Universite Paris 7- Denis Diderot
L2 d'Informatique
Probabilites Discretes   Examen du 18 mai 2010

Duree 3 heures. Les documents et les appareils electroniques de toutes sortes ne sont pas autorises.

Exercice 1 :

On se donne 4 des *a*, *b*, *c*, *d* dont les faces sont marquees comme indique a la gure 1.

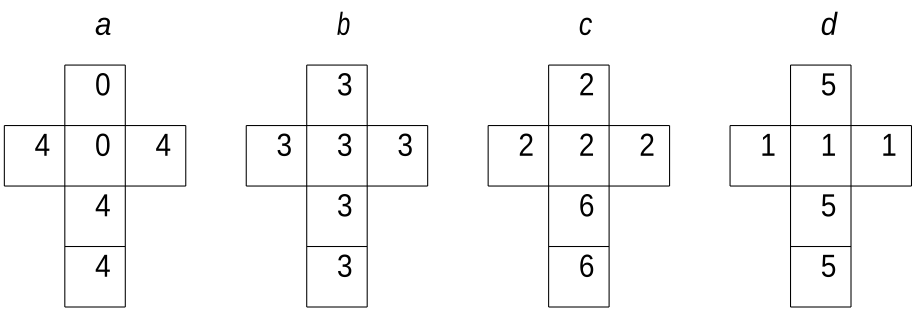

Figure 1: les des de Bradley Efron

Le joueur *A* choisit un de, puis le joueur *B* choisit l'un des des restants. Chacun lance alors son de, et le vainqueur est celui qui obtient le nombre le plus grand.

Question 1 : En supposant que *A* choisit le de *a*, quel de doit choisir *B* pour maximiser sa probabilite d'être vainqueur ?

Question 2 : Même question si le joueur *A* choisit un autre de.

Question 3 : Quelle(s) conclusion(s) tirez-vous de ces calculs ?

Exercice 2 :

Ayant observe que 4% des reservations pour un vol ne sont pas utilisees, une compagnie aerienne vend 75 billets pour 73 places.

Question 1 : Donner une expression de la probabilite exacte pour que tous les passagers aient une place ?

Question 2 : Calculer une valeur approchee de cette probabilite en utilisant la loi de Poisson. *(rappel : $e \simeq 2;71$)*

Exercice 3 :

Une grenouille franchit un escalier par bonds successifs de une ou deux marches, de maniere equiprobable au depart, puis elle fait un bond de deux marches avec une probabilite de 0,6 si elle avait fait un bond d'une seule marche juste avant, et de 0,3 dans le cas contraire.

Question 1 : Quelle est la probabilite que son deuxieme bond soit un bond de deux marches ?

Question 2 : Pour $i > 0$, soit S_i (resp. T_i) l'evenement \le i-eme bond est un bond de deux marches (resp. d'une marche)". Calculer $P(S_{i+1})$ en fonction de $P(S_i)$.

Question 3 : En posant pour tout entier i : $u_i = P(S_i) + x$, determiner x pour que la suite des u_i soit une suite geometrique. En deduire la valeur de u_i, et celle de $P(S_i)$.

On suppose desormais que l'escalier possede 7 marches (si la grenouille se trouve sur la sixieme marche, elle fait un bond d'une seule marche). Soit Y la variable aleatoire prenant pour valeur le nombre de bonds que fait la grenouille pour franchir cet escalier.

Question 4 : Donner la loi de Y.

Question 5 : Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 4 :

Un central telephonique dessert 5000 abonnes. A un instant donne, chaque abonne a une probabilite de 4% de se servir de sa ligne (on suppose que les appels sont independants).

Question 1 : Soit X le nombre de lignes occupees a un instant donne. Quelle est la loi de X ? Calculer son esperance mathematique et sa variance.

Question 2 : Donner une borne au nombre minimum d'appels que doit pouvoir traiter simultanement le central pour que la probabilite de saturation du central a un instant donne soit inferieure a 0,025 ?

Exercice 5 :

Trois joueurs, A, B et C font une partie constituee d'une suite de duels obeissant aux regles suivantes :

| les joueurs A et B commencent,

| le gagnant d'un duel joue le duel suivant contre celui qui n'a pas joue.

Ils decident que le vainqueur de la partie est celui qui gagne deux duels consecutifs.

On notera par la lettre a (resp. b, c) le resultat d'un duel qui voit le joueur A (resp. B, C) l'emporter, et une suite de resultats de duels par un mot f sur l'alphabet $Z = \{a; b; c\}$. Ainsi le mot *acbb* represente une suite de 4 duels, le premier ayant ete gagne par le joueur A, le second par le joueur C, et les 2 derniers par le joueur B (qui est donc le vainqueur de la partie).

Dans un premier temps, on suppose que la partie s'interrompt au plus tard apres 4 duels, sans necessairement qu'il y ait eu de vainqueur.

Question 1 : Ecrire l'ensemble des mots sur Z representant les resultats d'une suite possible de duels selon ces regles.
Representer ces mots selon un arbre.

On suppose que la probabilite que A gagne contre B vaut p, celle que B gagne contre C vaut q, celle que C gagne contre A vaut r, et on notera $p = 1-p$, $q = 1-q$ et $r = 1-r$.

Question 2 : Exprimer en fonction de p, q et r la probabilite que A soit vainqueur, celle que B soit vainqueur, celle que C soit vainqueur, celle qu'il n'y ait aucun vainqueur. Application numerique : $p = q = r = 0;5$.

On abandonne maintenant la contrainte \pas plus de 4 duels", les joueurs ayant decide de jouer jusqu'a la victoire de l'un d'entre eux.

Question 3 : Quel langage $L_A \subset Z^*$ (resp. L_B, L_C) represente la victoire de A (resp. de B, de C) ? *(indication : c'est un langage rationnel.)*

Question 4 : En s'appuyant sur l'arbre construit a la premiere question, exprimer en fonction de p, q et r la probabilite de victoire de chacun des joueurs. Application numerique : $p = q = r = 0;5$.

Question 5 : Soit X la variable aleatoire qui prend pour valeur le nombre de duels de la partie. Pour $p = q = r = 0;5$, donner la loi, puis l'esperance de X.