Exercice 1 Une serre contient cent papillons dont trente sont des géomètres. On extrait d'abord douze papillons au hasard, puis, sans remise, de nouveau dix papillons.

1. Calculer la probabilité que le premier de filet rapporte trois géomètres.
2. Supposons que le premier coup de filet ait rapporté quatre géomètres. Calculer la probabilité que le deuxième de filet rapporte six géomètres.

Exercice 2 On considère le jeu suivant : le joueur paie $3€$ pour jouer. Ensuite, il lance trois pièces équilibrés. Pour chaque « pile » obtenu, il gagne $2€$. On désigne par X le nombre de « pile » obtenus et par Y le gain (algébrique) du joueur.

1. Exprimer Y en fonction de X.
2. Donner la loi de X puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.
3. Déterminer $E(Y)$ et $V(Y)$. Préciser si le jeu est favorable au joueur.
4. Expliciter la loi de Y.

Exercice 3 On tire au hasard et sans remise cinq cartes d'un jeu de trente-deux. Soit X le nombre de rois obtenus.

1. Déterminer la loi de X et son espérance.
2. Un jeu consiste à miser $2€$ et à recevoir $a€$ par roi obtenu avec $a > 0$. Soit G_X la variable aléatoire donnant le gain en euro.
   (a) Exprimer G_X en fonction de X et de a. Calculer l'espérance de G_X.
   (b) Préciser pour quelles valeurs de a le jeu est favorable au joueur.
   (c) Donner la loi de G_X.

Exercice 4 Au casino, vous jouez sur une machine à sous aux caractéristiques suivantes : chaque partie vous coûte $1€$ (cette mise initiale est perdue) et vous avez une chance sur dix de gagner $8€$. Toutes les parties sont supposées indépendantes. Vous arrêtez de jouer dès que vous avez gagné une partie. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de parties jouées.

1. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Majorer la probabilité que vous ayez joué au moins 40 parties.

Vous répétez 10 fois cette procédure (c'est-à-dire que vous jouez jusqu'à gagner 10 fois). Soit Y_i le gain (algébrique) obtenu à la i-ème répétition, et Y le gain total.

3. Donner la loi de Y_i, son espérance et sa variance.
4. Donner l'espérance et la variance de Y.
5. Majorer la probabilité que vous ayez gagné au moins $40€$ en tout.

Exercice 5 Une urne contient 6 boules rouges, 4 boules noires et 7 boules blanches. On prélève, d'abord avec remise, puis sans remise 5 boules. On note X_1 la variable aléatoire comptant le nombre de boules rouges, X_2 celle comptant le nombre de boules noires, et X_3 celle comptant le nombre de boules blanches pour les tirages avec remise et Y_1 , Y_2 , Y_3 les variables correspondantes pour les tirages sans remise.

1. Donner la loi de probabilité de la variable X_2 correspondant au tirage avec remise.
2. Donner la loi de probabilité de la variable Y_2 correspondant au tirage sans remise.
3. Comparer les valeurs de l'espérance et de l'écart-type.

Exercice 6 Un joueur lance trois dés équilibrés. Il met de côté celui ou ceux qui ont fait un as, et il recommence avec le ou les dés restants tant que cela est possible.

1. Donner la loi de la variable X comptant le nombre de lancers.
2. Donner la loi de la variable Y comptant le nombre de dés lancés.

Exercice 7 Une rampe de quatre spots lumineux S_1, S_2, S_3 et S_4 change d'état de la manière suivante :

- à l'instant $t = 0$, seul le spot S_1 est allumé ;
- si, à l'instant t le spot S_1 est allumé, alors, de manière équiprobable, un (et un seul) des spots S_1, S_2, S_3 ou S_4 s'allume à l'instant $t + 1$;
- si, à l'instant t le spot S_k est allumé pour $2 \leq k \leq 4$, alors S_{k-1} s'allume à l'instant $t+1$.

On pourra remarquer qu'à chaque instant, un et un seul spot est allumé. On note X la variable aléatoire représentant le premier instant où le spot S_2 s'allume.

1. Justifier que le spot S_1 reste constamment allumé jusqu'à l'instant $X - 3$ ou $X - 2$ ou $X - 1$ inclus.
2. Calculer la probabilité que le spot S_1 reste constamment allumé jusqu'à l'instant n inclus.
3. Calculer la probabilité des événements $(X = 1)$ et $(X = 2)$.
4. Utiliser 1. et 2. pour déterminer la probabilité des événements $(X = n)$ pour $n \geq 3$.
5. Calculer l'espérance de X.

Exercice 8 On dispose de deux dés cubiques :

D_1 comporte 1 face marquée 0, 2 faces marquées 1, 3 faces marquées 2 ;
D_2 comporte 3 faces marquées 0, 2 faces marquées 1, 1 face marquée 2.

1. On lance D_1 et on note X_1 le nombre obtenu. Déterminer la loi de X_1, son espérance, sa variance.
2. Mêmes questions pour X_2 le nombre obtenu en lançant D_2.
3. On lance D_1 et D_2 simultanément.
   (a) Calculer l'espérance de $Z = X_1 + X_2$ et de $T = X_1 - X_2$.
   (b) Déterminer les lois de Z, de T et de $R = X_1 X_2$.

Exercice 9 On dispose de deux urnes U_1 et U_2, de six boules numérotées de 1 à 6 et d'un dé équilibré. Initialement, l'urne U_1 contient les boules numérotées 1 et 2, l'urne U_2 contient les boules numérotées 3, 4, 5 et 6. On appelle « échange » l'expérience consistant à lancer une fois le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro obtenu. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire comptant le nombre de boules contenues dans U_1 après n échanges successifs.

1. Les cinq premiers lancers du dé donnent : 1, 3, 2, 3, 5. Déterminer le contenu de U_1 à l'issue du cinquième échange.
2. Donner la loi de X_1. Calculer son espérance $E(X_1)$.
3. Déterminer la loi de X_2.
4. Exprimer, pour $n > 0$, $P(X_{n+1} = 0)$ et $P(X_{n+1} = 6)$ en fonction de $P(X_n = k)$ avec $0 \leq k \leq 6$.
5. Pour $n > 0$ et $1 \leq k \leq 5$, exprimer $P(X_{n+1} = k)$ en fonction de $P(X_n = k-1)$ et $P(X_n = k+1)$.
6. En déduire $E(X_{n+1}) = \frac{2}{3}E(X_n) + 1$ pour $n > 0$.
7. Exprimer alors $E(X_n)$ en fonction de n, puis calculer $\lim_{n\to+\infty} E(X_n)$.

Exercice 10 Une urne contient des boules blanches et noires. On suppose que la probabilité de piocher une boule blanche vaut $p \in]0; 1[$. On effectue des tirages successifs avec remise. Soit X_1 (resp. X_2) la variable aléatoire donnant le rang d'apparition de la première (resp. deuxième) boule blanche.

1. Reconnaître la loi de X_1 et donner la valeur de $E(X_1)$ et de $V(X_1)$.
2. Déterminer la loi de X_2. Calculer son espérance.