Correction du partiel du 26/11/11

Exercice 1. Question de cours

On considere une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Rappeler la de nition des enonces :

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ (ou x_0 et l sont des reels).
2. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Correction :

1. *$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $|x - x_0| < \alpha \;\Rightarrow\; |f(x) - l| < \varepsilon$.*
2. *$\forall A > 0$, $\exists r > 0$, $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $x > r \;\Rightarrow\; f(x) > A$.*

Exercice 2.

Soit un entier $n \geqslant 1$.
On considere un nombre complexe non nul $Z = re^{i\theta}$ ou $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On note A l'ensemble des racines n-iemes complexes de Z.

1. Donner la liste des elements de A.
2. Donner des nombres complexes z_0 et u tels que $A = \{z_0\, u^0,\, z_0\, u^1,\, z_0\, u^2, \ldots\}$.
3. Soit un entier $p \geqslant 1$, calculer la somme $S = \sum_{z \in A} z^p$.

Correction :

1. *$Z = r\,e^{i\theta}$ est non nul car $r \neq 0$ donc Z admet n racines n-iemes distinctes qui sont les nombres : $z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ avec k entier dans $[0, n-1]$. Ce sont les elements de A.*
2. *En posant $u = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, on a $\forall k \in [0, n-1]$, $z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta}{n}}\, e^{i\frac{2k\pi}{n}} = z_0\, u^k$ puisque $z_0 = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\theta}{n}}$.*
   On a alors $A = \{z_0\, u^0,\, z_0\, u^1,\, \ldots,\, z_0\, u^{n-1}\}$
3. *D'apres la question 2 : $S = \sum_{z \in A} z^p = \sum_{k=0}^{n-1} \left(z_0\, u^k\right)^p = z_0^p \sum_{k=0}^{n-1} (u^p)^k$.*

   S est la somme des n premiers termes d'une suite geometrique de raison $u^p = e^{i\frac{2p\pi}{n}}$.

   ***Cas 1** : $u^p = 1$ c'est-a-dire $\frac{2p\pi}{n}$ est un multiple de 2π qui equivaut a p multiple de n.*
   On note q l'entier tel que $p = qn$.
   $S = n\, z_0^p = n\,(\sqrt[n]{r})^{qn}\; e^{i\frac{qn\theta}{n}} = n\, r^q\, e^{iq\theta}$.

   ***Cas 2** : $u^p \neq 1$ c'est-a-dire p n'est pas multiple de n.*
   $S = z_0^p\, \dfrac{1 - u^{pn}}{1 - u^p} = 0$ car $u^n = 1$ puisque u est une racine n-ieme de 1.

Exercice 3.

On considere l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de nie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Etudier $\lim_{x \to 0} f(x)$. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Donner, en le justi ant, un tableau des variations de f.

3. Determiner, en le justi ant, si f est injective.
4. Determiner, en le justi ant, si f est surjective.
5. Soit A = $[-1, 2]$. Calculer f(A) puis $f^{-1}\left(f(\text{A})\right)$ et comparer les ensembles A et $f^{-1}\left(f(\text{A})\right)$.
6. Donner un exemple d'application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ (N.B. l'ensemble d'arrivee) telle que pour toute partie A de $\mathbb{R}$, $g^{-1}\left(g(\text{A})\right) = \text{A}$ (sans demonstration).

Correction :

1. *Quand $x \to 0$, on a $-\dfrac{1}{x^2} \to -\infty$ donc $\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \to 0$. De plus $f(0) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.*

   f est un prolongement par continuite en 0 de la fonction $x \to \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ qui est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composee de fonctions continues. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. *f est une fonction paire car $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$.*
   Il su t donc d'etudier f sur $\mathbb{R}^+$.
   f est derivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = \dfrac{2}{x^3}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) > 0$.
   Comme f est continue en 0, f croît strictement sur $\mathbb{R}^+$.
   En n quand $x \to +\infty$, on a $-\dfrac{1}{x^2} \to 0$ donc $f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \to e^0 = 1$ par continuite de l'exponentielle.
   On a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	1 ↘	0	↗ 1

3. *f est paire donc par exemple $f(1) = f(-1)$ bien que $1 \neq -1$. Il suit que f n'est pas injective.*
4. *f est positive car l'exponentielle l'est donc par exemple -1 n'a pas d'antecedent par f. Il suit que f n'est pas surjective.*
5. *D'apres la continuite et les variations de f, $f([-1, 2]) = [0, f(-1)] \cup [0, f(2)] = [0, e^{-\frac{1}{4}}]$.*
   En e et, $f(-1) = f(1) \leqslant f(2) = e^{-\frac{1}{4}}$ car f croît sur $\mathbb{R}^+$.
   Toujours d'apres le tableau de variations et la parite de f, $f^{-1}([0, f(2)]) = [-2, 2]$.
   Donc $\text{A} \subset f^{-1}(f(\text{A}))$ strictement.
6. *Il faut et il su t que g soit injective. Par exemple $g = exp$ convient.*

Exercice 4.

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de nie par $f(x) = \lfloor x \rfloor$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ($\lfloor x \rfloor$ est la partie entiere de x).
On considere l'ensemble A = $\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

1. Montrer que sup(A) existe, donner sa valeur et demontrer que cette valeur est bien le sup(A).
2. Determiner f(A).
3. Comparer $\sup\left(f(\text{A})\right)$ et $f(\sup \text{A})$.

4. [*Bonus*] : soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante de nie sur $\mathbb{R}$, donner une condition su sante sur g pour avoir sup g(A) = g(sup A). La demonstration n'est pas demandee.

Correction :

1. *Pour tout* $n > 0$, $1 - \frac{1}{n} < 1$. *Il suit que* A *est majore par 1, or toute partie non vide et majoree de* $\mathbb{R}$ *admet une borne superieure, donc* sup(A) *existe.*

   Montrons que sup(A) = 1, *c'est-a-dire que 1 est le plus petit des majorants de* A.

   Soit $\varepsilon > 0$ *quelconque, on choisit* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n > \frac{1}{\varepsilon}$. *On a alors* $\frac{1}{n} < \varepsilon$ *donc* $1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n}$. *Comme* $1 - \frac{1}{n} \in$ A, *il suit que* $1 - \varepsilon$ *n'est pas un majorant de* A. *(CQFD)*

2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant 1 - \frac{1}{n} < 1$ *donc* $\lfloor 1 - \frac{1}{n} \rfloor = 0$.
   On en deduit que f(A) = $\{0\}$.

3. f(A) *est ni donc* sup f(A) = max f(A) = 0 *et* f(sup A) = f(1) = 1.

   Conclusion : sup f(A) = $0 <$ f(sup A) = f(1) = 1.

   Remarque : cette propriete est une consequence de la croissance de f.
   Demonstration : il su t de montrer que f(sup A) *est un majorant de* f(A). *Des lors, on sait que* f(sup A) *est superieur au plus petit des majorants de* f(A), *donc a* sup f(A) .
   Or pour tout $x \in$ A, $x \leqslant$ sup A *car* sup A *est un majorant de* A. *Comme* f *est croissante, on en deduit que* $f(x) \leqslant f$(sup A). *Il suit que* f(sup A) *est un majorant de* f(A) *(CQFD).*

4. *Il su t que* $\lim\limits_{\substack{x \to \sup A \\ x < \sup A}} g(x) = g(\sup A)$.

   C'est une condition plus faible que la continuite en sup A = 1 *qui assure aussi, a fortiori, l'egalite.*
   Demonstration : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} g(x) = g(1)$ *equivaut a*
   $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 - \alpha < x < 1 \Rightarrow g(1) - \varepsilon < g(x) < g(1) + \varepsilon$ *(P).*
   D'apres la demonstration precedente, comme g *est croissante,* $g(1) = g$(sup A) *est un majorant de* g(A). *Montrons que c'est le plus petit.*
   Soit $\varepsilon > 0$, *on choisit un reel* α *selon (P), puis on choisit un entier* $n > \frac{1}{\alpha}$. *On a* $1 - \alpha < 1 - \frac{1}{n} < 1$ *donc d'apres (P) :* $g(1) - \varepsilon < g(1 - \frac{1}{n})$. *Comme* $1 - \frac{1}{n} \in$ A, $g(1) - \varepsilon$ *n'est pas un majorant de* g(A). *(CQFD)*

Exercice 5.

On considere les polynômes :

$$A(x) = 2x^4 + 12x^3 + 30x^2 + 36x + 20 \quad \text{et} \quad B(x) = x^2 + 3x + (3 - i).$$

1. ES Q 1BA]TJ/F30 Tf 4.05 Td0 me NR -17.302 Td [(s
+ Td [(1)]TJ/F35 ... 4.504 Td [(2(boi)) (20.536 Td [3l)87(1)1(ai) 0 Td

1.R

1.R

Correction :

1. *La division division euclidienne de* A(x) *par* B(x) *s'ecrit :*

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 2x^4 & +12x^3 & +30x^2 & +36x & +20 & x^2+3x+(3-i) \\ \cline{7-7}
\ominus & 2x^4 & +6x^3 & +(6-2i)x^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & 6x^3 & +(24+2i)x^2 & +36x & +20 & 2x^2+6x+6+2i \\
\ominus & & 6x^3 & +18x^2 & +(18-6i)x & & \\ \cline{3-5}
 & & & (6+2i)x^2 & +(18+6i)x & +20 & \\
\ominus & & & (6+2i)x^2 & +(18+6i)x & +20 & \\ \cline{4-6}
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

Conclusion : A(x) = B(x) C(x) *avec* C$(x) = 2x^2 + 6x + 6 + 2i$.

2. *Le discriminant de l'equation* B$(x) = x^2 + 3x + (3 - i) = 0$ *est* $\Delta = 3^2 - 4(3 - i) = -3 + 4i$.
Calculons les racines carrees de Δ *sous la forme* $x + iy$ *avec* x *et* y *reels. On a les equivalences :*

$$(x+iy)^2 = -3+4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-3 \\ 2xy=4 \\ x^2+y^2=\sqrt{9+16}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y^2=4 \\ xy=2 \end{cases}$$

Les racines carrees de Δ *sont donc* $1 + 2i$ *et* $-1 - 2i$.
On en deduit que B *a pour racines :* $z_1 = \frac{-3-1-2i}{2} = -2 - i$ *et* $z_2 = \frac{-3+1+2i}{2} = -1 + i$.
Comme B *est unitaire, il suit que la factorisation de* B *en polynômes irreductibles de* $\mathbb{C}$[X] *est* B$(x) = (x + 2 + i)\,(x + 1 - i)$.

3. *Comme* A *est un polynôme a coefficients reels, pour tout* $a \in \mathbb{R}$, A(a) = B(a) C$(a) \in \mathbb{R}$. *Donc pour tout* $a \in \mathbb{R}$, B(a) *et* C(a) *sont conjugues a un facteur reel pres (dependant de* a *ou pas).*
Il faut donc comparer les polynômes C(x) *et* $\overline{\mathrm{B}(x)}$.
Il est clair que : C$(x) = 2\,\overline{\mathrm{B}(x)}$ *donc pour tout* $\alpha \in \mathbb{C}$, *si* B$(\alpha) = 0$ *alors* C$(\alpha) = 2\,\overline{\mathrm{B}(\alpha)} = 0$.
On en deduit que $\overline{z_1} = -2 + i$ *et* $\overline{z_2} = -1 - i$ *sont des racines de* C. *Comme* C *est de degre 2, ce sont les seules.*
Enfin C *a pour coefficient dominant 2, donc la factorisation de* C *en polynômes irreductibles de* $\mathbb{C}$[X] *est* C$(x) = 2\,(x + 2 - i)\,(x + 1 + i)$.

4. *D'apres les questions 1, 2 et 3,* A(x) = B(x) C$(x) = 2\,(x + 2 + i)(x + 1 - i)(x + 2 - i)(x + 1 + i)$.
Or les polynômes $x^2 + 4x + 5 = (x + 2 + i)(x + 2 - i)$ *et* $x^2 + 2x + 2 = (x + 1 - i)(x + 1 + i)$ *sont des polynômes irreductibles de* $\mathbb{R}$[X] *car ils sont de degre 2 et sans racine reelle.*
Conclusion : la factorisation de A(x) *en polynômes irreductibles de* $\mathbb{R}$[X] *est*
A$(x) = 2\,(x^2 + 4x + 5)\,(x^2 + 2x + 2)$.

Exercice 6.
Determiner les limites suivantes en justifiant les resultats :

1. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + e^x}{3x^3 + 1}$,
2. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$,
3. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{ix} + 1}{x}$

4. $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln \sqrt{1+x} - 1$.

Correction :

1. Pour tout $x > 0$, $\mathrm{E}(x) := \dfrac{x^3 + e^x}{3x^3 + 1}$ *est de ni et* $\mathrm{E}(x) = \dfrac{e^x}{x^3} \dfrac{1 + \frac{x^3}{e^x}}{3 + \frac{1}{x^3}}$.

Quand $x \to +\infty$, *d'apres le theoreme de comparaison des fonctions puissances et exponentielle,* $\dfrac{e^x}{x^3} \to +\infty$. *De plus* $\dfrac{1}{x^3} \to 0$ *donc* $\dfrac{1 + \frac{x^3}{e^x}}{3 + \frac{1}{x^3}} \to \dfrac{1}{3}$.

Par consequent, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{E}(x) = +\infty$.

2. On pose $\mathrm{N}(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ *et* $\mathrm{D}(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

$\mathrm{N}(1) = \mathrm{D}(1) = 0$ *donc 1 est racine des polynômes* N *et* D. *On recherche la multiplicite de 1 dans chacun d'eux.*

$\mathrm{N}'(x) = 3x^2 - 4x - 1$ *donc* $\mathrm{N}'(1) = -2$. *On en deduit que* 1 *est racine simple de* N. *On note* Q *est le quotient de la division de* $\mathrm{N}(x)$ *par* $x - 1$. *On a* $\mathrm{N}'(x) = \mathrm{Q}(x) + (x-1)\,\mathrm{Q}'(x)$ *donc* $\mathrm{Q}(1) = \mathrm{N}'(1) = -2$.

Pour le denominateur, on reconnaît une identite remarquable $\mathrm{D}(x) = (x-1)^3$ *(on peut aussi calculer* $\mathrm{D}'(1)$ *qui est nul puis* $\mathrm{D}''(1)$, *nul aussi ;* 1 *est donc racine au moins triple et* D *est unitaire de degre 3 donc* $\mathrm{D}(x) = (x-1)^3$*).*

Finalement, pour tout $x \neq 1$, $\dfrac{\mathrm{N}(x)}{\mathrm{D}(x)}$ *est de ni et* $\dfrac{\mathrm{N}(x)}{\mathrm{D}(x)} = \dfrac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{Q}(x)$.

Or $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$, Q *est continu en 1 et* $\mathrm{Q}(1) = -2$ *donc* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\mathrm{N}(x)}{\mathrm{D}(x)} = -\infty$.

3. On pose $f(x) = e^{ix} + 1$. f *est une fonction reelle et bornee par* 0 *et* 2.

En e et, $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geqslant 0$ *et d'apres l'inegalite triangulaire,* $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{ix} + 1 \leqslant e^{ix} + |1| = 2$.

Pour tout $x > 0$, $\dfrac{f(x)}{x}$ *est de ni et* $0 \leqslant \dfrac{f(x)}{x} \leqslant \dfrac{2}{x}$.

D'apres le theoreme des gendarmes, on en conclut que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

4. On pose $g(x) = \ln \sqrt{1+x} - 1$.

Soit $x > 0$, $\sqrt{1+x} > \sqrt{1} = 1$ *car la fonction racine carree est strictement croissante sur* $\mathbb{R}^+$. *Il suit que* $\sqrt{1+x} - 1 > 0$ *et donc* $g(x)$ *est bien de ni.*

On a de plus $\sqrt{1+x} - 1 = \dfrac{(1+x) - 1}{\sqrt{1+x} + 1} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x} + 1}$.

Donc $x\,g(x) = x \ln(x) - x \ln \sqrt{1+x} + 1$.

D'apres le theoreme de comparaison des fonctions puissances et logarithme, $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$.

Par continuite du logarithme en 2, $\lim\limits_{x \to 0} \ln \sqrt{1+x} + 1 = \ln 2$ *donc* $\lim\limits_{x \to 0} x \ln \sqrt{1+x} + 1 = 0$.

On en conclut que $\lim\limits_{x \to 0^+} x\,g(x) = 0$.

Exercice 7.
Resoudre les systemes suivants (ou a est un parametre reel) par la methode du pivot de Gauss.

$$(S_1)\quad \begin{cases} x - ay = -1 \\ ax - y = 0 \end{cases} \qquad (S_2)\quad \begin{cases} x - y + 3z - 2t = 1 \\ 2x - 3y + 8z - 7t = 1 \\ 3x - y + 5z + 2t = 9\,. \end{cases}$$

Correction :

1. *On echelonne le systeme* (S_1) *par la methode de Gauss :*

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x & -ay & = & -1 & L_1 \\ & (a^2-1)y & = & a & L_2 - a\,L_1 \end{cases}$$

Cas 1 *:* $a \notin \{-1,1\}$. *Alors* $a^2 - 1 \neq 0$, *ce systeme echelonne est compatible et sans inconnue secondaire. Il admet donc une solution unique que l'on calcule par substitution :*

$$\begin{cases} x = -1 + ay = -1 + \dfrac{a^2}{a^2-1} = \dfrac{1}{a^2-1} \\ y = \dfrac{a}{a^2-1} \end{cases}$$

Cas 2 *:* $a \in \{-1,1\}$. *La deuxieme equation s'ecrit* $0 = a$ *or* a *est non nul donc le systeme est incompatible.*

2. *On echelonne le systeme* (S_2) *par la methode de Gauss :*

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x & -y & +3z & -2t & = & 1 & L_1 \\ & -y & +2z & -3t & = & -1 & L_2 - 2L_1 \\ & 2y & -4z & +8t & = & 6 & L_3 - 3L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & -y & +3z & -2t & = & 1 & L_1 \\ & y & -2z & +3t & = & 1 & -L_2 \\ & y & -2z & +4t & = & 3 & L_3/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & & +z & +t & = & 2 & L_1 + L_2 \\ & y & -2z & +3t & = & 1 & L_2 \\ & & & t & = & 2 & L_3 - L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & & +z & & = & 0 & L_1 - L_3 \\ & y & -2z & & = & -5 & L_2 - 3L_3 \\ & & & t & = & 2 & L_3 \end{cases}$$

Ce systeme echelonne est compatible et admet pour inconnue secondaire z. *On pose* $z = \lambda$.

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -5 + 2\lambda \\ t = 2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (S_2) *est donc* $D = \{(-\lambda, -5+2\lambda, \lambda, 2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
D *est la droite passant par le point* $A = (0,-5,0,2)$ *et dirigee par le vecteur* $\vec{v} = (-1,2,1,0)$.