Amaury FRESLON

MM1 – TD nº 4

Exercice 1. — Déterminer si les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ suivants sont des sous-espaces vectoriels.

1. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y = 0\}$.
2. $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x - y + 1 = 0\}$
3. $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, xy = 0\}$
4. $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{Q}\}$
5. $J = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 0\}$
6. $K = \{(u+v, u-v), u, v \in \mathbb{R}\}$

Exercice 2. — Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $a = (-1,0,1,2)$ et $b = (0,1,-3,1)$. Les vecteurs suivants appartiennent-ils à F ?

$$x = (-3,2,-3,8) \quad ; \quad y = (-1,3,2,1) \quad ; \quad z(\alpha) = (\alpha, 1-\alpha, \alpha-1, \alpha-7) \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R}$$

Exercice 3. — Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les vecteurs $v = (1,2)$ et $w = (-2,m)$, où $m \in \mathbb{R}$.

1. A quelle condition sur le paramètre m, le vecteur w est-il colinéaire au vecteur v ?
2. En supposant que w n'est pas multiple de v, montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de v et w.

Exercice 4. — On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v = (1,-2,-3)$ et $w = (-2,4,m)$, où $m \in \mathbb{R}$.

1. A quelle condition sur le paramètre m, le vecteur w est-il colinéaire au vecteur v ?
2. On suppose que w n'est pas multiple de v et on considère l'ensemble P de toutes les combinaisons linéaires de v et w. Montrer que
$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / ax + by + cz = 0\},$$
où a, b et c sont des réels non tous les trois nuls que l'on déterminera.

Exercice 5. — Déterminer si les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ suivantes sont libres, génératrices ou des bases.

1. $\{(3,2),(1,1),(2,3)\}$
2. $\{(2,1,0),(0,2,1),(2,0,1)\}$
3. $\{(1,1,0),(1,2,3)\}$
4. $\{(3,5),(1,1)\}$

Exercice 6. — Déterminer une base des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ engendrés par les familles de vecteurs suivantes :

1. $\{(1,1,1,1),(1,2,3,4),(0,1,1,0)\}$
2. $\{(2,1,4,1),(1,2,0,1),(-1,1,-3,0)\}$
3. $\{(0,1,2,3),(6,3,1,2),(6,4,1,4),(6,2,1,0)\}$

Exercice 7. — Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.

1. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$
2. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \text{ et } x + 2y + 3z = 0\}$

Exercice 8 **(Examen 2012).** — Soient les vecteurs $u_1 = (1,3,2)$, $u_2 = (2,4,0)$, $u_3 = (2,7,6)$, $u_4 = (2,5,2)$ et $u_5 = (1,2,1)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, donner la définition d'une base de E puis celle de la dimension de E. Quelle est la dimension de $\mathbb{R}^3$?
2. La famille de vecteurs (u_2, u_4, u_5) est-elle libre ?
3. (u_2, u_4, u_5) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Justifier *sans aucun calcul.*
4. *Sans effectuer aucun calcul,* déterminer le sous-espace engendré par u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
5. Déterminer *sans faire de calcul* si la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3, u_4) est libre.
6. Montrer que pour tout vecteur $v = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$, l'équation vectorielle
$$xu_1 + yu_2 + zu_3 + tu_4 = v$$
admet au moins une solution (x, y, z, t) si et seulement si $4a - 2b + c = 0$.
7. On considère le sous-espace vectoriel G engendré par les vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4. Déduire de la question précédente une équation de G.
8. Déterminer la dimension de G et donner une base de G extraite de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4).
9. On considère le sous-espace vectoriel $F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, 4a + 2b - 3c = 0\}$. Déterminer une base et la dimension de $F \cap G$.