PF1 — Principes de Fonctionnement des machines binaires

Jean-Baptiste Yunès
Jean.Baptiste.Yunes@univ-paris-diderot.fr

4/9/2014

Faire des opérations

- Savez-vous faire des additions en base b ?
- Des soustractions ?
- Des multiplications ?

- Rappelons-nous que pour cela il nous faut des tables
  - les tables d’addition
  - les tables de multiplication

- En base 16 :

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

- En base 16 :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

- Tentons une addition

retenues

```
   11
 18A4
+  7C
 ----
 1920
```

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

- Tentons une soustraction

```
  18A4
-   7C
    1
------
  1828
```

retenues

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

- Tentons une multiplication

```
      18A4
X       7C
----------
     127B0
     AC7C•
----------
     BEF70
```

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	
															14	
															15	
															16	
															17	
															18	
															19	
															1A	
															1B	
															1C	
															1D	

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

- En base 2 c’est facile :

+	0	1
0	0	1
1	1	10

x	0	1
0	0	0
1	0	1

- Tentons une addition

retenues

```
 0000100111100
  1010100110111
+       110101100
_________________
  1011011100011
```

+	0	1
0	0	1
1	1	10

- Tentons une soustraction

```
   1010100110111
-      110101100
     111   1
   _____________
   1001110001011
```

retenues

+	0	1
0	0	1
1	1	10

- Tentons une multiplication

```
      1010100110111
x             11010
-------------------
      0000000000000
     1010100110111•
    0000000000000••
   1010100110111•••
  1010100110111••••
-------------------
 100010011110010110
```

+	0	1
0	0	1
1	1	10

x	0	1
0	0	0
1	0	1

Outils…

- l’outil **`bc`**
    - une calculatrice
    - un langage de programmation pour calculer…

La « preuve par 9 »

- Connaissez-vous la preuve par 9 ?
  - c'est un moyen de vérification de la validité d'une opération arithmétique
  - Attention, si la « preuve par 9 » ne fonctionne pas l'opération est fausse, mais si la « preuve par 9 » fonctionne l'opération est **peut-être** vraie

- Comment ça marche ?
  - il suffit de vérifier que modulo 9 l’opération fonctionne…
    - il suffit de vérifier qu’avec les restes de la division par 9, ça fonctionne
  - 1345*2345 = 3154025 ?
  - c’est peut-être correct car
    - $(1+3+4+5)*(2+3+4+5)\equiv(3+1+5+4+0+2+5) \pmod 9$
    - $13*14\equiv20 \pmod 9$
    - $(1+3)*(1+4)\equiv(2+0) \pmod 9$
    - $4*5\equiv2 \pmod 9$
    - $20\equiv2$ (mod 09)
    - $(2+0)\equiv2 \pmod 9$
    - ça doit être bon!

- La preuve par 9 fonctionne sur l'addition, la soustraction, la division, etc
    - pour aller plus vite on peut ignorer les chiffres 9…
-

Critère de divisibilité

- On en connaît quelques exemples
  - divisibilité par 2
    - l'écriture du nombre doit terminer par 0, 2, 4, 6, ou 8
  - divisibilité par 3
    - la somme des chiffres du nombre doit être divisible par 3 (on réitère si nécessaire)

- pour la divisibilité par 2 c'est trivial puisque si n s'écrit $a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0$ n=(a

- il existe une méthode générale pour trouver un critère de divisibilité par p (entier quelconque)

- regardons simplement pour 7 (par exemple)

    - $20 \equiv 6 \pmod 7$ et $20 = 10 \times 2$

    - $n=(a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1)\times 10+a_0 \equiv 0 \pmod 7$

    - ssi $2n=(a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1)\times 20+2a_0 \equiv 0 \pmod 7$

    - donc ssi $6\times(a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1)+2a_0 \equiv 0 \pmod 7$

777	778
6*77+2*7	6*77+2*8
476	478
6*47+2*6	6*47+2*8
294	298
6*29+2*4	6*29+2*8
182	190
6*18+2*2	6*19+2*0
112	114
6*11+2*2	6*11+2*4
70	74

- plus intéressant (toujours pour 7)
  - $50 \equiv 1 \pmod 7$ et $50 = 10 \times 5$
  - $n = (a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1) \times 10 + a_0 \equiv 0 \pmod 7$
  - ssi $5n = (a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1) \times 50 + 5a_0 \equiv 0 \pmod 7$
  - donc ssi $(a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1) + 5a_0 \equiv 0 \pmod 7$

```
777
77+5*7
112
11+5*2
21
```

```
778
77+5*8
117
11+5*7
46
```

- Vous voulez jouer avec le critère de divisibilité ?
- essayez de vérifier si 5316123 est divisible par 111 ?
  - remarquez simplement que $100 \times 10 = 1000 \equiv 1 \pmod{111}$, c’est-à-dire que $1000 = 9 \times 111 + 1$

- Critère de divisibilité par 11
  - $10 \times 10 = 100 \equiv 1 \pmod{11}$

```
9636
963+60
1023
102+30
132
13+20
33
```

- mais aussi
  - $10 \equiv -1 \pmod{11}$
  - donc $-1 \times (a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1)+a_0 \equiv 0 \pmod{11}$
  - $(a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1)-a_0 \equiv 0 \pmod{11}$

```
9636
963-6
957
95-7
88
```

- mais encore
  - $10 \equiv -1 \pmod{11}$, $100 \equiv 1 \pmod{11}$, $1000 \equiv -1 \pmod{11}$, etc
  - $\ldots+1000a_3+100a_2+10a_1+a0 \equiv 0 \pmod{11}$
  - ssi $\ldots-a3+a2-a1+a0 \equiv 0 \pmod{11}$

```
9636
6+6-9-3
0
```

- Q: critère de divisibilité en base 7, nombre divisible par 7 ?
- Q: critère de divisibilité en base 12, nombre divisible par 6 ? par 2 ? par 3 ? par 4 ?

Les nombres qui ne sont pas des entiers…

- les fractions, c’est simple, il s’agit de simples couples d’entiers, donc pas de problèmes particuliers
  - si ce n’est les opérations arithmétiques qui nécessitent des attentions particulières… (même dénominateur…)

- les décimaux (attention les fractions ne sont pas des décimaux, les décimaux sont des fractions dont le dénominateur est puissance de 10)
  - pour la partie entière pas de problème : comme avant
  - pour la partie décimale il faut utiliser le processus symétrique
    - on va multiplier par deux garder la partie entière, puis recommencer jusqu’à épuisement

$$0{,}296875 \times 2 = 0{,}593750$$
$$0{,}59375 \times 2 = 1{,}18750$$
$$0{,}1875 \times 2 = 0{,}3750$$
$$0{,}375 \times 2 = 0{,}750$$
$$0{,}75 \times 2 = 1{,}50$$
$$0{,}50 \times 2 = 1{,}0$$

$$0{,}296875 = (0{,}010011)_2$$

- Attention : ceci ne termine pas à tous les coups…
- $0,1 \rightsquigarrow 0,2 \rightsquigarrow 0,4 \rightsquigarrow 0,8 \rightsquigarrow 1,6 \rightsquigarrow 1,2 \rightsquigarrow 0,4 \rightsquigarrow 0,8\ldots$
- $0,1 = (0,00011001100110011\ldots0011\ldots)_2$
- on représente la répétition infinie de manière plus symbolique à l'aide du symbole ω et parfois * :
  - 0,1 s'écrit $0,0(0011)^\omega$ en base 2
- l'écriture (finie en base 10) de 0,1 est infinie (périodique) en base 2…

- 1/7
- périodique en base 10
- fini en base 7

- La **notation scientifique** consiste à écrire x réel sous la forme
  - $\pm a.10^n$
  - où $a \in [1;10[$ et $n \in \mathbf{Z}$
  - 65,345 s'écrit $6{,}5345.10^1$
  - 0,045 s'écrit $4{,}5.10^{-2}$

- La **notation en virgule flottante** que l'on utilisera plus loin est une variante de la notation scientifique

- x réél s'écrit $\pm m.10^n$

- où $m \in [0,1;1[$ et $n \in \mathbf{Z}$, m est appelé la mantisse

- ainsi 65,345 s'écrit $0,65345.10^2$

- et 0,045 s'écrit $0,45.10^{-1}$

- on peut donc les représenter sous la forme d'un couple (m,n) : (65345,2) et (45,-1) par exemple…

- Attention 0 a pour mantisse 0, l'exposant est non significatif…

Jouons avec les écritures…

- Infinité de chiffres à gauche…

- On sait qu'on peut mettre autant de zéro qu'on veut à gauche d'une écriture, même une infinité (si on accepte l'existence d'un tel infini) ok…

- Jouons un peu : quel est le nombre qui ajouté à 1 fait 0 ?

  - Tout le monde sait qu'il s'agit du nombre noté -1

  - Mais en utilisant l'addition/soustraction standard ?

$$
\begin{array}{lr}
 & 1 \\
+ & ? \\
\hline
 & 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lr}
 & \ldots 000000001 \\
+ & \ldots 999999999 \\
\hline
 & \ldots 000000000
\end{array}
$$

- On sait qu’on peut mettre autant de zéro qu’on veut à gauche d’une écriture, même une infinité (si on accepte l’existence d’un tel infini) ok…
- Jouons un peu : quel est le nombre qui ajouté à 2 fait 0 ?
  - Tout le monde sait qu’il s’agit du nombre noté -2
  - Mais en utilisant l’addition/soustraction standard ?

$$
\begin{array}{lr}
 & 2 \\
+ & ? \\
\hline
 & 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lr}
 & \ldots 000000002 \\
+ & \ldots 999999998 \\
\hline
 & \ldots 000000000
\end{array}
$$

- donc (en base 10)
  - une infinité de 0 à gauche : nombre positif
    - cette infinité de 0 est généralement ignorée mais parfois écrite à l’aide du signe +
  - une infinité de 9 à gauche : nombre négatif (il faudrait mieux préciser mais peut importe ici)
    - cette infinité est généralement notée à l’aide du signe -

- En base 2 ?

$$
\begin{array}{rr}
 & 101 \\
+ & ? \\
\hline
 & 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr}
 & \ldots 0000101 \\
+ & \ldots 1111011 \\
\hline
 & \ldots 0000000
\end{array}
$$

$$\ldots 1111011 = -1$$

- En base 3 ? 5 ?

- Et les nombres qui ne sont pas des entiers ?

- Et bien leur écriture pose des problèmes, par exemple les réels :

  $x=0,9999999\ldots$?

  $$10x-x = 9,999999\ldots - 0,999999\ldots = 9$$

  donc

  $$x = 1$$

- pas d'écriture positionnelle unique des réels (quelle que soit la base)

```
      ...0000101
x            ...?
-----------------
      ...0000001
```

- Et si on tente les inverses ?

```
          ...0000101
x   ...0011001101101
--------------------
                 101
               1
               000
             1
              101
            1
             101
           1
            000
          1
           000
         1
          101
        1
         101
       1
        000
       000
...
--------------------
          ...0000001
```