Université Paris 7- Denis Diderot
L2 d'Informatique
Probabilités Discrètes   Examen du 22 juin 2010

Duree 3 heures. Les documents et les appareils electroniques de toutes sortes ne sont pas autorises.

Exercice 1 :

Dans une voie de transmission binaire, on émet deux symboles 0 et 1 avec les probabilités 0.6 et 0.4 respectivement.
Si on émet 0, on reçoit 0 avec une probabilité de $0,8$, et on reçoit 1 sinon ; si on émet 1, on reçoit 0 avec une probabilité de $0,1$, et on reçoit 1 sinon.

Question 1 : Calculer la probabilité d'une transmission d'un seul bit fausse.

Question 2 : On émet un mot sur l'alphabet $\{0,1\}$ de longueur n. Soit X le nombre d'erreurs de transmission à la réception de ce message. Quelle est la loi de X ? Calculer son espérance mathématique et sa variance.

Exercice 2 :

Malgré le nuage de poussières volcaniques, une compagnie décide de faire partir 2 avions, l'un ayant 2 réacteurs, et l'autre 4. Soit p la probabilité qu'un réacteur tombe en panne.

Question : Sachant qu'un avion n'arrive à destination que si strictement moins de la moitié de ses réacteurs tombent en panne, dans quel avion choisissez-vous de monter ?

Exercice 3 :

Une boîte contient dix boules numérotées de 1 à 10. On tire simultanément deux boules au hasard, et on appelle X le plus petit des deux nombres obtenus, et Y le plus grand. On a ainsi défini deux variables aléatoires.

Question 1 : Justifier l'inégalité $E(X) < E(Y)$.

Question 2 : Déterminer les lois de probabilité de ces deux variables aléatoires. Calculer leur espérance.

Exercice 4 :

Une entreprise fabrique des moteurs électriques. Afin de vérifier la conformité de la production, elle procède à deux types de tests : un test mécanique et un test électrique, et un moteur n'est retenu que s'il ne présente aucun des deux défauts. Une étude statistique de la production aboutit aux résultats suivants : la probabilité qu'un moteur soit défectueux pour le test mécanique est $0,08$; la probabilité qu'un moteur soit défectueux pour le test électrique est $0,05$; la probabilité qu'un moteur soit défectueux pour les deux tests est $0,02$.
On prélève au hasard un moteur dans la production. On appelle D_M l'événement :"le moteur présente un défaut mécanique", et D_E l'événement :"le moteur présente un défaut électrique".

Question 1 : Les événements D_M et D_E sont-ils indépendants ?

Question 2 : Calculer la probabilité de D_M sachant que D_E est réalisé.

Question 3 : Calculer la probabilité de l'événement A :"le moteur prélevé présente au moins un défaut".

Question 4 : Calculer la probabilité de l'événement B :"le moteur prélevé présente un et un seul défaut".

Question 5 : Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de types de défaut présentés par le moteur. Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer son espérance et sa variance.

On prélève 12 moteurs au hasard dans la production (on assimile cette épreuve à un tirage de 12 pièces successivement avec remise). Soit Y la variable aléatoire qui associe à un tel prélèvement de 12 moteurs le nombre de moteurs sans défauts de ce prélèvement.

Question 6 : Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y ?

Question 7 : Calculer la probabilité de l'événement "il y a au moins 10 moteurs qui fonctionnent".

Exercice 5 : En 1894, H. Delannoy pose dans “L'intermédiaire des mathématiciens” la question :

> A joue contre B ; à chaque partie, les probabilités qu'ils ont respectivement de gagner sont p et q ; $(p+q=1)$ et le perdant donne 1 Fr au gagnant. En entrant au jeu, les joueurs possèdent respectivement a et b francs. On demande la probabilité que A ruinera B avant le coup de rang r.

Dans le cas où $a=3$, $b=2$ et $r=9$, le diagramme ci-dessous représente toutes les parties possibles menant à la ruine de B en moins de 9 coups.

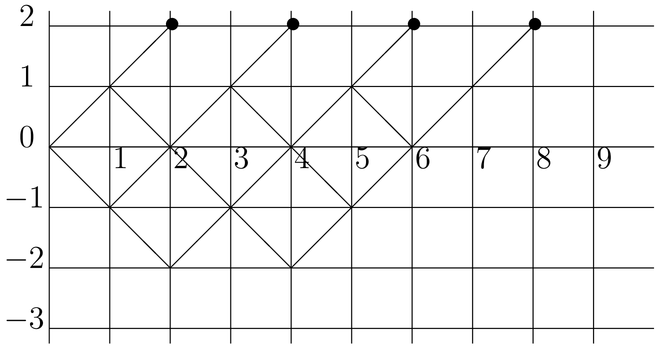

Figure 1: les parties qui ruinent B

Question 1 : Expliquer et commenter ce diagramme.

Question 2 : Donner pour chaque point de passage d'un chemin du diagramme le nombre de chemins permettant d'y parvenir (on pourra recopier sur sa copie le diagramme, et porter sur chaque sommet le nombre correspondant de chemins).

Question 3 : Donner la probabilité que A ruine B avant 9 coups.

Question 4 : Toujours avec $a=3$ et $b=2$, donner en fonction de r la probabilité que A ruine B avant r coups.