

Éléments de probabilité : correction de l'interrogation 4

L2 informatique, groupe 3

Le 6 mai 2011

Exercice 1

1. On peut dessiner un arbre. $P(\text{olives}) = 8/9 \times 1/4 + 1/9 \times 2/3 = 2/9 + 2/27 = 8/27$.
2. $P(\text{gauchère} \mid \text{olives}) = P(\text{olives} \mid \text{gauchère})P(\text{gauchère})/P(\text{olives}) = (2/3 \times 1/9)/(8/27) = 1/4$.

Exercice 2

1. $E(\text{gain}) = -3 + 10^6 \times 10^{-6} = -2$: en moyenne chaque joueur perd 2 euros.
2. Loi du nombre de gagnants N : binomiale de paramètres $n = 100\,000$ et $p = 10^{-6}$. Gain de la FdJ : $X = 300\,000 - 10^6 N$; espérance $E(X) = 300\,000 - 10^6 E(N) = 200\,000$.
3. (a) Soit Y les réserves, il faut que $Y \geq 10^6 N$ avec probabilité $\geq 1 - 2 \cdot 10^{-4}$. Par Tchebychev, $P(N \geq k) \leq P(|N - 1/10| \geq k - 1/10) \leq \text{Var}(N)/(k - 1/10)^2 \simeq 1/(10k^2)$. On veut que $1/(10k^2) \leq 2 \cdot 10^{-4}$, soit $k^2 \geq 500$ ou encore $k \geq 23$. Il y a au plus 23 gagnants avec probabilité $\geq 1 - 2 \cdot 10^{-4}$ donc les réserves de la FdJ doivent être de 23 millions d'euros d'après Tchebychev.
(b) Approximation de N par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 1/10$: la probabilité qu'il y ait au plus 2 gagnants est alors $e^{-1/10}(1 + 1/10 + 1/200) = 221/(200e^{-1/10}) \simeq 221/221,03 = 1/(1 + 0,03/221) \simeq 1 - 0,03/221 \geq 1 - 2 \cdot 10^{-4} = 0,9998$. Ainsi, il suffit de couvrir 2 gagnants, soit des réserves de 2 millions d'euros.
(c) Le résultat avec l'approximation de Poisson est bien meilleur : avec Tchebychev on avait largement surestimé les besoins.

Exercice 3

L'algorithme B donne la mauvaise réponse si A se trompe au moins 2 fois sur les trois. Ainsi $P(B \text{ se trompe}) = \binom{3}{2}p^2(1-p) + p^3 = p^2(3-2p)$. Pour $p = 1/3$, la probabilité d'erreur de B est donc $1/9(3 - 2/3) = 7/27$.