-1}(g(A)) = A$ (sans démonstration).

Exercice 4.

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lfloor x \rfloor$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ($\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x).

On considère l'ensemble $A = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que $\sup(A)$ existe, donner sa valeur et démontrer que cette valeur est bien le $\sup(A)$.
2. Déterminer $f(A)$.
3. Comparer $\sup(f(A))$ et $f(\sup A)$.
4. [Bonus] : soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante définie sur \mathbb{R} , donner une condition suffisante sur g pour avoir $\sup(g(A)) = g(\sup A)$. La démonstration n'est pas demandée.

Exercice 5.

On considère les polynômes :

$$A(x) = 2x^4 + 12x^3 + 30x^2 + 36x + 20 \quad \text{et} \quad B(x) = x^2 + 3x + (3-i).$$

1. Effectuer la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$. On note $C(x)$ le quotient.
2. Résoudre l'équation $B(x) = 0$. On exprimera les solutions sous forme algébrique.
En déduire une écriture de $B(x)$ comme produit de polynômes de degré 1.
3. A l'aide d'une propriété de A , montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$: $B(\alpha) = 0 \Rightarrow C(\bar{\alpha}) = 0$.
En déduire *sans aucun calcul* les racines du polynôme C , puis la factorisation de $C(x)$ en polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
4. Donner la factorisation de $A(x)$ en polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6.

Déterminer les limites suivantes en justifiant les résultats :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + e^x}{3x^3 + 1},$
2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1},$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|e^{ix} + 1|}{x}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(\sqrt{1+x} - 1).$

Exercice 7.

Résoudre les systèmes suivants (où a est un paramètre réel) par la méthode du pivot de Gauss.

$$(S_1) \begin{cases} x - ay = -1 \\ ax - y = 0 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x - y + 3z - 2t = 1 \\ 2x - 3y + 8z - 7t = 1 \\ 3x - y + 5z + 2t = 9. \end{cases}$$