

Éléments de probabilité : interrogation 4

L2 informatique, groupe 3 – durée : 1h00
Documents et calculatrice interdits

Le 6 mai 2011

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1

(6 points)

Des études morphologiques de la Vénus de Milo montrent qu'il y a huit chances sur neuf qu'elle soit droite et une chance sur neuf qu'elle soit gauche. Si elle est droite, il y a trois chances sur quatre qu'elle épluche des carottes et une chance sur quatre qu'elle dénayaute des olives. Si elle est gauche, il y a une chance sur trois qu'elle épluche des carottes et deux chances sur trois qu'elle dénayaute des olives.

1. Calculez la probabilité qu'elle dénayaute des olives.
2. Les noyaux trouvés sur le site archéologique de la statue permettent d'affirmer sans hésiter qu'elle dénayaute des olives. Calculez la probabilité qu'elle soit gauche.

Exercice 2

(11 points)

La FdJ propose un nouveau jeu : la participation coûte 3 € et chaque joueur a une chance sur un million de gagner un million d'euros (et dans tous les cas, la mise initiale de 3 € est perdue). On suppose qu'il y a 100 000 joueurs.

1. Calculer le gain moyen d'un joueur.
2. Donner la loi du nombre de gagnants. En déduire la loi et l'espérance du gain de la FdJ (pour tous les joueurs).
3. La FdJ veut connaître les réserves d'argent qu'elle doit posséder pour pouvoir honorer tous les gagnants avec probabilité $\geq 99,98\%$.
 - (a) En raisonnant sur le nombre de gagnants, utiliser l'inégalité de Tchebychev pour calculer les réserves nécessaires.
 - (b) En utilisant l'approximation par une loi de Poisson, calculer la probabilité qu'il y ait au plus 2 gagnants et en déduire les réserves nécessaires.
(si besoin, on utilisera les approximations suivantes : $e \simeq 2,7183$; $e^{1/5} \simeq 1,2215$; $e^{1/10} \simeq 1,10515$; $e^5 \simeq 148,41$; $e^{10} \simeq 22\,026,5$ et on admettra que $1/(1+x) \simeq 1-x$ lorsque x est petit)
 - (c) Comparer les deux résultats.

Exercice 3

(3 points)

Un algorithme probabiliste A a une probabilité $p \leq 1/3$ de faire une erreur. On considère l'algorithme probabiliste B suivant : on exécute 3 fois A et on choisit la réponse majoritaire. Donner en fonction de p la probabilité d'erreur de l'algorithme B . Faire l'application numérique pour $p = 1/3$.