

Feuille d'exercices 6

Exercice 1 Montrer, en utilisant seulement la définition de la limite, que la suite $n/(n+2)$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 Etudier les convergences des suites suivantes ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Dans le cas où la suite est convergente, déterminer sa limite.

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 3n + 1} & 2) \frac{1}{n} + (-1)^n & 3) \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n} \\ 4) \frac{n}{2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) & 5) \frac{2 - (-1)^n}{n + \cos n} & 6) \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \end{array}$$

Exercice 3 Déterminer les limites des suites suivantes :

$$\begin{array}{l} 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1 + a + \dots + a^{n-1}} \quad (a > 0); \\ 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right); \\ 3) \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} \quad (0 < a < 1); \\ 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} \quad (a > 1, k > 0). \end{array}$$

Exercice 4 Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres complexes qui converge vers $a \in \mathbb{C}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$.

Exercice 5 Soient $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ deux suites convergentes de limites a et b respectivement. Montrer que

$$\begin{array}{l} 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \max(x_n, y_n) = \max(a, b); \\ 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \min(x_n, y_n) = \min(a, b). \end{array}$$

Exercice 6 Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ la suite définie récursivement par $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + 1/x_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Exercice 7 Déterminer la limite de la suite

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$$

Exercice 8 Soient a_1 et b_1 deux nombres réels tels que $0 < a_1 < b_1$. Soient $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ deux suites définies récursivement par

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad n \geq 1.$$

Montrer que les deux suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ convergent vers la même limite.

Exercice 9 Soit $n \geq 1$ un entier. Montre que

- 1) $(1 + \frac{1}{n-1})^n > (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$;
- 2) $(1 + \frac{1}{n-1})^{n-1} < (1 + \frac{1}{n})^n$;
- 3) $(1 + \frac{1}{n})^n < 4$;
- 4) $\frac{1}{n+1} < \log(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$.

Exercice 10 Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n.$$

Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge dans \mathbb{R} . En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2.$$

Exercice 11 Soient $A > 0$ et $x_1 \in]0, 1/A[$. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ la suite définie récursivement par $x_{n+1} = x_n(2 - Ax_n)$. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 12 Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante et telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. Soit

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

- 1) Montrer que la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
- 2) Montrer que $b_{2n} \leq \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ quel que soit $n \geq 1$.
- 3) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.

Exercice 13 Soient $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite qui converge vers $a \in \mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $y_n = x_{\phi(n)}$. Montrer que la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ converge aussi vers a .