PF1 — Principes de Fonctionnement des machines binaires

Jean-Baptiste Yunès
Jean.Baptiste.Yunes@univ-paris-diderot.fr

4/9/2014

- numération
- numération en machine
- numérisation
- compression
- calcul propositionnel
- circuits
- assembleur

- (3 séances) numération + numération en machine
- (2 séances) numérisation + codage / compression
- (2 séances) calcul propositionnel
- (2 séances) circuits combinatoires
- (2 séances) assembleur

Numération

- représentation des nombres
- cardinaux, ordinaux
  - un, deux, trois, quatre
  - premier, deuxième, troisième, quatrième

- le système des objets témoins
  - compter avec des cailloux
    - un caillou, un objet de la collection
- pas pratique pour les grands nombres!
  - on regroupe par paquets, paquets de paquets, etc
    - la taille d’un paquet est habituellement uniforme
      - mais pas toujours

- numération égyptienne

- additive, on ajoute les éléments du mot représentant le nombre

1	10	100	1000	10000	100000	1000000
						
bâton	os	corde	lotus	doigt	têtard	Heh

- ? [redacted]

- numération romaine
- essentiellement additive
- soustractive : un chiffre de valeur plus petite que celui placé à sa droite doit être retranché à celui-ci

1	5	10	50	100	500	1000
I	V	X	L	C	D	M

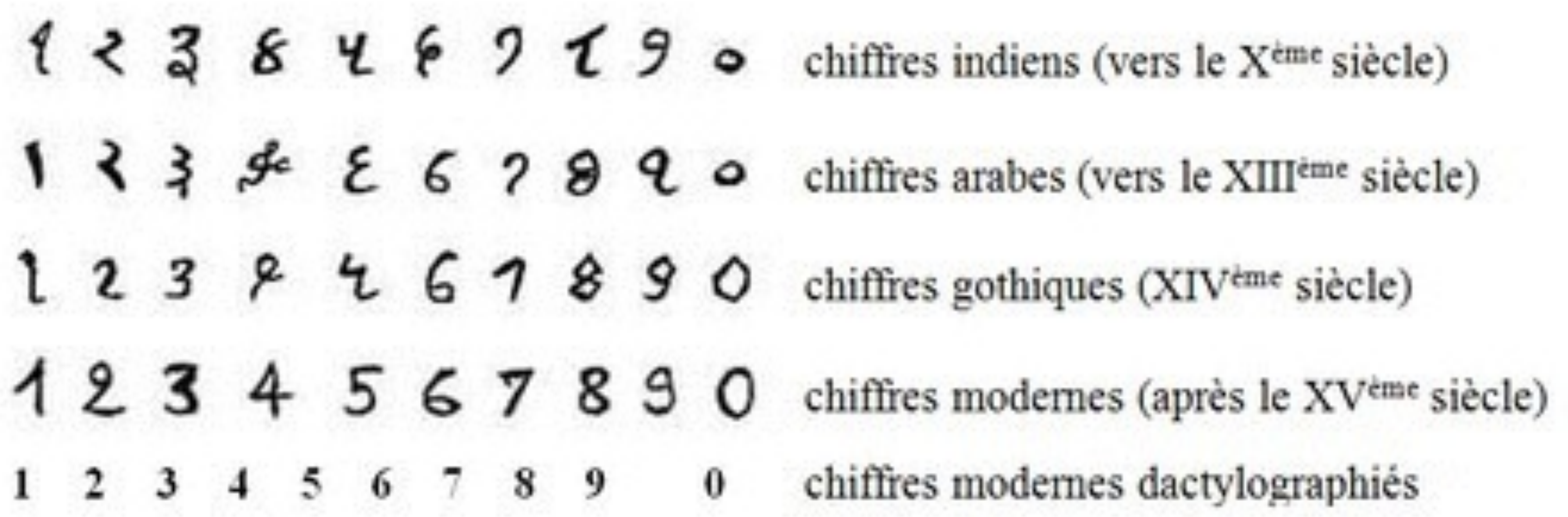
- numération positionnelle
- une grande invention…
- la position du chiffre dans le mot modifie sa contribution (paquets de paquets, de paquets,…)
  - dans « 2 » le 2 représente deux unités, soit 2x1 ou encore 2×10^0
  - dans « 5000 » le 5 représente cinq milliers, soit 5×10^3 où 3 est la position à partir de la droite…

- pour une base b>0
  - il y a b **symboles** utilisés comme **chiffres** 0,1,2…,b-1
    - attention 0 (par exemple) désigne soit un nombre soit un chiffre (qui n'a pas de valeur en soi)
- en notation positionnelle de gauche à droite
  - le mot $a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0$ représente le nombre $\sum_{i=0}^{n-1} a_i b^i$

10^3 10^2 10^1 10^0

- 2849 = 2x1000 + 8x100 + 4x10 + 9x1

- historique de l’écriture des chiffres



- Binaire : base 2 (Océanie, ordinateurs)
  - il y a 10 types de personnes, ceux qui connaissent la base 2 et les autres (folklore informatique)
- Octal : base 8 (Mexique, ordinateurs)
  - 0777
- Décimal : système international

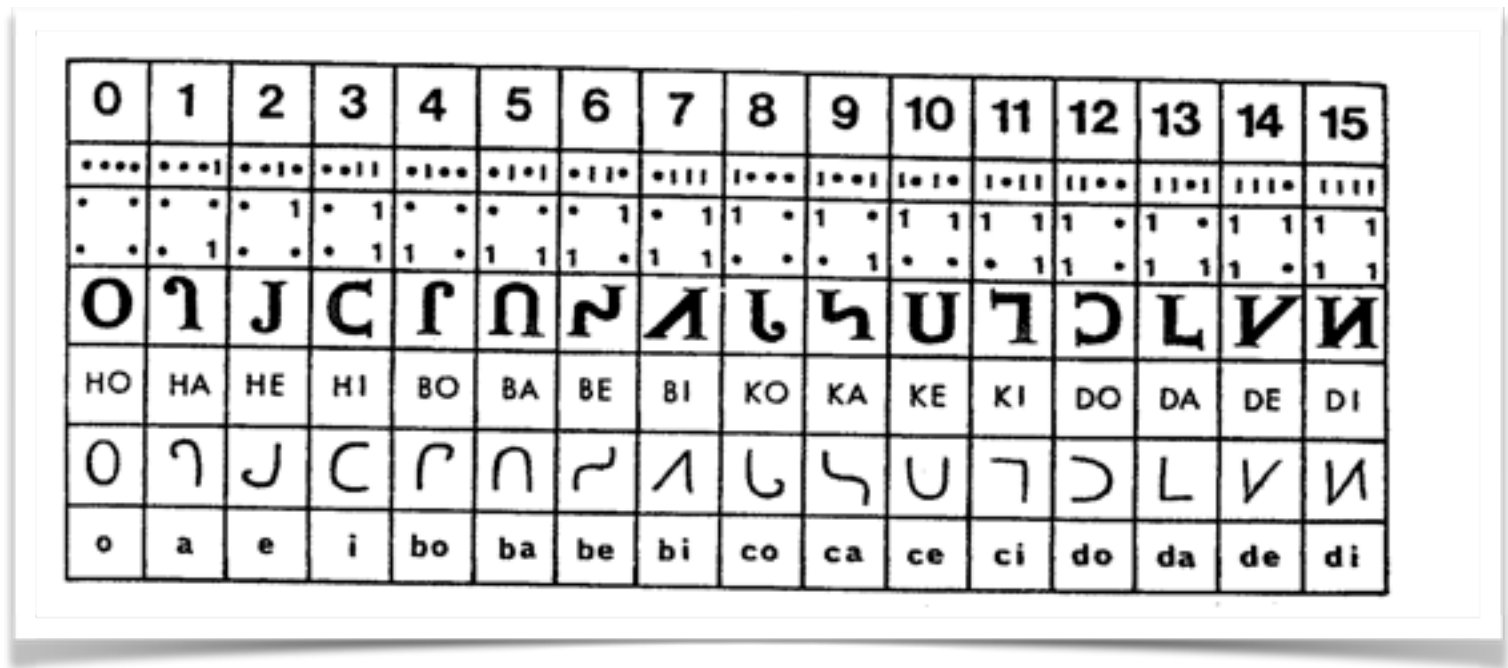
- Duodécimal : base 12 (Népal, monnaies, mois, quantités commerciales)
  - une douzaine d’œufs
- Hexadécimal : base 16 (informatique)
  - 0xDEADBEEF
- Sexagésimal : base 60 (Babyloniens, angles, minutes)
  - 1°45’

- bases hybrides
  - 1 mois et 15 jours ?
  - 17:28:30

- Les chiffres couramment utilisés en informatique sont:
- 0, 1 (base 2)
- 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (base 8)
- 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F (base 16)

- lorsque ce n’est pas clairement indiqué dans le contexte on décore parfois le mot-nombre de la base utilisée pour l’écrire (en général la base est elle-même représentée en base 10)
  - $3876 = (3876)_{10}$
  - $(10111011)_2 = (187)_{10} = 187$

- Numérations exotiques
  - Bibi-binaire



  - Shadok
    - GA, BU, ZO, MEU

- Conversion de nombre entre bases

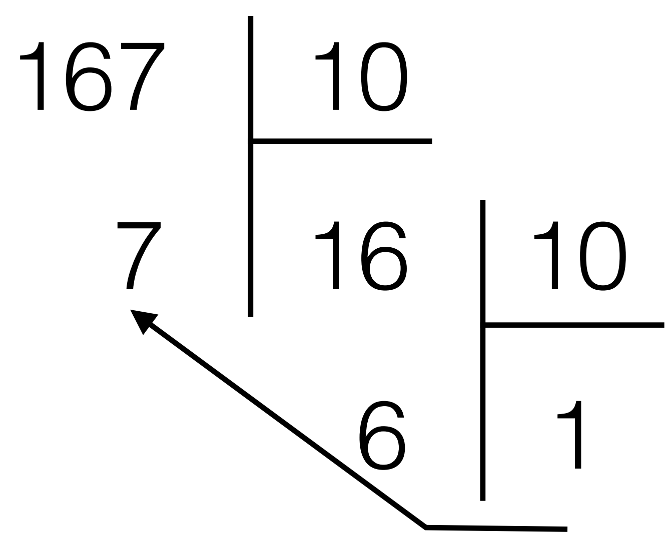
- Conversion d’un nombre décimal en base b ?
  - empirique: par approximations successives/ encadrements successifs
  - exemple : b=2
  - 167 en base 2 ?

- $2^7 = 128 < 167 < 2^8 = 256$ 2^7
  - $167-128 = 39$
- $2^5 = 32 < 39 < 2^6 = 64$ 2^5
  - $39-32 = 7$
- $2^2 = 4 < 7 < 2^3 = 8$ 2^2
  - $7 - 4 = 3$
- $2^1 = 2 < 3 < 2^2 = 4$ 2^1
  - $3-2 = 1$
- $2^0 = 1$ 2^0

$$167 = (10100111)_2$$

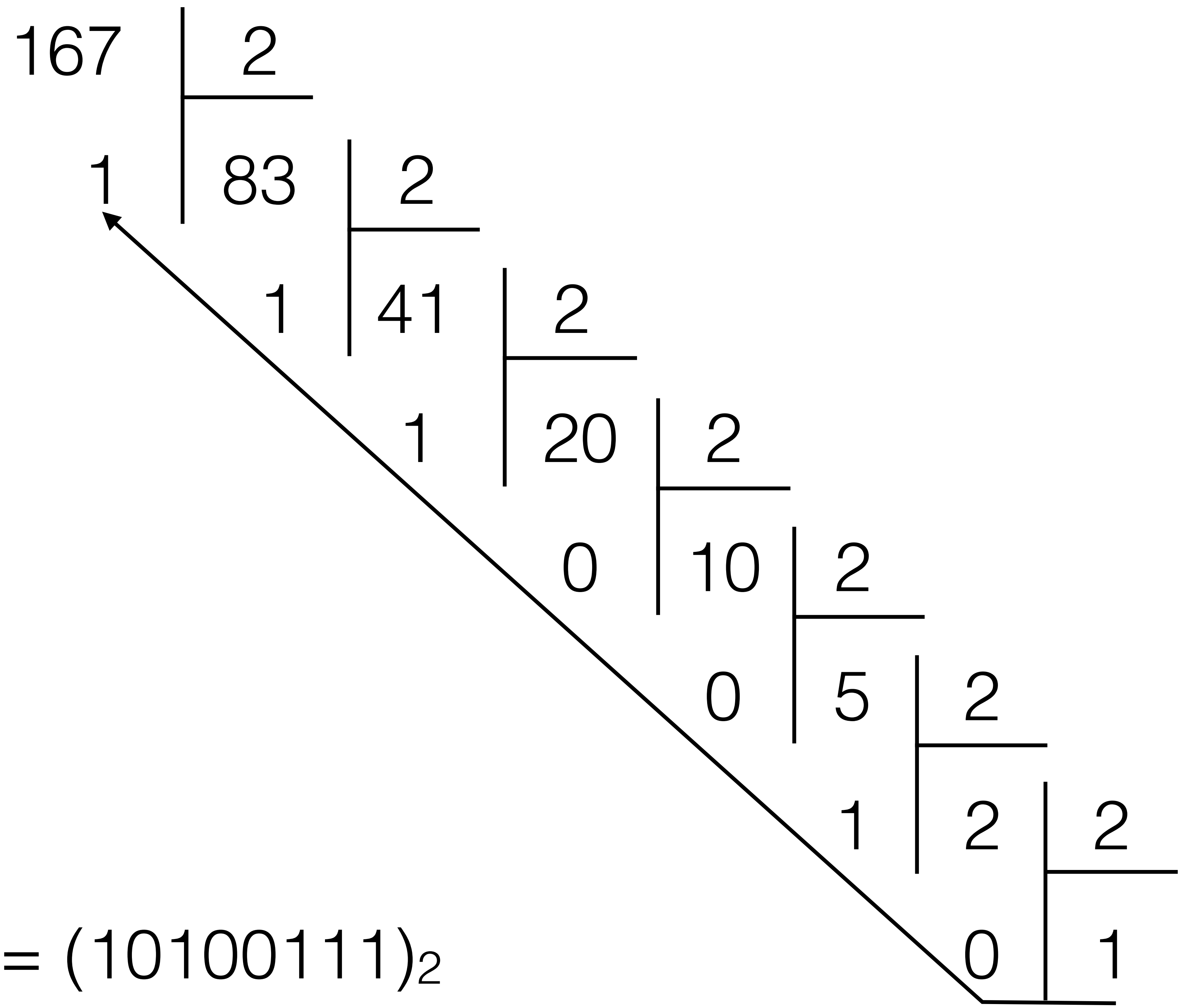
- Conversion d’un nombre décimal en base b ?
    - par un **algorithme** c’est-à-dire une méthode documentée, non ambiguë et qui conduit au résultat attendu
    - division successives
    - 167 en base 2 ?

- soit n
    - si on divise n par 10, le reste est le chiffre des unités
    - si on divise le quotient de la division précédente par 10, le reste est le chiffre des dizaines
    - si on divise le quotient de la division précédente par 10, le reste est le chiffre des centaines
    - …
    - jusqu’à ce qu’il ne reste qu’un nombre plus petit que 10



$$167 = (167)_{10}$$

- Ce procédé fonctionne pour passer à n'importe quelle autre base
  - il suffit de faire des divisions successives



$167 = (10100111)_2$

- Convertir un nombre en base b en décimal ?
  - on peut encore utiliser des divisions
    - petit souci, il faut faire de l’arithmétique en base b!

- $(1363)_7$? Attention $10 = (13)_7$
- nécessite la maîtrise des tables…

$$
\begin{array}{r|l}
1363 & \ \ 13 \\ \hline
5 & 104 \ \begin{array}{|l} 13 \\ \hline \end{array} \\
 & \ \ 3 \ \begin{array}{|r} \ \ 5 \end{array}
\end{array}
$$

$535 = (1363)_7$

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	10
2	2	3	4	5	6	10	11
3	3	4	5	6	10	11	12
4	4	5	6	10	11	12	13
5	5	6	10	11	12	13	14
6	6	10	11	12	13	14	15

x	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	11	13	15
3	0	3	6	12	15	21	24
4	0	4	11	15	22	26	33
5	0	5	13	21	26	34	42
6	0	6	15	24	33	42	51

- Convertir un nombre en base b en décimal ?
  - il suffit de « recomposer »

- $(1363)_7$?
- $1 x 7^3 + 3 x 7^2 + 6 x 7^1 + 3 x 7^0 =$
- $1 x 343 + 3 x 49 + 6 x 7 + 3 x 1 =$
- $(535)_{10}$

- On peut utiliser avantageusement une autre décomposition de $(1363)_7$ celle dite de Horner (William Georges Horner 1819-1845)

- $(1363)_7 = (((1x7) + 3)x7 + 6)x7 + 3$

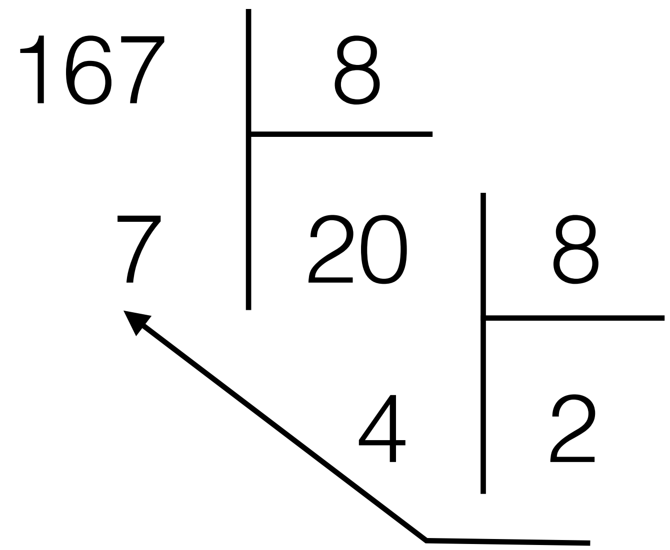
- 7, 10, 70, 76, 532, 535

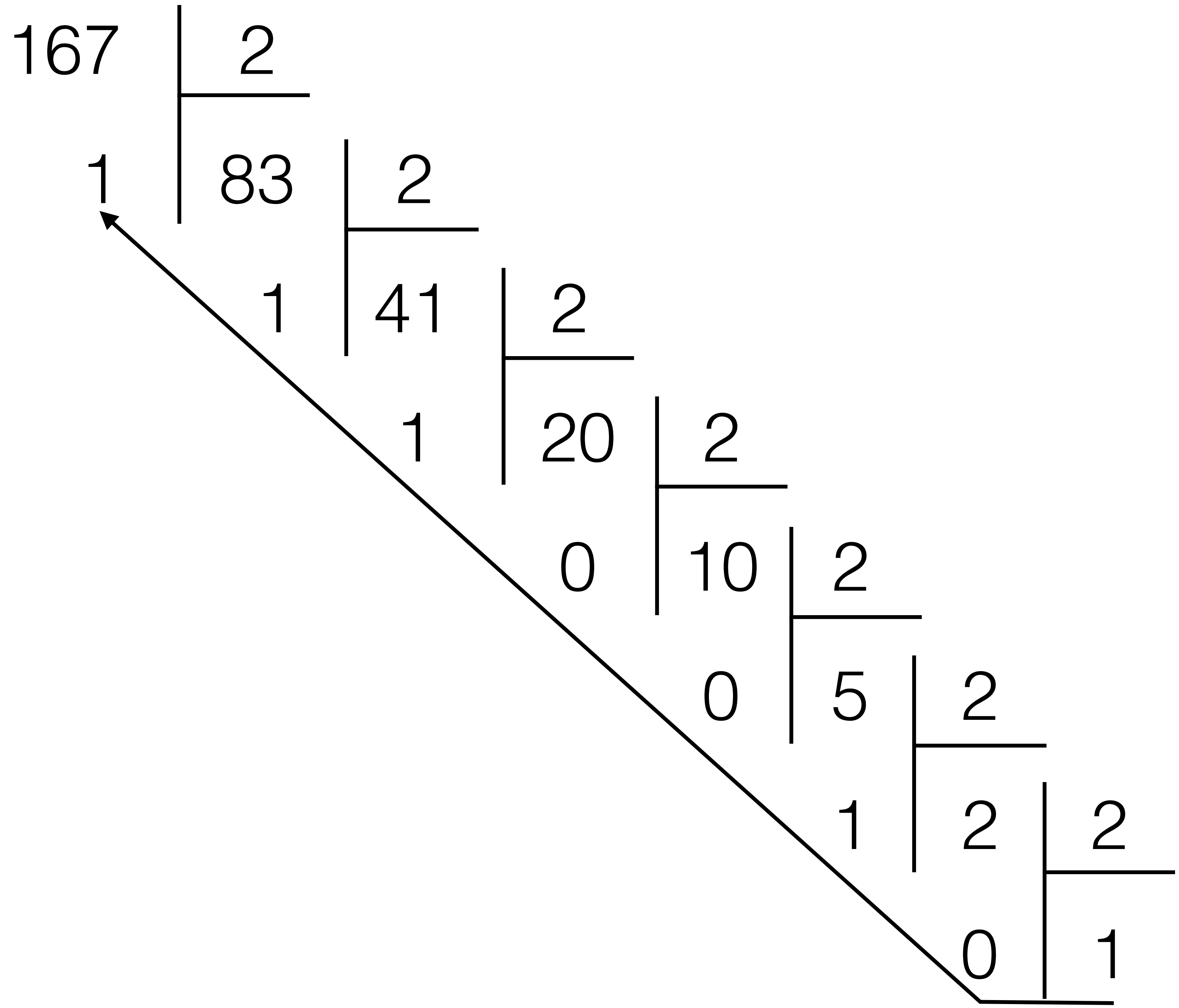
- 3 multiplications, 3 additions

- méthode précédente : 7 multiplications, 3 additions

- Relations entre bases
    - le cas des bases « informatique » 2, 8, 16
- $8 = 2^3$
- $16 = 2^4$
- mais encore ?

- Prenons le cas de la base 10
- Le nombre $(749426732)_{10}$
- s’écrit $(\underline{07}\mathbf{49}\underline{42}\mathbf{67}\underline{32})_{100}$
- en effet $100 = 10^2$
- on groupe les chiffres « deux par deux »
  - en base 100 on a besoin de 100 chiffres, on les note de 00 à 99.





$$167 = (247)_8$$

$$(2)_8 = (010)_2$$

$$(4)_8 = (100)_2$$

$$(7)_8 = (111)_2$$

$$167 = (247)_8 = (\underline{010}\mathbf{100}\underline{111})_2$$

$$167 = (10100111)_2$$

- pour passer de la base 2 à la base 8 on « groupe » par paquets de trois chiffres binaires.
- pour passer de la base 8 à la base 2 on « dégroupe » en sens inverse

- Base 2, simple mais écriture longue des nombres
- Base 16, plus « compliquée » à manipuler mais écriture plus compacte (de combien si l'on utilise les chiffres hexadécimaux 0-F ?)

- Bases encore plus bizarres savez-vous compter en base -2 ????

0	0×-2^0	$(0)_{-2}$	
1	1×-2^0	$(1)_{-2}$	
2	$1 \times -2^2 + 1 \times -2^1 + 0 \times -2^0$	$(110)_{-2}$	
3	$1 \times -2^2 + 1 \times -2^1 + 1 \times -2^0$	$(111)_{-2}$	
4	$1 \times -2^2 + 0 \times -2^1 + 0 \times -2^0$	$(100)_{-2}$	
5	$1 \times -2^2 + 0 \times -2^1 + 1 \times -2^0$	$(101)_{-2}$	
6	$1 \times -2^3 + 0 \times -2^2 + 1 \times -2^1 + 0 \times -2^0$	$(11010)_{-2}$	$1 \times -2^4 +$
7	$1 \times -2^3 + 0 \times -2^2 + 1 \times -2^1 + 1 \times -2^0$	$(11011)_{-2}$	$1 \times -2^4 +$
8	$1 \times -2^3 + 0 \times -2^2 + 0 \times -2^1 + 0 \times -2^0$	$(11000)_{-2}$	$1 \times -2^4 +$