Université Paris 7
L2

Combinatoire
Année 2013-2014

Examen du 13 janvier 2014

durée : 3h
Les documents ne sont pas autorisés

Un barème est donné à titre indicatif.

Toute réponse devra être justifiée.

Le coefficient binomial (5 points)

On considère une séquence de n cases,

1. On appelle $S_{n,1}$ (respectivement $S_{n,2}$) l'ensemble des séquences de n cases dont une est (respectivement deux sont) coloriée(s). Quel est le cardinal de $S_{n,1}$ et $S_{n,2}$?
2. On définit l'application suivante : étant données deux séquences, s_1 appartenant à $S_{n,1}$ et s_2 appartenant à $S_{n,2}$, on obtient une nouvelle séquence t de n cases selon la règle suivante : pour tout $i = 1, \ldots, n$, la i-ème case de t est coloriée si la i-ème case de s_1 ou de s_2 est coloriée. On note T_n l'image de cette application, autrement dit l'ensemble des configurations t qu'on peut obtenir à partir de deux séquences quelconques s_1 et s_2 de $S_{n,1}$ et $S_{n,2}$.
   (a) Dessiner toutes les configurations possibles de $S_{n,1}$ pour $n = 1, 2, 3$ et toutes les configurations possibles de $S_{n,2}$ pour $n = 2, 3$.
   (b) En utilisant l'application ci-dessus dessiner toutes les configurations possibles de T_n pour $n = 3$.
   (c) Décrire l'ensemble T_n pour n quelconque.
   (d) Quel est le cardinal de T_n ?
   (e) Montrer que l'application définie ci-dessus n'est pas injective.

Problème de comptage (4 points)

Une commission de 4 femmes et 4 hommes est constituée à partir d'un groupe de 10 femmes et 6 hommes. Combien y a-t-il de commissions différentes possibles sachant que :

1. Il n'y a pas de restrictions.
2. Il y a deux hommes, appelons les $H1$ et $H2$, qui ne veulent pas être ensemble dans la commission.
3. Il y a un homme H3 et une femme F1 qui ne veulent pas être ensemble dans la commission.

Une fois la commission formée, les membres de la commission vont au restaurant et occupent

[redacted]

permutation 234561, dont une des representations cycliques est (123456).

2. Écrire les ensembles U_1, U_2, U_3, U_4. ✓
3. Déterminer le cardinal de U_n. ✓
4. Déterminer le nombre de permutations $U_{k,n-k}$ de $\{1,\ldots,n\}$ ayant exactement un cycle de longueur k et un cycle de longueur $n-k$.
5. En déduire une formule pour le nombre de permutations S_n^2 de $\{1,\ldots,n\}$ ayant exactement deux cycles. ✓
6. En déduire une formule pour le nombre de permutations P_n^2 de $\{1,\ldots,n\}$ ayant exactement deux cycles de longueurs différentes de 1, pour $n > 2$.

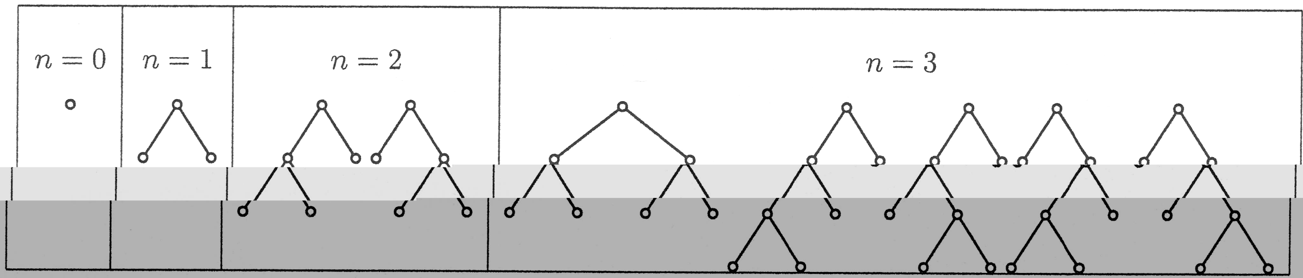
[redacted]

11. En utilisant le même principe, compter le nombre de dérangements de longueur n ayant exactement deux cycles, pour $n > 2$, et vérifier que c'est la même formule que au point [6.].

Arbres binaires complets (6 points)

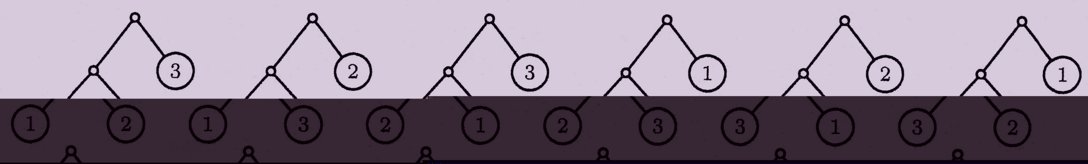
Rappelons qu'un arbre binaire complet est un arbre enraciné avec deux types de sommets : les noeuds internes, qui ont chacun 2 fils (le fils gauche et le fils droit), et les feuilles, qui n'ont pas de fils.

Voici les arbres binaires complets à n noeuds pour $n = 0, 1, 2, 3$:



Un arbre binaire étiqueté à k feuilles est un arbre binaire complet ayant k feuilles qui portent des numéros distincts pris dans $\{1, \ldots, k\}$.

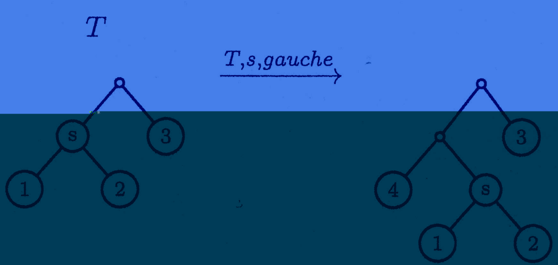
Voici les arbres binaires étiquetés à 3 feuilles :



2. Soit A_n l'ensemble des arbres binaires étiquetés à n noeuds et B_n celui des arbres binaires complets à n noeuds. Montrer que $a_n = (n+1)!b_n$. ✓
3. Rappelez la bijection vue en cours entre les arbres binaires complets à n noeuds internes et les chemins de Dyck de longueur $2n$.
4. Quel est le nombre d'arbres binaires complets à n noeuds internes ?

Considérons la construction suivante : étant donné un arbre binaire étiqueté T à k feuilles, on choisit un sommet (noeud ou feuille) s de T et un côté c (gauche ou droite), puis on insère un nouveau sommet au milieu de l'arête joignant s à son père et une feuille d'étiquette $k+1$ du côté c de cette arête.

Voici un exemple :



5. Que fabrique cette construction ?
6. Appliquer cette construction pour les arbres étiquetés avec 1 noeud interne.
7. Montrer que la construction précédente définit une bijection (préciser entre quels ensembles et décrire la bijection inverse) et en déduire que pour $n \geq 0$,

$$e_{n+1} = e_n \cdot (2n+1) \cdot 2$$

8. Calculer le nombre d'arbres binaires étiquetés en itérant la relation précédente et retrouver ainsi le nombre d'arbres binaires complets.