Aucun document n'est autorisé. Justifiez vos réponses.
Durée : 3h

Exercice 1.(4 points) Nous étudions une population dans laquelle un individu sur 1000 est affecté d'une maladie M. Afin de détecter la maladie il existe un premier test, moins cher mais avec une marge d'erreur, et un second test, plus cher mais sûr à 100%. Seuls les patients ayant eu un résultat positif au premier test feront le deuxième test afin de confirmer ou non la maladie. Sachant que la probabilité d'être positif au premier test en ayant la maladie est 0.999 et que la probabilité d'être positif au premier test en n'ayant pas la maladie est de 0.002,

1. Quelle est la probabilité qu'un individu positif au premier test soit malade.
2. Quelle est la probabilité qu'un individu malade ne soit pas diagnostiqué ?
3. En supposant de faire les tests sur 1/4 de la population selon les critères ci-dessus, quel sera le pourcentage d'individus diagnostiqués positifs ?

Exercice 2.(4 points) Une urne U_1 contient trois boules noires et sept boules blanches. Une urne U_2 contient cinq boules noires et cinq boules blanches. On choisit une urne au hasard (équiprobablement) et on tire une boule :

1. Quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne U_1 sachant qu'on a tiré une boule noire au premier tirage ?

   On remet la boule tirée dans son urne et on en tire une deuxième de la même urne. On considère les deux événements suivants :

   (a) A= "obtenir une boule blanche au premier tirage",

   (b) B = "obtenir une boule blanche au second tirage".

2. Ces événements sont-ils indépendants ?

Exercice 3.(4 points) Soit une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire une boule avec remise, puis une autre. Soient X_1 la variable donnant le numéro de la première boule et X_2 celui de la deuxième. Soient Y_1 la variable aléatoire donnant le plus petit des deux numéros et Y_2 le plus grand des deux.

1. Donner les lois de Y_1 et Y_2 .
2. Donner la loi conjointe de Y_1 et Y_2, c.a.d $P(Y_1 = i \bigcap Y_2 = j)$, avec $i \in Y_1(\Omega)$, $j \in Y_2(\Omega)$.
3. Donner la loi de probabilité conditionnelle de X_1 sachant que Y_1 vaut 2 ou 3.
4. Étudier l'indépendance des variables X_1 et Y_1 .

Exercice 4.(12 points) La régie autonome des transports de Lutèce (RATL) étudie sa politique de tarification.

- Le pass mensuel coûte 40 euros.
- Le ticket individuel coûte 1 euros
- L'amende en cas de contrôle d'un passager sans billet est de 60 euros.

La fréquence des contrôles fait qu'un passager a 1% de chance d'être contrôlé à chaque voyage, un client régulier prend le bus 2 fois par jour, 25 jours par mois.

Soit X une variable aléatoire discrète X qui compte le nombre de contrôles effectués par mois par client régulier.

1. Donner la loi de X.
2. Quelle est son espérance ? Les clients réguliers ont-ils intérêt en moyenne à voyager sans billet ?
3. Quelle est la variance de X ?

2. Donner la meilleure borne supérieure possible à :

$$P(X \geq 1,5E[X])$$

Soit Y une variable avec espérance $E[Y]$.

3. Montrez que : $P(Y \geq E[Y]) > 0$, à savoir la probabilité que une variable aléatoire discrète soit supérieure ou égale à sa moyenne est positive.

Soit A une formule propositionnelle qui est la conjonction de m formules $A_1, \ldots, A_m$ composées de la disjonction de 3 littéraux (A savoir une variable booléenne ou sa négation). On suppose que les variables qui apparaissent dans les 3 littéraux qui composent une formule A_i sont toutes différentes. Par exemple, voici une formule qui satisfait les conditions avec $m = 2$:

$$A = A_1 \wedge A_2 \; ; \quad A_1 = (\neg x \vee y \vee \neg z) \; , \quad A_2 = (z \vee y \vee \neg w) \; .$$

4. Quelle est la probabilité qu'une affectation v générée de façon uniforme satisfasse une formule A_i ?
5. Montrez qu'il existe une affectation de valeurs de vérité qui satisfait au moins $\frac{7m}{8}$ formules A_i parmi m.