Exercice 1 La loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires (X, Y) est donnée par :

$X \setminus Y$	-1	1
-1	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{10}$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y. Utiliser la définition de l'indépendance pour étudier celle de X et Y.
2. Utiliser la loi du couple et les lois marginales pour déterminer $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$ et cov(X, Y). Étudier l'indépendance de X et de Y.
3. Déterminer les lois des variables aléatoires $S = X + Y$ et $T = XY$. Étudier leur indépendance.
4. Utiliser la loi de S pour calculer $E(S)$ et $V(S)$.
5. Déterminer $E(S)$ et $V(S)$ en utilisant les résultats de la question 2 (donc sans utiliser la loi de S).

Exercice 2 La loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par le tableau ci-dessous.

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2. Déterminer $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$ et cov(X, Y).
3. Étudier l'indépendance de X et de Y.

$X \setminus Y$	-1	0	1
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0
1	0	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{2}{10}$	0	$\frac{1}{10}$

Exercice 3 La loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par le tableau ci-dessous.

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2. Étudier l'indépendance de X et de Y.
3. Déterminer $E(X)$, $E(Y)$, $E(X^2)$ et $E(Y^2)$.
4. Déterminer $E[(2X + 3Y)^2]$ en justifiant votre argument.

$X \setminus Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$
1	$\frac{4}{24}$	$\frac{8}{24}$	$\frac{4}{24}$
2	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$

Exercice 4 La loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par le tableau ci-dessous.

$X \setminus Y$	0	1	2
-1	a	$2a$	a
0	0	a	a
1	$3a$	0	a

1. Déterminer a.
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
3. Calculer $E(X)$, $E(Y)$ et cov(X, Y). Étudier l'indépendance de X et Y.
4. Trouver les lois de probabilité des variables aléatoires $S = X + Y$ et $T = XY$.

Exercice 5 On a n boites numérotées de 1 à n. La boite k contient k boules numérotées de 1 à k. Soit X le numéro de la boite et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Calculer $P(X = Y)$.
3. Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.

Exercice 6 On considère deux variables X et Y vérifiant $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et, pour $i > 0$ et $j > 0$,

$$P(X = i \text{ et } Y = j) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j.$$

1. Donner les lois de X et de Y.
2. Montrer que X et Y admettent des espérances et expliciter $E(X)$ et $E(Y)$.
3. Justifier que la variable $X(X-1)$ admet une espérance et la calculer. En déduire $V(X)$. Procéder de même avec Y.
4. En utilisant $P(X = 1 \cap Y = 1)$, montrer que, pour $p \neq \frac{1}{2}$, X et Y sont dépendantes.
5. Montrer que X et Y sont indépendantes pour $p = \frac{1}{2}$.

Exercice 7 Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$. On effectue une suite d'expériences aléatoires consistant à jeter simultanément deux pièces de monnaie notées A et B. On suppose que ces expériences sont indépendantes et qu'à chaque expérience les résultats des deux pièces sont indépendants. Lors d'une expérience, la probabilité que la pièce A (resp. B) donne « pile » est a (resp. b). Soit X (resp. Y) le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce A (resp. B) donne « face » pour la première fois.

1. Donner les lois de probabilités de X et de Y. Calculer $E(X)$.
2. Calculer la probabilité de l'évènement $(X = Y)$. Interpréter.
3. Trouver $P(X > k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. En déduire $P(X > Y)$ et $P(X \geq Y)$. Interpréter.

Exercice 8 On suppose que le nombre N de colis expédiés à l'étranger chaque jour par une entreprise suit une loi de Poisson de paramètre λ. Ces colis sont expédiés indépendamment les uns des autres. La probabilité pour qu'un colis expédié à l'étranger soit détérioré est égale à t. On s'intéresse aux colis expédiés à l'étranger un jour donné : N est la variable aléatoire comptant le nombre de colis expédiés ; X est la variable aléatoire comptant le nombre de colis détériorés ; Y est la variable aléatoire comptant le nombre de colis en bon état. On a donc $X + Y = N$.

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, la probabilité $P_{(N=n)}(X = k)$.
2. En déduire que X suit la loi de Poisson de paramètre λt.
3. En suivant une méthode similaire à X, déterminer la loi de Y.
4. Les variables X et Y sont-elles, à priori et sans calcul, indépendantes ?
5. Calculer la probabilité $P((X = k) \cap (Y = q))$ et $P(X = k)P(Y = q)$. Conclure.

Exercice 9 Deux dés cubiques équilibrés sont lancés. Soient X_1 la variable donnant le résultat du premier dé et X_2 celui du deuxième. Soient Y_1 la variable aléatoires donnant le plus petit des résultats $\min(X_1, X_2)$ et Y_2 le plus grand des deux $\max(X_1, X_2)$.

1. Donner les lois de Y_1 et Y_2.
2. Donner la loi conjointe de Y_1 et Y_2.
3. Donner la loi de probabilité conditionnelle de X_1 sachant que Y_1 vaut 3 ou 4.
4. Étudier l'indépendance des variables X_1 et Y_1.

Exercice 10 On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par

$$P(X = -1) = P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{3}.$$

On pose $Y = X^2$.

1. Donner la loi de Y.
2. Calculer $\operatorname{cov}(X, Y)$.
3. Étudier l'indépendance de X et Y.