Université Paris 7 Combinatoire et Probabilités
L2 Année 2008-2009

Partiel du 22 Novembre 2008

durée : 2h
Les documents ne sont pas autorisés

Exercice 1 Questions de comptage

1. Combien y a-t-il de permutations de l'ensemble $\{a, b, c, d, e, f, g\}$? En utilisant la formule du crible (l'écrire), trouver combien parmi celles-là ne contiennent aucune des séquences *ab*, *cdf* ?
2. Combien de mots de longueur n peut-on écrire sur l'alphabet $\{a, b, c, d, e\}$?
3. Combien de mots différents peut-on faire avec toutes les lettres du mot **rigolo**, et avec toutes celles du mot **trucmuche** ?
4. Combien de mots binaires de longueur n contiennent exactement k lettres 0, avec $n \geq k$? Combien parmi ceux-là ont 0 en première bmsgtieurbitiln118.23980dédu(a)300ml'ensemdbien

5. On considère le sous-ensemble T de l'ensemble des chemins de Schröder constitués uniquement de pas $\nearrow$ et $\searrow$ et de pas horizontaux qui sont sur l'axe x. Le but de cette partie est de donner une bijection entre l'ensemble des chemins de T de longueur $2n$ et l'ensemble des chemins de Dyck de longueur $2n+2$.
   (a) Montrer qu'un chemin de Dyck commence toujours par un pas $\nearrow$ et termine toujours par un pas $\searrow$.
   (b) Montrer qu'un chemin de Dyck auquel on a oté le premier et dernier pas descend au maximum de 1 en dessous de l'axe x (voir la figure 2).

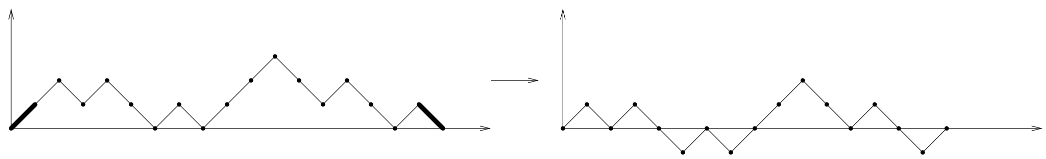

FIG. 2 – Un chemin de Dyck auquel on ôte le premier et dernier pas

   (c) Donner une bijection entre l'ensemble des chemins de T de longueur $2n$ et l'ensemble des chemins de Dyck de longueur $2n+2$ (il faut décrire la construction et montrer que c'est bien une bijection, c.a.d. montrer qu'on obtient bien la bonne classe de chemins, de la bonne taille et décrire une bijection inverse.).
   (d) Donner une formule pour T_{2n}, le nombre de chemins de T de longueur $2n$.