Université Paris 7 Denis Diderot
MT1 (Algèbre et analyse élémentaires)
Groupe 1D4, 2008-2009

Feuille d'exercices 4

Exercice 1 Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y = 0\}$

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y + 1 = 0\}$.

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y \leq 4\}$.

Exercice 2 Dans $\mathbb{R}^2$, on considere les vecteurs $v = (1, 2)$ et $w = (-2, m)$, ou $m \in \mathbb{R}$.

a) Sous quelle condition sur le parametre m le vecteur w est-il multiple du vecteur v ?

b) En supposant que w *n'est pas* multiple de v, montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est une combinaison lineaire de v et w.

Exercice 3 Dans $\mathbb{R}^3$, on considere les vecteurs $v = (1, -2, -5)$ et $w = (-2, 4, m)$, ou $m \in \mathbb{R}$.

a) quelle condition sur le parametre m le vecteur w est-il multiple du vecteur v ?

b) On suppose que w *n'est pas* multiple de v et on considere l'ensemble P de toutes les combinaisons lineaires de v et w. Montrer qu'on a

$$P = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0 \,\},$$

ou a, b, c sont des nombres reels, non tous les trois nuls, que l'on determinera.

Exercice 4 Dans $\mathbb{R}^3$, on considere les vecteurs $v_1 = (-2, 4, 1)$, $v_2 = (1, -2, 0)$, et $v_3 = (3, b, -1)$, ou $b \in \mathbb{R}$.

a) Sous quelle condition sur le parametre b le vecteur v_3 est-il une combinaison lineaire de v_1 et v_2 ?

b) On suppose cette condition vei ee. Montrer que v_1 est une combinaison lineaire de v_2 et v_3 et que v_2 est une combinaison lineaire de v_1 et v_3.

c) On suppose que cette condition n'est pas veri ee. Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est une combinaison lineaire de v_1, v_2 et v_3.

Exercice 5 Dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs suivants sont-ils lineairement independants ?
Forment-ils une famille generatrice de $\mathbb{R}^3$?

a) $u = (3, 2, 1)$ et $v = (4, 2, 0)$;

b) $u = (3, 1, 2)$, $v = (5, 1, 0)$ et $w = (1, 1, 4)$;

c) $u = (-2, 4, 1)$, $v = (1, -2, 0)$ et $w = (3, m, -1)$ (discuter suivant les valeurs de m).

Exercice 6 Montrer que dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (2, 3, -1)$ et $v_2 = (1, -1, -2)$ engendrent le même sous-espace vectoriel que $w_1 = (3, 7, 0)$ et $w_2 = (5, 0, -7)$.

Exercice 7 Les familles suivantes sont elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

a) $\mathcal{A} = \big((1, 3, 2), (0, 2, 3), (0, 0, 1)\big)$;

b) $\mathcal{B} = \big((1, 4, 6), (0, 3, 2)\big)$.

Exercice 8 a) Prouver que $u_1 = (0, 1, 2)$, $u_2 = (1, 3, 5)$ et $u_3 = (5, 4, 6)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculer les coordonnees de $u = (7, 4, 7)$ dans cette base.

Exercice 9 Determiner le rang de la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ formee de :
$u_1 = (1, 0, 2, 2)$, $u_2 = (1, -1, 3, -2)$, $u_3 = (2, -1, 5, 0)$.

Exercice 10 Determiner une base et la dimension, des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

a) $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ ou $a_1 = (3, 3, 10)$, $a_2 = (0, 3, 4)$ et $a_3 = (1, 0, 2)$; $b_2 = (0, 1, 1)$;

b) $\{(2t + u, -u, -2t) \mid t, u \in \mathbb{R}\}$;

c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \text{ et } 3x - y + z = 0\}$.

Exercice 11 Determiner des equations cartesiennes pour chacun des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$.

a) $A = \{(3\alpha + 2\beta, \beta + 2\alpha, \alpha - \beta)\ ;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$;

b) $B = \langle b\rangle$ ou $b = (3, 2, 1)$.

Exercice 12 Dans $\mathbb{R}^4$ on considere $a_1 = (2, -2, 3, 1)$ et $a_2 = (-1, 4, -6, -2)$.

a) Trouver des vecteurs a_3 et a_4 tels que (a_1, a_2, a_3, a_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

b) Determiner un systeme d'equations pour le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendre par a_1 et a_2.

Exercice 13 Dans $\mathbb{R}^4$ on considere l'ensemble E des (x, y, z, t) tels que $x+y+z+t = 0$ et l'ensemble F des (x, y, z, t) tels que $x = y = z = t$.

a) Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels supplementaires dans $\mathbb{R}^4$.

b) Determiner des bases de E et de F.

Exercice 14 Soient E_1 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendre par $\{(1, 3, 0, 4), (2, 0, 1, 2)\}$ et E_2 le sous-espace vectoriel engendre par $\{(1, 1, 2, 3), (4, -1, 0, 2)\}$.

Les sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 sont-ils supplementaires dans $\mathbb{R}^4$?

Exercice 15 Dans $\mathbb{R}^4$, on considere les sous-espaces vectoriels $E_1 = \langle v_1, v_2\rangle$ et $E_2 = \langle w_1, w_2\rangle$ avec $v_1 = (1, -1, 0, 1)$ et $v_2 = (0, 2, 1, 0)$, $w_1 = (0, 6, -1, 4)$ et $w_2 = (3, 3, 1, 5)$.

a) Donner une base de $E_1 \cap E_2$ et determiner sa dimension.

b) Donner une base de $E_1 + E_2$ et determiner sa dimension.

c) Determiner un supplementaire de $E_1 + E_2$ dans $\mathbb{R}^4$.