Exercice 1 On lance simultanément un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et un dé tétraédrique dont les faces sont numérotées de 1 à 4, et on s'intéresse aux faces cachées (sur lesquelles reposent les dés à l'arrêt). On définit la variable aléatoire X qui associe à un lancé la somme des numéros des deux faces cachées.

1. Décrire un univers Ω associé à cette expérience aléatoire.
2. Décrire le support $X(\Omega)$.
3. Supposons que les dés soient réguliers.
   (a) Donner la loi de X.
   (b) Calculer l'espérance de X.
   (c) Calculer la variance et l'écart-type de X.

Exercice 2 On lance deux dés honnêtes. On note X la variable aléatoire qui donne le plus grand des numéros obtenus et Y celle qui donne le plus petit. Donner les lois de chacune des deux variables ainsi que les espérances et les variances.

Exercice 3 Une roulette contient 36 cases numérotées de 1 à 36 dont 18 sont rouges et 18 sont noires, plus une case numérotée 0 de couleur verte. Un joueur qui mise sur la couleur rouge ou noire gagne deux fois sa mise si la couleur choisie sort. Un joueur qui mise sur un numéro de 1 à 36 gagne 36 fois sa mise si le numéro sort. Il est interdit de miser sur le zéro.

1. Un joueur mise a euro sur une couleur. Soit C la variable aléatoire correspondant au gain associé. Trouver la loi de C puis calculer $E(C)$.
2. Un joueur mise a euro sur un numéro. Soit N la variable aléatoire correspondant au gain associé. Trouver la loi de N puis calculer $E(N)$.
3. Calculer $\sigma(C)$ et $\sigma(N)$. Comparer alors les deux stratégies.

Exercice 4 On tire un domino d'une boîte de dominos usuels (chaque domino comprend deux parties portant chacune un entier compris entre 0 et 6, et les dominos sont tous différents). On définit la variable aléatoire X qui associe à un domino le carré de la différence des deux entiers portés par ce domino.

1. Décrire un univers Ω associé à cette expérience aléatoire.
2. Décrire le support $X(\Omega)$.
3. Donner la loi de X.
4. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 5 On lance quatre fois de suite une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité de tomber sur le côté face soit deux fois plus grande que celle de tomber sur le côté pile. Pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on définit la variable aléatoire X_i qui vaut 1 si on tombe sur face et 0 si l'on tombe sur pile au i-ème lancer. Enfin, on définit la variable aléatoire Y comme l'entier de représentation binaire $X_1X_2X_3X_4$.

1. Donner la loi de Y.
2. Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.
3. Calculer les probabilités des évènements "Y est pair" et "$Y < 8$".
4. Calculer la probabilité, sachant $Y < 8$, que l'on ait $Y = 5$.

Exercice 6 Un fabricant de smurts teste une première fois ses appareils à la sortie de la chaîne de fabrication. Si le test est positif (c'est-à-dire si le smurt fonctionne correctement), le smurt est acheminé chez le client. Sinon le smurt retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois. Si ce deuxième test est positif, le smurt est acheminé chez le client, sinon il est détruit. Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 70 % des smurts neufs sortis directement des chaînes de fabrication, mais que parmi les smurts réparés, seulement 60 % d'entre eux passent le second test avec succès. On note T_1 l'événement « le premier test est positif » et C l'événement « le smurt est acheminé chez le client ».

1. On choisit un smurt au hasard à la sortie de la chaîne de fabrication. Déterminer les probabilités des événements T_1 et C.
2. La fabrication d'un smurt revient à 1000 € au fabricant s'il n'est testé qu'une fois. Cela lui coûte 40 € de plus si le smurt doit être testé une seconde fois. Un smurt est facturé a € (a étant un réel positif) au client. On introduit la variable aléatoire X qui, à chaque smurt fabriqué, associe le « gain » (éventuellement négatif) réalisé par le fabricant.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de a.
   (b) Exprimer l'espérance de X en fonction de a.
   (c) À partir de quelle valeur de a, le fabricant peut-il espérer réaliser des bénéfices ?

Exercice 7 Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher. On effectue plusieurs tirages successifs au hasard d'une boule dans l'urne selon procédure suivante : après chaque tirage, si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne et si elle est noire, on ne la remet pas dans l'urne.

1. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de boules noires obtenues à l'issue de trois tirages.
   (a) Préciser les valeurs prises par X.
   (b) Calculer $P(X = 0)$.
   (c) Déterminer $P(X = 1)$.
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On effectue n tirages successifs. Soit k un entier compris entre 1 et n. Soit M l'événement « la k-ième boule tirée est noire et toutes les autres sont rouges ». Soit A l'événement « on obtient une boule rouge dans chacun des $k - 1$ premiers tirages et une boule noire au k-ième ». Soit B l'événement « on obtient une boule rouge dans chacun des $(n - k)$ derniers tirages ». Calculer $P(A)$, $P_A(B)$ et $P(M)$.

Exercice 8 Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire successivement plusieurs parties. La probabilité que le joueur perde la première partie est $0,2$. Le jeu se déroule ensuite comme suit :
– s'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05 ;
– s'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

1. Pour $n \in \{1, 2, 3\}$, on note E_n l'événement « le joueur perd la n-ième partie ». On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties.
   (a) Préciser les valeurs prises par X.
   (b) Calculer les probabilités des l'événements $(X = 2)$ et $(X = 3)$.
   (c) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (d) Calculer l'espérance de X.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'événement « le joueur perd la n-ième partie », p_n sa probabilité et $\overline{E_n}$ l'événement contraire.
   (a) Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, les probabilités des événements $E_n \cap E_{n+1}$ et $\overline{E_n} \cap E_{n+1}$ en fonction de p_n.
   (b) En déduire $p_{n+1} = 0,05\, p_n + 0,05$ pour tout entier naturel n non nul.
3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - \frac{1}{19}$.
   (a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, u_n puis p_n en fonction de n.
   (c) Calculer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.