PF1 — Principes de Fonctionnement des machines binaires

Jean-Baptiste Yunès
Jean.Baptiste.Yunes@univ-paris-diderot.fr

26/9/2014

Les nombres en machine

- On ne manipule que rarement de très très très grand nombres ou des nombres avec une précision arbitrairement grande

  - des choix sont faits pour faciliter l'utilisation des nombres courants

  - leur représentation est de taille fixe…

- Sur les ordinateurs on utilise la base 2

  - l'électronique s'y prête bien…

- $2^{32} \approx 4.10^9$ (4 milliards)
- $2^{64} \approx 18.10^{18}$ (18 trillions)
- pour info
  - 10^{80} atomes dans l'univers
  - environ 10^{23} grains de sable sur terre,
  - le nombre d'Avogadro est environ 10^{23}
  - environ 10^{13} cigarettes fumées chaque année dans le monde
  - environ 10^{15} µ-secondes par siècle
  - environ 10^{13} $ de masse monétaire
  - PIB mondial $\approx 72.10^{12}$ $

- Aujourd'hui les machines sont couramment à architecture 32 ou 64 bits

    - Cela signifie, entre autres, que leur arithmétique interne opère uniquement sur des nombres représentés sur 32 ou 64 bits (respectivement).

- Étudions l'arithmétique sur n bits (où n est fixé)…

- Si on prend 32 bits on peut écrire 2^{32} mots binaires différents

- il suffit de choisir quels nombres ces 2^{32} mots représentent

  - insistons sur le fait que le choix peut être aussi arbitraire que l'on souhaite…

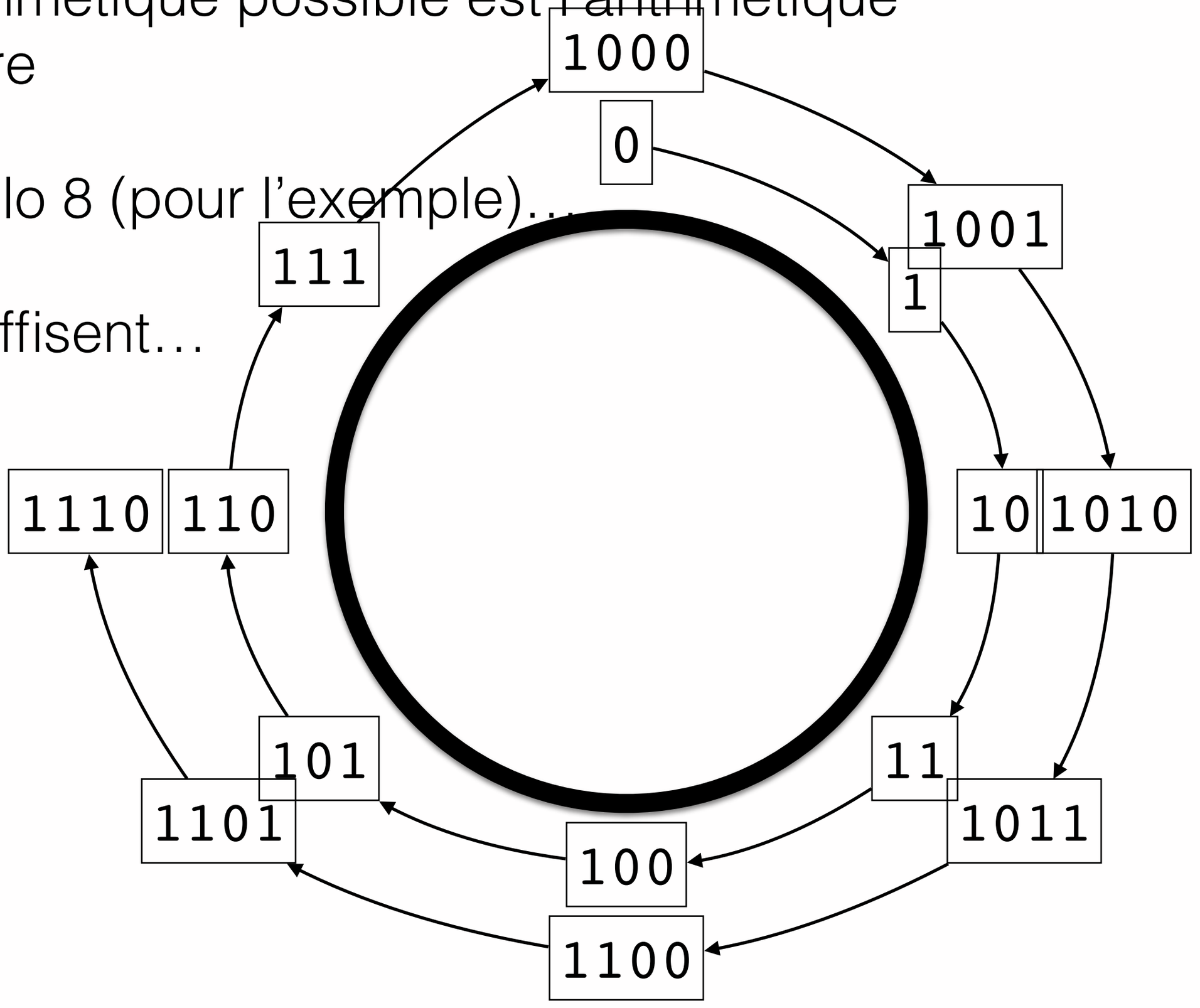
  - en pratique on essaie d'établir une correspondance pratique entre les mots binaires et la représentation en base 2 des nombres (inutile de trop se compliquer la vie)

ordre du dictionnaire avec 0<1

Mots sur {0,1}	$(\text{Nombre})_2$	$(\text{Nombre})_{10}$
00000000000000000000000000000000	0	0
00000000000000000000000000000001	1	1
00000000000000000000000000000010	10	2
00000000000000000000000000000011	11	3
…	…	…
11111111111111111111111111111110		4294967294
11111111111111111111111111111111		4294967295

- Cette représentation est celle des entiers non signés…
  - Le langage C autorise la définition de variables entières non signées, par exemple **`unsigned int`**

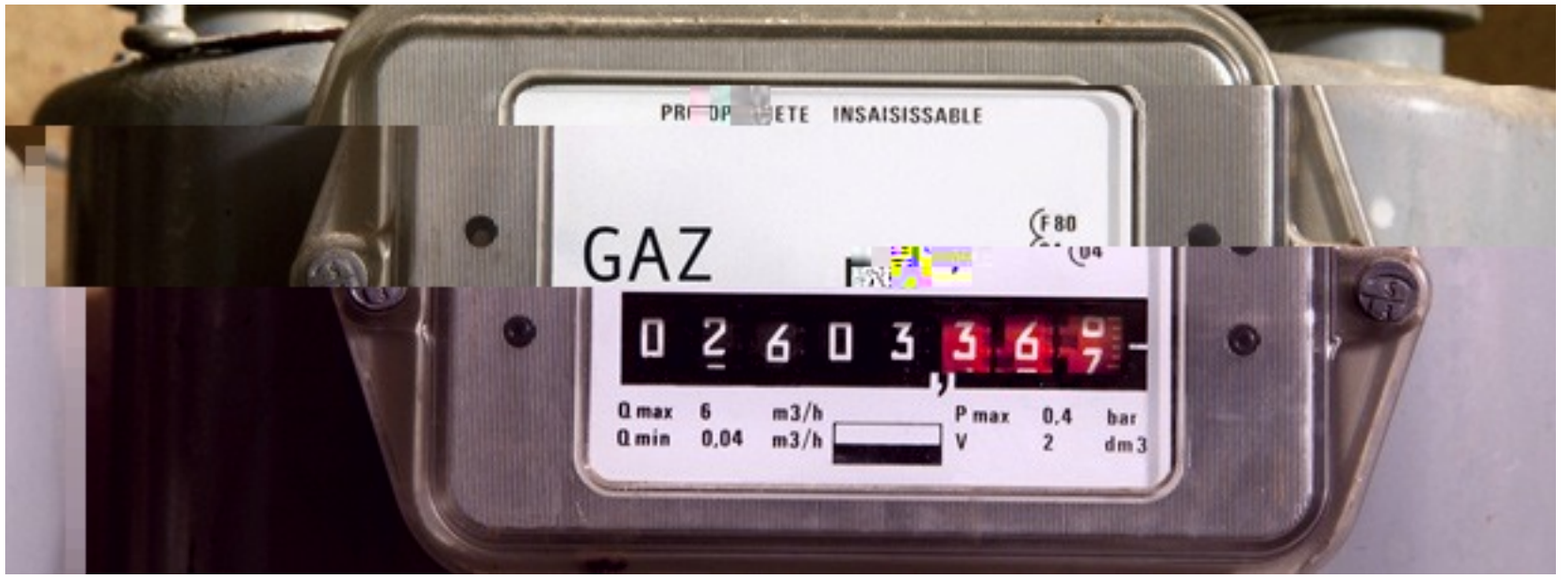
- Une arithmétique possible est l'arithmétique modulaire
- ici modulo 8 (pour l'exemple)…
- 3 bits suffisent…

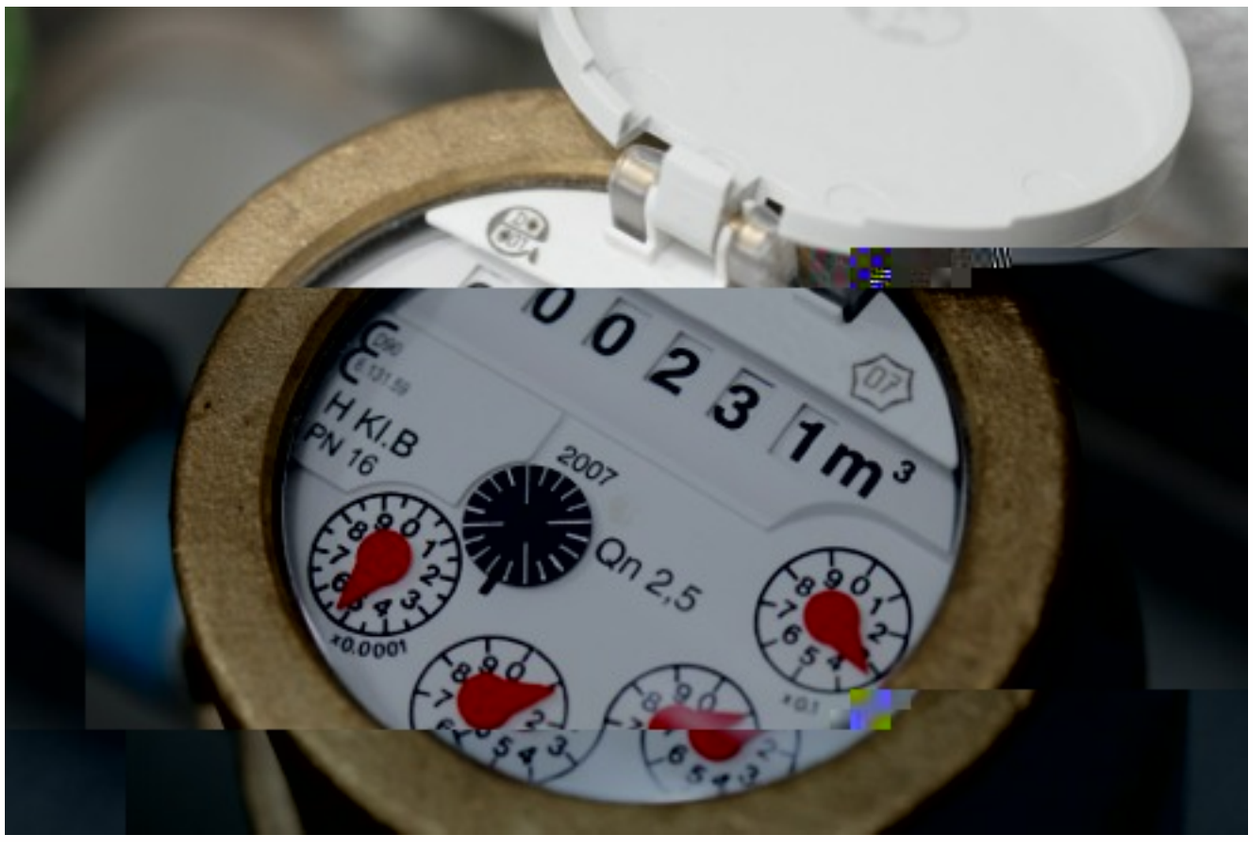


- Qu’est ce que l’arithmétique est modulaire ?
  - C’est l’arithmétique dans laquelle on ne s’intéresse pas aux nombres eux-mêmes mais à leurs restes par la division euclidienne
    - dans l’arithmétique modulo p (pour p fixé), les nombres i+kp (avec $0 \leq i < p$) sont tous équivalents.
      - ex: $13 \equiv 5 \pmod 8$

- On en a l’habitude avec les horloges…
  - pour les heures on compte modulo 12
    - combien a t-on mesuré ? 1:53 ? 13:53 ? 25:53 ?

- Idem avec les odomètres et autres compteurs variés





- L’arithmétique modulaire (mod 2^3)
  - Certaines opérations provoquent un échappement de retenue ou l’entrée d’une retenue
  - 111+010 donne 001 retenue 1 (que l’on peut oublier)
    - 7+2 = 1 (mod 8)
  - 000 - 010 donne 110 retenue 1 (que l’on peut oublier)
    - 0-2 = 6 (mod 8)
- Une retenue représente le « passage d’un tour »

- Si on veut prendre des valeurs négatives le problème se complique ? **S**$c_{30}c_{29}\ldots c_1c_0$
  - ok un bit pour le signe (disons 0 pour + et 1 pour -) et 31 bits pour la valeur absolue…

11111111111111111111111111111111	$-2^{31}-1$
11111111111111111111111111111110	$-2^{31}-2$
11111111111111111111111111111101	$-2^{31}-3$
…	
10000000000000000000000000000011	-3
10000000000000000000000000000010	-2
10000000000000000000000000000001	-1
10000000000000000000000000000000	0
00000000000000000000000000000000	+0
00000000000000000000000000000001	+1
00000000000000000000000000000010	+2
00000000000000000000000000000011	+3
…	
01111111111111111111111111111110	$+2^{31}-2$
01111111111111111111111111111111	$+2^{31}-1$

- problème : il y a deux zéros -0 et +0
    - pas grave en soi, mais pour les opérations arithmétiques c'est embêtant…
- autre problème : le calcul du successeur (+1) pour les négatifs n'est pas le même que pour les positifs…
    - l'arithmétique est plus compliquée

- Pour additionner il faut tenir compte des signes et faire des opérations différentes
- 0000 + 1 = 0001 (0+1=1)
- 1010 + 1 = 1001 (-2+1=-1) il faut soustraire 1!!!
- 0010 + 1010 = 0 (2+-2=0) est en fait une soustraction!
- Trop complexe, pas assez uniforme

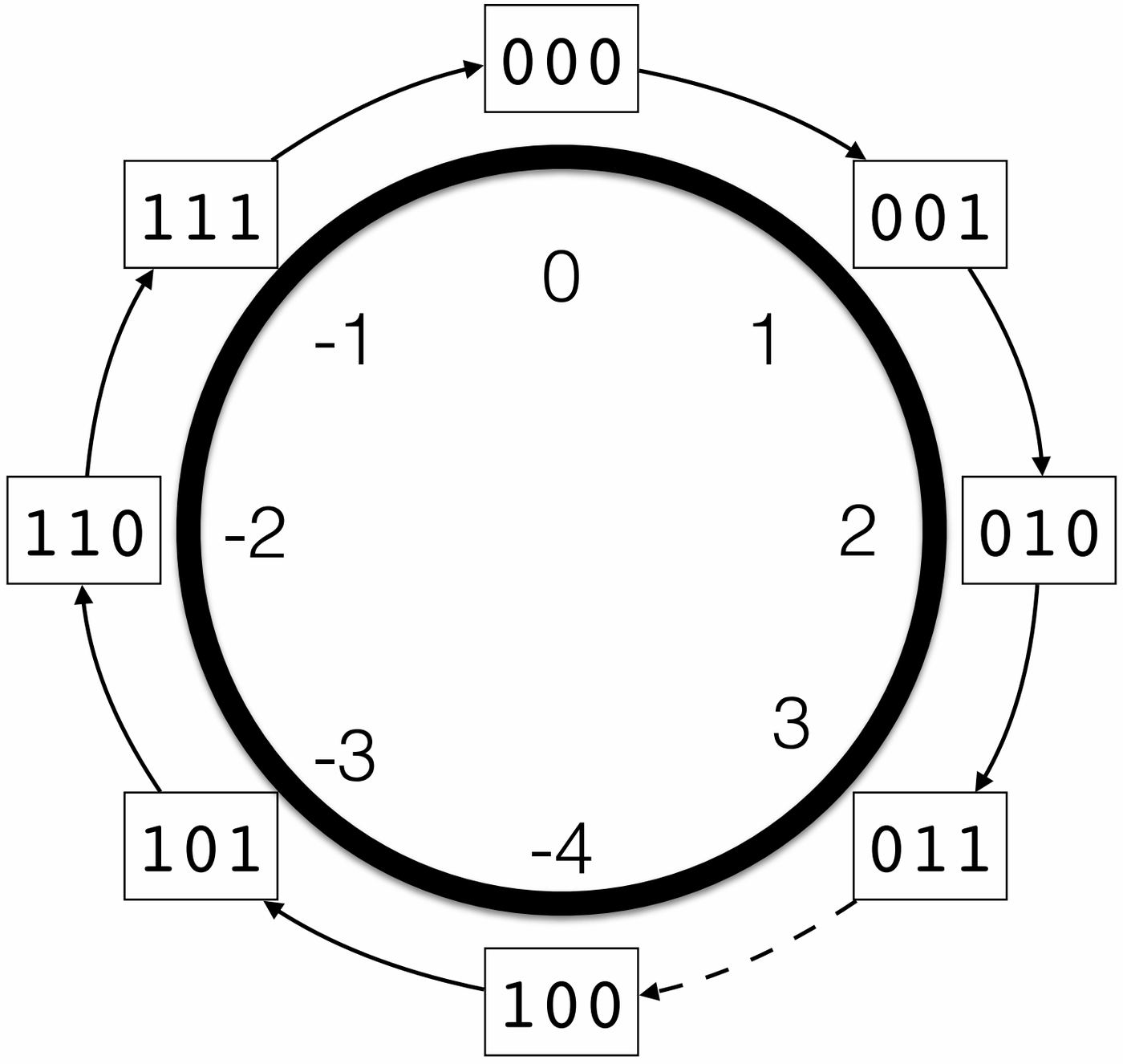
- Une autre façon de voir (la bonne ? celle utilisée!)
  - partir de la représentation naturelle du 0 et ajouter 1 et retrancher 1.

mots

10000000000000000000000000000000	-2^{31}
10000000000000000000000000000001	$-2^{31}+1$
10000000000000000000000000000010	$-2^{31}+2$
10000000000000000000000000000011	$-2^{31}+3$
…	
11111111111111111111111111111101	-3
11111111111111111111111111111110	-2
11111111111111111111111111111111	-1
00000000000000000000000000000000	0
00000000000000000000000000000001	1
00000000000000000000000000000010	2
00000000000000000000000000000011	3
…	
01111111111111111111111111111110	$2^{31}-2$
01111111111111111111111111111111	$2^{31}-1$

entiers relatifs $[-2^{31}, 2^{31}-1[$

- L’arithmétique obtenue est modulaire



- le signe est aussi indiqué par le bit à gauche!
- un seul 0 (qui est positif donc)
- l’arithmétique est plus uniforme

- cette représentation est dite en complément à deux (en fait complément à 2 puissance 32, on passe sous silence la longueur des mots)
    - car pour $0 \leq n < 2^{31}$, -n est représenté par le codage de 2^{32}-n (le complément à 2^{32})
- Si le complément a deux paraît bizarre de prime abord les opérations arithmétiques, elles, sont assez simples
    - Il suffit de procéder normalement!
- On l'a déjà vu, ce sont les nombres avec une infinité de 0 ou 1 à gauche. Il suffit de les tronquer…

Addition en complément à deux

- on utilisera le complément à 2^{16}

7823 + 273 ?

retenues

```
                 11111
     0001111010001111
+    0000000100010001
-----------------------
     0001111110100000     8096
```

- normal, des 0 à gauche ne changent rien!

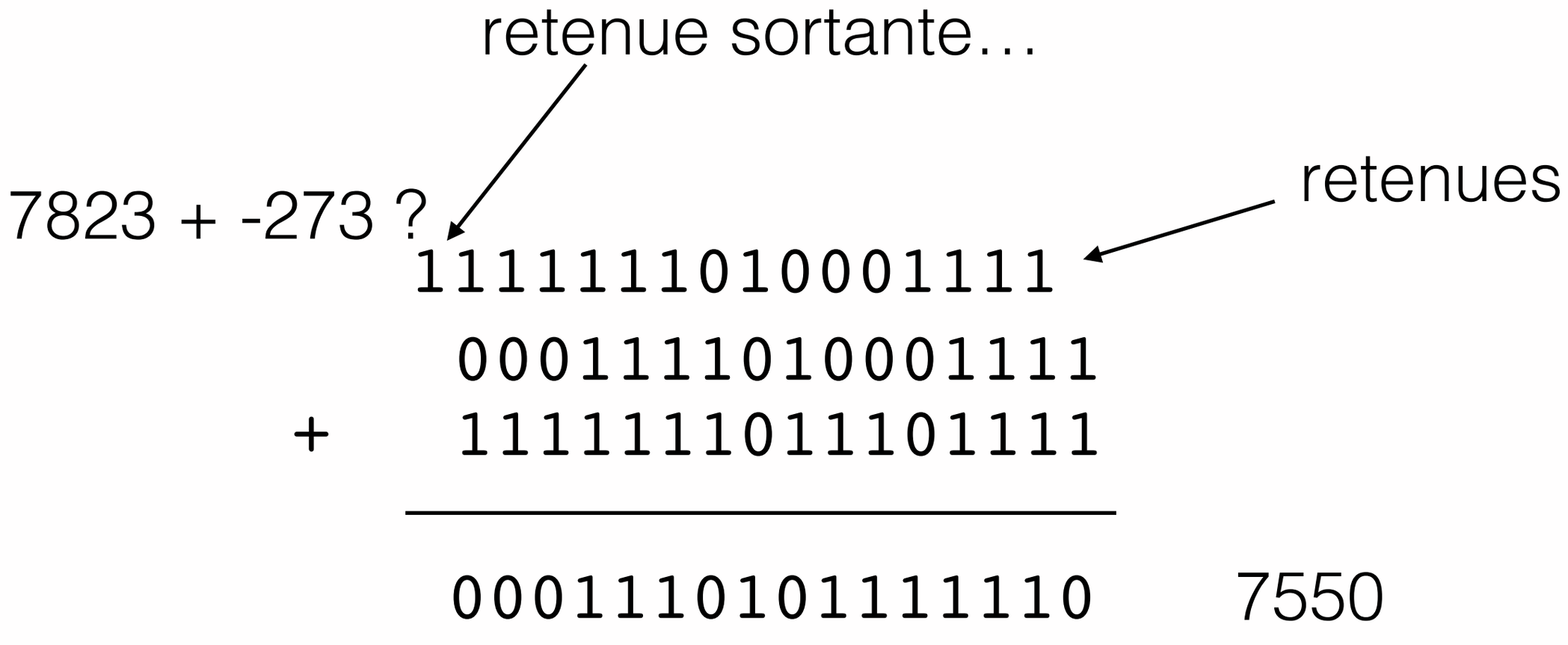
retenue sortante…

retenues

-7823 + -273 ?

```
  1111111111111111
   1110000101110001
+  1111111011101111
-------------------
 1110000001100000     -8096
```

- ça marche!
  - normal, les 1 à gauche (le signe) sont conservés…


retenue sortante…
retenues
7823 + -273 ?
1111111010001111
0001111010001111
+ 1111111011101111
0001110101111110
7550

- ça marche!

-7823 + 273 ?

retenues

101110001

1110001010000010

- ça marche!

- À quelles conditions cette opération d'addition marche t-elle ?
  - ben quand la somme n'est pas représentable…
  - calculons $(2^{15}-1)+1$

```
  1111111111111111
+ 0111111111111111
------------------
  0000000000000001
```

  - -2^{16}? → `1000000000000000`

- c'est l'arithmétique modulaire…

- Regardons en Java, pour voir si le problème apparaît…

```
public class T {
  public static void main(String []args) {
    int a = 0x7FFFFFFF;
    int b = 1;
    System.out.println(a+"+"+b+"="+(a+b));
  }
}
```

```
yunes% java T
2147483647+1=-2147483648
yunes%
```

Soustraction en complément à deux

- on utilisera le complément à 2^5 pour éviter la lourdeur des calculs

7 - 4 ?

```
   00111
-  00100
-------
   00011
```

- ça marche!

7 + -4

```
   00111
+  11100
-------
   00011
```

4 - 7 ?

```
  00100
- 00111
-------
  11101
```

- ça marche!

4 + -7

```
  00100
+ 11001
-------
  11101
```

7 - -4 ?

```
  00111
- 11100
-  11
-------
  01011
```

- ça marche!

7 + 4

```
  00111
+ 00100
-------
  01011
```

4 - -7 ?

```
  00100
- 11001
  11011
-------
  01011
```

- ça marche!

Détection d'erreurs

- Comment savoir si une opération a fourni un résultat correct ?

- On est dans l'arithmétique modulaire, les grands nombres sont « réduits » à leur reste modulo…

- Cela dépend si l'on fait de l'arithmétique signée ou non…

- Pour l’arithmétique non signée il suffit d’observer la retenue qui « sort »
  - pour l’addition c’est la retenue sortante
  - pour la soustraction c’est la retenue entrante
- Si la retenue en question est 1, il y a une erreur!
- Sinon l’opération est correcte

```
   01000    8
 - 11001   25
  11111  ret
-------------
   01111   15
```

```
   01000    8
 - 11000   24
  10000  ret
-------------
   10000   16
```

```
   11000   24
 - 01010   10
   1110  ret
-------------
   01110   14
```

```
   11000   24
 - 01000    8
   0000  ret
-------------
   10000   16
```

- Pour l'arithmétique signée il suffit d'observer les signes des opérandes et du résultat
  - pour l'addition additionner deux nombres positifs ne peut pas donner un nombre négatif et additionner deux négatifs ne peut donner un positif
  - pour la soustraction (x-y=x+(-y)) soustraire un positif à un négatif ne peut donner un positif et soustraire un négatif à un positif ne peut donner un négatif!
- Il suffit donc d'observer les signes…

```
  01000    8          01000    8
- 11001   -7        - 11000   -8
  11111   ret         10000   ret
-------------      -------------
  01111   -1          10000  -16
```

```
  11000   -8          11000   -8
- 01010   10        - 01000    8
  1110    ret         0000    ret
-------------      -------------
  01110   14          10000  -16
```

Types des nombres…

- Chaque langage définit des types entiers permettant de réaliser des calculs arithmétiques

- Qu’est-ce que c’est **un type** ?

- C : `cha` , `ho` , `in` , `long`, `long long`, `n igned cha` , `n igned ho` , `n igned in` , `n igned long`, `n igned long long`

- Java : `b e`, `ho` , `in` , `long`, `cha`

- Le type d'une variable permet de fixer

  - sa **taille** en mémoire

  - l'**interprétation** du mot binaire correspondant

  - l'ensemble des **opérations** légales et leur sémantique

- La bonne maîtrise d'un langage suppose la bonne maîtrise des types de base
    - Attention, c'est souvent négligé…à tort!
- On étudiera ces types petit à petit, ils sont plus complexes qu'on ne croit généralement

- Exemple pour Java, le type `int` (entiers ordinaires)
  - utilise des mots de 32 bits (chiffres binaires)
  - une représentation en complément à 2
  - permet l'addition, soustraction, multiplication, etc

```
in     = 367898;
in     = -48747799;
S    em.o   .p in ln( );
S    em.o   .p in ln( );

in     =   + ;
S    em.o   .p in ln( );

   =   - ;
S    em.o   .p in ln( );

   =   * ;
S    em.o   .p in ln( );

 ++; //  ajo  e 1     ,  q.    =    + 1;
S    em.o   .p in ln( );
```

- Attention! Si les machines détectent en interne les erreurs arithmétiques, la plupart des langages de programmation ne répercutent pas celles-ci à l'utilisateur…
    - Il faut être **conscient** de ces problèmes
        - Difficile!
            - Source fréquente de bogues…

```
int joe      =0 222222222;
```

- Exemple pour Java, le type **`byte`** (petits entiers)
  - utilise des mots de 8 bits (chiffres binaires)
  - une représentation en complément à 2
  - permet l'addition, soustraction, multiplication, etc

```
byte x = 0xE2;

x++;
System.out.println(x);

x++;
System.out.println(x);

x++;
System.out.println(x);

x++;
System.out.println(x);
```

- Les types entiers de Java

	taille en octets	taille en bits	représentation	+petite valeur	+grande valeur
byte	1	8	comp. 2	-128	+127
short	2	16	comp. 2	-32768	+32767
int	4	32	comp. 2	-2147483648	+2147483647
long	8	64	comp. 2	-9223372036854775808	+9223372036854775807