Exercice 1 On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3. L'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges. Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2, à les mettre dans U_3, puis à tirer au hasard une boule de U_3. Pour i prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par N_i (respectivement R_i) l'événement « on tire une boule noire de l'urne U_i » (respectivement « on tire une boule rouge de l'urne U_i »).

1. Construire l'arbre de probabilités associée à cette expérience.
2. Calculer la probabilité des événements $N_1 \cap N_2 \cap N_3$ puis $N_1 \cap R_2 \cap N_3$.
3. En déduire la probabilité des événements $N_1 \cap N_3$ puis $R_1 \cap N_3$.
4. Déduire des deux questions précédentes la probabilité de l'événement N_3.
5. Étudier l'indépendance des événements N_1 et N_3.
6. Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

Exercice 2 Une urne contient quatre boules rouges et deux boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne. On note A_0 l'événement « on n'a obtenu aucune boule noire », A_1 l'événement « on a obtenu une seule boule noire » et A_2 l'événement « on a obtenu deux boules noires ». Calculer $p(A_0)$, $p(A_1)$ et $p(A_2)$.
2. Après ce premier tirage, il reste donc quatre boules dans l'urne. On effectue à nouveau au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne. On note B_0 l'événement « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage #2 », B_1 l'événement « on a obtenu une seule boule noire au tirage #2 » et B_2 l'événement « on a obtenu deux boules noires au tirage #2 ».
   (a) Calculer $p_{A_0}(B_0)$, $p_{A_1}(B_0)$ et $p_{A_2}(B_0)$.
   (b) En déduire $p(B_0)$.
   (c) Calculer $p(B_1)$ et $p(B_2)$.
   (d) On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier ?
3. On considère l'événement R « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient extraites de l'une ». Montrer $p(R) = \frac{1}{3}$.

Exercice 3 Une urne A contient une boule rouge et trois boules vertes. Une urne B contient deux boules rouges et deux boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On dispose d'un dé à 6 faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. On le lance une fois : si l'on obtient un multiple de 3, on tire au hasard une boule de l'urne A, sinon on tire au hasard une boule de l'urne B.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire.
   (b) Quelle est la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir ?
   (c) Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne B sachant qu'elle est rouge ?
2. On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose à chaque fois devant l'urne.
   (a) Montrer que la probabilité de l'événement « la troisième boule tirée est noire » vaut $\frac{1}{4}$.
   (b) Certains peuvent penser que l'événement « la première boule tirée est noire » a une probabilité supérieure à l'événement « la troisième boule tirée est noire ». Est-ce vrai ? Justifier.

Exercice 4 Un employé se rend à son travail. S'il est à l'heure il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise, s'il est en retard il prend le bus de la ville et il lui en coûte 1,5 e. Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{5}$, s'il est en retard un jour donné la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est $\frac{1}{20}$.
Pour tout entier naturel non nul n, on appelle R_n l'événement « l'employé est en retard le jour n ». On note p_n la probabilité de R_n et q_n celle de $\overline{R_n}$. On suppose $p_1 = 0$.

1. Détermination d'une relation de récurrence.
   (a) Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.
   (b) Déterminer $P(R_{n+1} \cap R_n)$ en fonction de p_n et $p(R_{n+1} \cap \overline{R_n})$ en fonction de q_n.
   (c) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et de q_n.
   (d) En déduire $p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20}p_n$.
2. Étude de la suite (p_n). Pour tout entier naturel non nul n, on pose $v_n = p_n - \frac{4}{23}$.
   (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{20}$.
   (b) Exprimer v_n puis p_n en fonction de n.
   (c) Justifier que la convergence de la suite (p_n) est et calculer sa limite.

Exercice 5 On considère deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 17 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher. L'urne U_2 contient 1 boule blanche et 19 boules noires indiscernables au toucher. On réalise des tirages en procédant de la manière suivante :
Étape 1 : on tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.
Étape n ($n \geq 2$) :
– si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est blanche, on tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1 ;
– si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est noire, on tire au hasard une boule dans U_2, on note sa couleur et on la remet dans U_2.

On note A_n l'événement « le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape n » et p_n sa probabilité. On a donc $p_1 = 1$.

1. Calculer p_2.
2. Montrer que pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$.
3. Calculer p_3.
4. Le but de cette question est de chercher une éventuelle limite pour la suite (p_n).
   (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier n entier naturel non nul, $p_n > 0,25$.
   (b) Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
   (c) En déduire que la suite (p_n) est convergente vers un réel noté ℓ.
   (d) Justifier que ℓ vérifie l'équation $\ell = 0,8\ell + 0,05$. En déduire la valeur de ℓ.

***

Exercice 6 On considère k stations toujours prêtes à transmettre partageant un canal et utilisant un protocole de type CSMA/CD. On suppose qu'il y a une probabilité p constante de (re)transmission à chaque slot de contention.

1. Calculez la probabilité qu'une des stations acquiert le canal dans un slot. Pour quelle valeur de p cette probabilité est-elle maximale ?
2. Calculez la probabilité que la période de contention contienne exactement j slots. En déduire le nombre moyen de slots par période de contention, puis la durée moyenne de contention.
3. On prend $k = 2$ et $p = \frac{1}{2}$. On suppose que le réseau admet un débit de 10 Mb/s, que la durée d'un slot de contention a été fixée à $2\tau = 2.10^{-6}\ s$, que chacune des deux stations veut émettre exactement deux trames de 1000 bits aussi vite que possible et qu'elles commencent à les émettre en même temps.
   (a) Calculez la durée moyenne d'envoi des deux premières trames.
   (b) Calculez la durée moyenne d'envoi des quatre trames.