Université Paris Diderot
L2

Combinatoire
Année 2009-2010

Partiel du 30 Octobre 2009

durée : 2h
Les documents ne sont pas autorisés

Un barème provisoire est donné à titre indicatif.
Toute question non traitée peut être admise.
Toute réponse doit être justifiée par une preuve.

Exercice 1 [5 points]

1. Combien y-a-t-il de permutations de $\{1, \ldots, 6\}$ dans $\{1, \ldots, 6\}$ vérifiant $(1) \neq 2$?
2. Soit $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ ayant exactement un cycle.
   (a) Donner les ensembles $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_3$, $\mathcal{U}_4$.
   (b) Déterminer le cardinal de $\mathcal{U}_n$?
   (c) Déterminer le nombre de permutations de $\{1, \ldots, 6\}$ ayant exactement deux cycles.

Exercice 2 [5 points] On note T_n^p le nombre de façons de partitionner un tableau de n cases en p parts qui peuvent être nulles.

1. Que vaut T_n^p ?
2. Montrer que T_n^p est aussi le nombre de façons d'insérer $p-1$ barres verticales entre n points alignés comme par exemple $|| \cdots | \cdot \cdot ||| \cdot | \cdot$. Dans les suites de $|$ et de $\cdot$ ainsi formées les barres verticales peuvent apparaitre également au début et à la fin.
3. Lorsqu'on échange les $|$ et les $\cdot$ (on remplace chaque $\cdot$ par une $|$ et réciproquement) dans les objets de la question 2, on obtient un nouvel ensemble de suites de points et de barres. Donner une interprétation combinatoire similaire à celle de la question 2.
4. L'échange précédent est-il bijectif ?
5. En déduire une identité entre T_n^p et $T_{n'}^{p'}$ pour des n' et p' bien choisis en fonction de n et p.

Exercice 3 [10 points] Un dérangement de $\{1, \ldots, n\}$ est une permutation sans point fixe de S_n, le groupe des permutations, c'est-à-dire une permutation telle que pour tout $i = 1, \ldots, n$, $(i) \neq i$.

Partie 1

1. On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des parties de $\{1, \ldots, n\}$. Soit $I \in \mathcal{P}_n$ tel que $|I| = k$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ et A_I l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ laissant fixes les éléments de I.

   Par exemple les permutations de $A_{\{1,2,3\}}$ doivent laisser fixes (au moins) les éléments $1, 2$ et 3 : si $n = 5$, seules deux permutations satisfont cette condition. Lesquelles ?
   Calculer $|A_I|$ pour tout I dans $\mathcal{P}_n$.
2. En déduire grâce à la formule du crible, le cardinal de $A_{\{1\}} \cup \ldots \cup A_{\{n\}}$.
3. En déduire que le nombre $\mathcal{D}_n$ de dérangements de $\{1, \ldots, n\}$ est

$$\mathcal{D}_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Partie 2

On peut calculer le nombre de dérangements de $\{1, \ldots, n\}$ d'une autre façon :

1. Justifier que tout dérangement $= ({}_1 \ldots {}_n)$ de $\{1, \ldots, n\}$ est :
   – soit de la forme $({}_1 \ldots {}_{i-1}\ \mathbf{n}\ {}_{i+1} \ldots {}_{n-1}\ \mathbf{i})$,
   – soit de la forme $({}_1 \ldots {}_{i-1}\ \mathbf{n}\ {}_{i+1} \ldots {}_{n-1}\ \mathbf{j})$, $j \neq i$,
   où i est un entier quelconque avec $1 \leq i \leq n - 1$.
2. En déduire alors la relation suivante :

$$\forall n > 1, \quad \mathcal{D}_n = (n-1)[\mathcal{D}_{n-1} + \mathcal{D}_{n-2}].$$

   Cette relation permet de retrouver par récurrence l'équation (1) (non demandé ici).

Partie 3

Application : n hommes arrivent à une fête chacun avec un chapeau, qu'ils déposent au vestiaire. Quel est le nombre de façons de mettre les n chapeaux sur les n têtes en sachant qu'au moins un homme récupère son chapeau ?