Université Paris 7 Denis Diderot
MT1 (Algèbre et analyse élémentaires)
Groupe 1D4, 2008-2009

Feuille d'exercices 8

Exercice 1 On considère la fonction suivante sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue ? est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 2 On considère la fonction suivante sur $\mathbb{R}$:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Montrer que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer g'. La fonction $g'(x)$ a-t-elle de limite lorsque $x \to 0$?

Exercice 3 Calculer la dérivée d'ordre 1 des fonctions suivantes :

1) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$, $(x > 0)$, 2) $\ln \ln x$, $(x > 1)$,

3) $\ln \tan(x/2)$, $(0 < x < \pi)$, 4) $\cos(\cos \sqrt{x})$, $(x > 0)$.

Exercice 4 Soit f une fonction paire qui est dérivable en 0, montrer que $f'(0) = 0$.

Exercice 5 Soit f une fonction sur un intervalle ouvert I contenant 0. On suppose que f est dérivable en 0 et que $f(0) = 0$. On note, pour tout entier $n \geqslant 1$

$$x_n = f\Big(\frac{1}{n^2}\Big) + f\Big(\frac{2}{n^2}\Big) + \cdots + f\Big(\frac{n}{n^2}\Big).$$

Déterminer la limite de $(x_n)_{n \geqslant 1}$.

Exercice 6 Déterminer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \Big[\sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{2}{n^2} + \cdots + \sin \frac{n}{n^2}\Big]$,

2) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \Big(1 + \frac{1}{n^2}\Big)\Big(1 + \frac{2}{n^2}\Big) \cdots \Big(1 + \frac{n}{n^2}\Big)$.

Exercice 7 Calculer la dérivée d'ordre 1 des fonctions suivantes :

1) $\arcsin \sqrt{1 - x^2}$, $(0 < x < 1)$, 2) $\ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$, $(x \in \mathbb{R})$,

3) $\arctan(\tan(x)^2)$, $(-\pi/2 < x < \pi/2)$, 4) $e^{\sqrt{x}}$, $(x > 0)$.

Exercice 8 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui est dérivable en x_0. Soient $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites strictement positives qui convergent vers 0. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_0+\alpha_n) - f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n} = f'(x_0).$$

Exercice 9 Soient m et n deux entiers strictement positifs. Soit $f(x) = x^m(1-x)^n$ ($x \in [0,1]$). Montrer qu'il existe $\xi \in (0,1)$ tel que $m/n = \xi/(1-\xi)$.

Exercice 10 Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$ des nombres réels tels que

$$\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \cdots + a_n = 0.$$

Montrer que l'équation $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ admet au moins une racine sur $]0,1[$.

Exercice 11 Soit f une fonction dérivable sur $]a,+\infty[$, $a \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = A,$$

où $A \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\xi \in]a,+\infty[$ tel que $f'(\xi) = 0$.

Exercice 12 Montrer les assertions suivantes :

1) $|\sin b - \sin a| \leqslant |b-a|$,

2) $|\arctan(b) - \arctan(a)| \leqslant |b-a|$.

Exercice 13 1) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\cos\alpha = \alpha$. Prouver que $\alpha \in]0,1[$.

2) Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$. Montrer que $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \sin(1)|u_n - \alpha|$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers α.

Exercice 14 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a,b[$ $(a < b)$. On suppose que $f'(x)$ est une fonction monotone. Montrer que $f'(x)$ est continue sur $]a,b[$

Exercice 15 Soit f une fonction sur $[a,b]$ $(a < b)$, qui est dérivable sur $]a,b[$. On suppose que f admet une dérivée à droite en a et une dérivée à gauche en b. On suppose de plus que $f'(a) < f'(b)$. Alors pour tout $\eta \in]f'(a), f'(b)[$, il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $f'(\xi) = \eta$.

Exercice 16 Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ qui est dérivable sur $]a,b[$ $(0 < a < b)$. Montrer qu'il existe $\xi \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = \xi(\ln b - \ln a)f'(\xi).$$