Université Denis Diderot — Examen de rattrapage EP4

Année universitaire — 2013–2014

DUREE: — 3 heures

ATTENTION: — Toute réponse non justifiée ne sera pas corrigée!

Exercice A/ Dans tout l'exercice A/ tous les lancers sont supposés indépendants. On lance un [illegible]

3) On lance dix fois de suite le dé. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.

3a] Pour $1 \leq i \leq 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'événement $(X = i)$.

3b] Calculer l'espérance et la variance de X.

3c] *Calculer la probabilité de l'événement $(X \geq 5)$.*

4) Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois le dé. On note u_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au n-ième lancer.

4a] Montrer que (u_n) est une suite géométrique et qu'elle est convergente.

4b] Calculer $S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$ puis étudier la convergence de la suite S_n.

4c] Déterminer le plus petit entier n_0 vérifiant $S_{n_0} > 0.999$.

Exercice B/ On dispose de deux urnes U_1 et U_2, de six boules numérotées de 1 à 6 et d'un dé équilibré à 6 faces. Initialement, l'urne U_1 contient les boules numérotées 1 et 2, l'urne U_2 contient les boules numérotées 3, 4, 5 et 6. On appelle "échange" l'expérience consistant à lancer une fois le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro obtenu. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire comptant le nombre de boules contenues dans U_1 après n échanges successifs.

1) Les cinq premiers lancers du dé donnent : 3, 4, 1, 3, 2. Déterminer le contenu de U_1 à l'issue du cinquième échange.

2) Donner la loi de X_1. Calculer son espérance $E(X_1)$.

3) Déterminer la loi de X_2.

4) Exprimer, pour $n > 0$, $P(X_{n+1} = 0)$ et $P(X_{n+1} = 6)$ en fonction de $P(X_n = k)$ avec $0 \leq k \leq 6$.

5) Pour $n > 0$ et $1 \leq k \leq 5$, exprimer $P(X_{n+1} = k)$ en fonction de $P(X_n = k-1)$ et $P(X_n = k+1)$.

6) En déduire $E(X_{n+1}) = \frac{2}{3}E(X_n) + 1$ pour $n > 0$.

7) Exprimer alors $E(X_n)$ en fonction de n, puis calculer $\lim_{n \to \infty} E(X_n)$.

Exercice C/ Une urne $\mathcal{U}$ contient n boules blanches non numérotées. On effectue l'algorithme suivant :

compteur:= 0 ;
fin:=FAUX ;
Tant que fin == FAUX **faire**
    On secoue pour bien mélanger les boules dans $\mathcal{U}$;
    On tire une boule b uniformément au hasard dans $\mathcal{U}$;
    Si b est blanche **alors**
        b est peinte en noire ;
        compteur:=compteur+1 ;
    Sinon   /$\star$ la boule est noire $\star$/
        imprimer(compteur) ;
        fin:= VRAI ;   /$\star$ on va donc sortir de la boucle tant que $\star$/
Fin tant que

1) Question préliminaire : dans cette question (et dans cette question uniquement) on suppose $n = 5$ et que la valeur imprimée par l'algorithme est 3. Dessiner les 4 configurations de l'urne $\mathcal{U}$ quand la valeur de la variable *compteur* s'incrémente successivement de 0 à 3.

2) Quand l'algorithme imprime la valeur du *compteur* combien on a de boules noires dans $\mathcal{U}$ (par rapport à cette valeur imprimée)?

3) Sachant que la valeur du *compteur* actuelle est i, quelle est la probabilité que l'algorithme s'arrête et affiche $i + 1$?

4) Soit X la valeur du *compteur* renvoyé par l'algorithme. Donner la loi de X.

5) Donner les formules de l'espérance et de la variance de X.

Exercice D/ Dans cet exercice, on considère une pièce de monnaie $\mathcal{P}$ pour faire PILE ou ... $\mathcal{P}$ soit non biaisée et produise bien PILE ou FACE de