Université Paris 7 Denis Diderot
MT1 (Algèbre et analyse élémentaires)
Groupe 1D4, 2008-2009

Feuille d'exercices 7

Exercice 1 Calculer les limite des fonctions suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - (1+x)^{\frac{1}{3}}}{x}$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{3}} - 1}{\sqrt{1+x} - 1}$ 5) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}$ 6) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3 + \cos(x)$

7) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$ 8) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$ 9) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(1/x)$

Exercice 2 Comparer $\lim\limits_{x\to 1-} \big(\lim\limits_{n\to\infty} x^n\big)$ et $\lim\limits_{n\to +\infty} \big(\lim\limits_{x\to 1-} x^n\big)$.

Exercice 3 Soit $f(x)$ une fonction sur $]0, +\infty[$ telle que $f(2x) = f(x)$ $(x > 0)$ et que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(x) \equiv l$.

Exercice 4 1) Trouver une fonction f de nie sur $\mathbb{R}$ qui est discontinue partout mais telle que $|f|$ est continue partout.

2) Soient f une fonction qui est continue en 0 et g une fonction qui est discontinue en 0. Est-ce que $f + g$ est forcement discontinue en 0 ? La même question pour fg.

Exercice 5 Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ $(a < b)$ telle que $|f|$ est croissante sur $[a, b]$. Montrer que f est monotone sur $[a, b]$.

Exercice 6 1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant des limites nies en $\pm\infty$. Montrer que f est bornee.

2) Donner une fonction continue et bornee de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui n'admet pas de limites en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 7 Soit f la fonction de nie par $f(x) = x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$.

1) Etudier les limites a droite et a gauche de f en 0 et en deduire que f admet un prolongment par continuite en 0.
2) Etudier les limites a droite et a gauche de f en 1 et en deduire que f n'est pas continue en 1.
3) Etudier la convergence de la fonction f lorsque $x \to +\infty$.
4) Etudier la convergence de la fonction f lorsque $x \to -\infty$.

Exercice 8 Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Montrer qu'il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $f(\xi) = 0$ et que $f(x) > 0$ sur $]\xi, b]$.

Exercice 9 1) Montrer que la fonction $x \mapsto \tan(x)$ admet un point fixe dans l'intervalle $]\pi/2, 3\pi/2[$.

2) Soit J un intervalle ferme et $f : J \to J$ une application continue. Montrer que f admet au moins un point fixe.

Exercice 10 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = +\infty$.

1) Montrer qu'il existe un segment $[a,b]$, avec $a < b$, tel que

$$x \notin [a,b] \Rightarrow g(x) > g(0).$$

2) En considerant la restriction de g a l'intervalle $[a,b]$, montrer qu'il existe au moins un $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} g(x) = g(x_0)$.

3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b \neq f(a)$. Montrer qu'il existe dans $\mathbb{R}^2$ un point du graphe de f dont la distance a (a,b) est minimum. [Indication : on applique la question precedente a la fonction $g(x) = (x-a)^2 + (f(x)-b)^2$]

Exercice 11 Soit $J = [a,b]$ un intervalle, $a < b$. Soit $f : J \to J$ une application telle que, $\forall x, y \in J$, $x \neq y$, on ait

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

On choisit arbitrairement $x_0 \in J$ et on considere suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ telle que $x_{n+1} = f(x_n)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$.

1) Montrer qu'il existe un unique $\xi \in J$ tel que $f(\xi) = \xi$.

2) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \xi$.

Exercice 12 1) Construire une bijection continue de $]0,1[$ vers $]-\infty, +\infty[$.

2) Construire une application continue et surjective de $]0,1[$ vers $[0,1[$.

3) Existe-il une bijection continue f de $[0,1[$ vers $]0,1[$?