Correction Test 2

Exercice 1.

a. Soient E et F des ensembles et $f : E \to F$ une application.
Donner les de nitions de l'injectivite et de la surjectivite de f.

b. Soit P un polynôme et α une racine de P.
Donner la de nition de la multiplicite m de α comme racine de P.

Correction :

a. f est injective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet au plus un antécédent par f.
f est surjective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet au moins un antécédent par f.

b. α est une racine de P de multiplicité m si et seulement si $(x-a)^m$ divise P et $(x-a)^{m+1}$ ne divise pas P.

Exercice 2.

a. Donner un exemple d'application injective de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ (sans justi cation).

b. Donner un exemple d'application surjective de $\mathbb{R}$ dans $[-1,1]$ (sans justi cation).

Correction :

a. Soit $Id : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $Id(x) = x$, f est injective.

b. Soit $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ définie par $f(x) = sinx$, f est surjective.

Exercice 3.

On considere l'application suivante : $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & & x & \mapsto & e^{x^2} \end{array}$

a. Decrire, en le justi ant, les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$:

$$f\ ]-2,1] \quad ; \quad f^{-1}\ \{e\} \quad ; \quad f^{-1}\ [\frac{1}{2}, +\infty[$$

b. f est-elle injective ? f est-elle surjective ?

c. Determiner, en le justi ant, des intervalles $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}^+$ tels que la restriction de f a I soit une bijection de I sur J.

Correction :

a. Pour déterminer ces ensembles, il faut étudier les variations de f.
f est une fonction continue et dérivable.
Elle est également paire car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$.
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x\,e^{x^2}$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Enfin $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$f\ \ ]-2,1]$ est l'ensemble des images des éléments de $]-2,1]$ par f.
Comme f n'est pas monotone sur $]-2,1]$, le plus simple est de le découper en deux intervalles sur lesquelles elle l'est : $]-2,1] =]-2,0] \cup [0,1]$.
D'après les vairations de f, $f\ \ ]-2,0]\ \ = [f(0), f(-2)[$ et $f\ \ [0,1]\ \ = [f(0), f(1)]$.
De plus $f(0) = 1$ et $f(-2) = e^4 = f(2) > f(1)$ donc
$f\ \ ]-2,1]\ \ = f\ \ ]-2,0] \cup [0,1]\ \ = f\ \ ]-2,0]\ \ \cup f\ \ [0,1]\ \ = [f(0), f(-2)[= [1, e^4[$

$f^{-1}\ \ \{e\}$ est l'ensemble des antécédents de e par f.
D'après l'étude de f, $f^{-1}\ \ \{e\}\ \ = \{-1, 1\}$.

$f^{-1}\ \ [\frac{1}{2}, +\infty[$ est l'ensemble des antécédents des éléments de $[\frac{1}{2}, +\infty[$ par f. D'après l'étude de f, 1 est le minimum de f donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [\frac{1}{2}, +\infty[$.
On en conclut que $f^{-1}\ \ [\frac{1}{2}, +\infty[\ \ = \mathbb{R}$.

b. *Comme f est paire, elle ne peut pas être injective, par exemple $f(1) = f(-1)$ bien que $1 \neq -1$.*
Comme f admet pour minimum 1, elle n'est pas surjective, par exemple 0 est dans l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}^+$ mais n'a pas d'antécédent.

c. *On choisit I de sorte que f soit strictement monotone sur I. La restriction de f à I est alors injective. Par exemple $I = [0, +\infty[$.*
Puis on choisit $J = f(I)$ ce qui assure la surjectivité de I sur J. D'après la continuité et les variations de f, $J = f\ \ [0, +\infty[\ \ = [1, +\infty[$

Exercice 4.
On considere les polynômes $A(x) = x^5 + x^3 - x^2 - 1$ et $B(x) = 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2$.

Donner le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B.

Que peut-on en deduire pour les racines de A et de B ?

Correction :
La division euclidienne de A par B est :

$$
\begin{array}{cccccccc|l}
 & x^5 & & +x^3 & -x^2 & & -1 & & 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2 \\
\ominus & x^5 & -x^4 & +x^3 & -x^2 & & & & \\
\hline
 & & x^4 & & & & -1 & & \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\
 & \ominus & x^4 & -x^3 & +x^2 & -x & & & \\
\hline
 & & & x^3 & -x^2 & +x & -1 & & \\
 & \ominus & & x^3 & -x^2 & +x & -1 & & \\
\hline
 & & & & & & 0 & &
\end{array}
$$

Le quotient est $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ et le reste est nul.

On en déduit que A est divisible par B. Par conséquent, les racines de B sont toutes des racines de A. Et même leur multiplicité dans B est inférieure à leur multiplicité dans A.