Exercice 1 Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité P et ne prenant que des valeurs positives $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Soit ε un nombre strictement positif vérifiant $x_{k-1} < \varepsilon \leq x_k$.

1. Rappeler la définition de l'espérance $E(X)$.
2. Montrer $E(X) \geq \varepsilon \displaystyle\sum_{i=k}^{n} P(X = x_i)$.
3. En déduire **l'inégalité de Markov** : $P(X \geq \varepsilon) \leq \dfrac{E(X)}{\varepsilon}$.
4. En déduire cette autre formulation : $P(X < \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{E(X)}{\varepsilon}$.
5. Exprimer la variance $V(X)$ comme l'espérance d'une certaine variable aléatoire Y.
6. Appliquer l'inégalité de Markov à la variable Y pour obtenir **l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev** :
$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Exercice 2 Le nombre de caleçons molletonnés fabriqués en une semaine dans le petit atelier de la rue juste derrière est une variable aléatoire d'espérance 50 et de variance 25.

1. Majorer la probabilité que la production de la semaine à venir dépasse 75 caleçons molletonnés.
2. Minorer la probabilité que la production de la semaine à venir soit strictement comprise entre 40 et 60.

Exercice 3 On considère une variable aléatoire X obéissant à la loi uniforme sur $\{1, \ldots, 9\}$.

1. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Majorer la probabilité $P(|X - 5| \geq 4)$.
3. Calculer cette probabilité. Commenter.

Exercice 4 Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes définies sur (Ω, P) de même loi d'espérance 2 et de variance 1. On pose $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Déterminer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
2. Majorer $P(|Y_n - 2| \geq \frac{1}{4})$.
3. Minorer $P(1.9 < Y_n < 2.1)$.
4. Préciser à quel moment intervient l'indépendance des variables $X_1, \ldots, X_n$.

***

Exercice 5 Chaque antilope qui traverse la clairière entre sa tanière et le fleuve a une probabilité $\frac{1}{3}$ de périr victime d'une hyène. Un matin, 32 antilopes quittent leur tanière pour rejoindre le fleuve. On note X le nombre de victimes des hyènes parmi ces antilopes. Les survivants reviennent le soir par le même chemin. On note Y le nombre total de victimes de la journée.

1. Calculer la probabilité que 22 antilopes se baignent dans le fleuve.
2. Calculer la probabilité que 7 antilopes retournent sains et saufs le soir dans leur tanière. Calculer $E(Y)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 6 On considère deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$. La première contient cinq boules rouges et trois boules noires. La deuxième contient trois boules rouges et sept boules noires. On effectue des tirages avec remise alternativement dans $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges extraites au bout de $2n$ tirages. Déterminer l'espérance de X.

Exercice 7 On lance un dé tétraédrique aux faces numérotées 1, 2, 3 et 4. Pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, on note p_k la probabilité d'obtenir le nombre k sur la face cachée. Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres p_1, p_2, p_3 et p_4 dans cet ordre, forment une progression arithmétique.

1. Sachant que $p_4 = 0.4$, calculer p_1, p_2 et p_3.
2. On lance le dé trois fois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4.
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant.
3. On lance dix fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.
   (a) Pour $1 \leq i \leq 10$, exprimer en fonction de i la probabilité de l'événement $(X = i)$.
   (b) Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat obtenu.
   (c) Calculer la probabilité de l'événement $(X \geq 1)$.
4. Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois le dé, les lancers étant encore supposés indépendants deux à deux. On note u_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au n-ième lancer.
   (a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique et qu'elle est convergente.
   (b) Calculer $S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$ puis étudier la convergence de la suite (S_n).
   (c) Déterminer le plus petit entier n_0 vérifiant $S_{n_0} > 0.999$.

Exercice 8 Un restaurant universitaire propose un plat au choix : pizza, poisson ou lapin. L'expérience permet de supposer que mille étudiants vont manger ce jour-là, et que chaque étudiant demandera la pizza calzone avec probabilité 0.5, le plat de poisson avec probabilité 0.4 et le lapin chasseur avec probabilité 0.1. Soit X la variable aléatoire qui prend comme valeur le nombre d'étudiants parmi les 1000 qui vont demander le plat de poisson, sachant qu'il leur faudra choisir fromage ou dessert.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de X.
2. Minorer la probabilité de l'événement $(365 < X < 435)$.

Exercice 9 Soit n un entier strictement positif. On tire n fois avec remise une boule dans une urne composée de 30 boules rouges et 70 boules blanches. Soit X_n la variable aléatoire qui prend comme valeur le nombre de boules rouges tirées lors des n tirages. On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

1. Donner la loi de X_n. Déterminer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
2. Minorer la probabilité que Y_{1000} soit dans l'intervalle $]0.25, 0.35[$.
3. Trouver un entier n pour lequel la probabilité que Y_n soit dans l'intervalle $]0.27, 0.33[$ est au moins $\frac{9}{10}$.

Exercice 10 Soit n un entier strictement positif. On tire n fois avec remise une carte dans un jeu de 52 cartes. Soit X_n la variable aléatoire qui prend comme valeur le nombre de cœurs tirés lors des n tirages.

1. Donner la loi de X_n. Calculer $E(X_n)$ et $V(X_n)$.
2. On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$. Déterminer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
3. Minorer la probabilité que Y_{100} soit dans l'intervalle $]0.15, 0.35[$.
4. Trouver le plus petit réel ℓ pour lequel la probabilité que Y_{100} soit dans l'intervalle $]0.25-\ell, 0.25+\ell[$ est au moins $\frac{9}{10}$.
5. (a) Minorer la probabilité que X_{100} prenne une valeur dans $\{21, 22, \ldots, 28, 29\}$.
   (b) On admet que $\sum_{i=21}^{29} P(X_{100} = i) \cong 0.7$. Comparer cette valeur avec le résultat de la question précédente. Commenter.

***