

Feuille d'exercices 3

Exercice 1 Calculer le module et l'argument des nombres complexes $1 - i$ et $1 + \sqrt{3}i$, puis mettre le nombre $\frac{(1 + \sqrt{3}i)^{11}}{(1 - i)^{20}}$ sous forme cartésienne.

Exercice 2 Soient les nombres complexes $z = 1 + \sqrt{3}i$ et $w = 2 + 2i$. Mettre sous forme polaire les nombres : z , w , z/w et zw . En utilisant les résultats obtenus, calculer explicitement les valeurs suivantes : $\cos \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

Exercice 3 Soient z_1 et z_2 des nombres complexes. Montrer les égalités suivantes :

- 1) $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 - 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2$,
- 2) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

Exercice 4 Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points z vérifiant

- 1) $|z - 1| = 1$;
- 2) $|z + i - 3| \leq 2$;
- 3) $|z - i| = |z + 1|$;
- 4) $z + \bar{z} = z\bar{z}$;
- 5) $z + 4/z \in \mathbb{R}$;
- 6) $|z| = |1/z| = |z - 1|$.

Exercice 5 Soient α et β deux nombres complexes tels que les racines de l'équation

$$x^2 + \alpha x + \beta = 0$$

sont réelles. Montrer que α et β sont deux nombres réels.

Exercice 6 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $z + z^{-1} = 2 \cos \alpha$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $z^n + z^{-n} = 2 \cos(n\alpha)$.

Exercice 7 On se donne un nombre réel x .

- 1) Calculer $\cos(5x)$ et $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$. En utilisant le fait que $\cos(5\pi/10) = 0$, donner la valeur de $\cos(\pi/10)$.
- 2) Soit z un nombre complexe non-nul. On note $u := z + z^{-1}$.
 - (i) Montrer que $u^2 + u - 1 = 0$ si et seulement si $z \neq 1$ et $z^5 = 1$;
 - (ii) En déduire que $\cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\cos(\pi/5) = (\sqrt{5}+1)/4$.
 - (iii) En utilisant la formule pour $\cos(2x)$ établie dans la question 1), retrouver la valeur de $\cos(\pi/10)$.

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application telle que $f(z) = z^2/(1 - z)$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

- 1) Déterminer les sous-ensembles $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{-4\})$ et $f^{-1}(\{3i\})$.

- 2) Soit $u \in \mathbb{C}$. Combien l'ensemble $f^{-1}(\{u\})$ a-t-il d'éléments ?
 3) L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Exercice 9 Soient $(\alpha, \theta) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Mettre sous forme polaire les nombres $1 + e^{i\theta}$ et $(1 + e^{i\theta})^n$. En déduire les valeurs de

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(\alpha + k\theta)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(\alpha + k\theta).$$

Exercice 10 Soit $z \neq 1$ un nombre complexe.

- 1) Montrer que pour tout entier naturel n , on a

$$1 + z + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}.$$

- 2) En déduire les valeurs de

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 11 Soient z et w deux nombres complexes. Montrer que

$$||z| - |w|| \leq \min\{|z - w|, |z + w|\}$$