Université Paris 7 - Licence [illegible] Année universitaire 2012-2013

# Examen de Combinatoire

Lundi 14 janvier 2013

Durée : 3 heures

## Avertissement

Aucun document n'est autorisé.
L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdit.
**Pensez à bien justifier vos réponses.**

## Exercice 1 : Permutations sans point fixe (11 points)

Soit $S_n$ le groupe des permutations de $\{1,\ldots,n\}$. Un *dérangement* est une permutation sans point fixe, c'est-à-dire une permutation $\sigma$ telle que pour tout $i = 1,\ldots,n$, $\sigma(i) \neq i$. Par exemple 3 1 2 6 4 5 et 8 7 6 5 4 3 2 1 sont des dérangements alors que $\sigma = 7\,6\,5\,4\,3\,2\,1$ ne l'est pas car $\sigma(4) = 4$.

1. Écrire toutes les permutations avec $n = 3$ et repérer celles qui sont des dérangements.

On va calculer le nombre de dérangements de longueur $n$. L'idée est de calculer le nombre de permutations ayant au moins un point fixe et de les soustraire au nombre total de permutations. On le fera sur un exemple, $n = 4$, et ensuite on donnera la formule pour $n$ quelconque.

2. Soit $F_n^{\{i\}}$ l'ensemble de permutations de longueur $n$ laissant fixe au moins $i$. Autrement dit, pour tout $\sigma$ dans $F_n^i$ on a $\sigma(i) = i$. Par exemple pour $n = 3$ et $i = 1$ on a les permutations 123, 132. Écrire l'ensemble des permutations de $F_4^{\{2\}}$.
3. Quel est le cardinal de $F_4^{\{2\}} \cap F_4^{\{3\}}$, c.à.d. le nombre de permutations de longueur 4 laissant fixe au moins 2 et 3 ?
4. Donner la formule d'inclusion-exclusion et la développer pour $n = 4$.
5. À l'aide de la question précédente calculer le nombre de permutations de longueur 4 avec au moins un point fixe, c.à.d. $|F_4^{\{1\}} \cup F_4^{\{2\}} \cup F_4^{\{3\}} \cup F_4^{\{4\}}|$.
6. Donner la formule pour le nombre de dérangements de longueur 4.

Calculons maintenant le nombre de dérangements de longueur $n$.

7. Quel est le nombre de permutations de longueur $n$ ?
8. Quel est le cardinal de $F_n^{\{i\}}$ ?
9. Soit $I$ un sous-ensemble de $\{1,\ldots,n\}$, avec $|I| = k$ et $F_n^I$ l'ensemble des permutations de $\{1,\ldots,n\}$ laissant fixes au moins les éléments de $I$. Quel est le cardinal de $F_n^I$ ?
10. En déduire grâce à la formule d'inclusion-exclusion, le cardinal de $F_n^{\{1\}} \cup \ldots \cup F_n^{\{n\}}$.
11. Calculer le nombre $D_n$ de dérangements de $\{1,\ldots,n\}$.

On applique maintenant les résultats précédents :

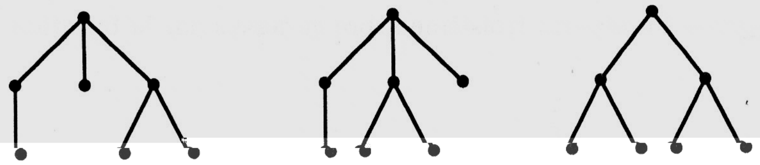
12. $n$ personnes arrivent à une fête chacun avec un chapeau. Quel est le nombre de façons de mettre les $n$ chapeaux sur les $n$ têtes de telle sorte qu'au moins une personne récupère son chapeau ?

13. Quel est le nombre de façons de mettre les $n$ chapeaux sur les $n$ têtes de telle sorte que personne ne récupère son chapeau ?

## Exercice 2 : Coefficients binomiaux (8 points)

1. Combien y a-t-il de façons de choisir $k$ cases [redacted]

en joignant la racine à chacun de ses fils par une arête. Voici trois exemples d'arbres planaires de taille 7.



Remarquons encore une fois que les fils de chaque sommet sont ordonnés, de sorte que les deux arbres de gauche de la figure précédente sont distincts. En particulier si les sommets $x_1, \ldots, x_k$ sont les fils d'un sommet $x$ de gauche à droite, alors on dira que $x_1$ est le premier fils de $x$, $x_k$ est son dernier fils et $x_{i+1}$ suit $x_i$.

1. Dessiner tous les arbres planaires de taille 2, 3 et 4 : vous devez en trouver respectivement 1, 2 et 5.

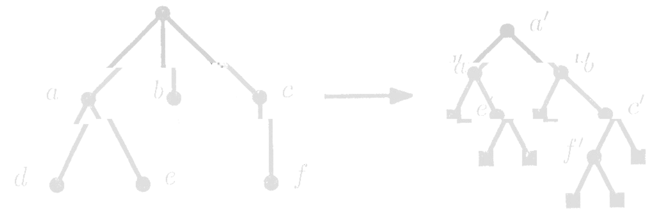
Un arbre planaire est dit *binaire complet* si tout sommet a soit 2 fils (c'est alors un sommet interne) soit 0 fils (c'est alors une feuille). L'arbre de droite de la figure précédente est un arbre binaire complet. Si un sommet $x$ a deux fils $y$ et $z$ alors le premier est appelé *fils gauche* et le second *fils droit* de $x$.

2. Dessiner les arbres binaires complets avec 1,2 et 3 sommets internes.
3. Montrer qu'un arbre binaire complet avec $n$ sommets internes possède $n+1$ feuilles.

On considère la transformation suivante, qui prend un arbre planaire $A$ de taille $n$ et construit un arbre binaire complet $A'$ avec $n-1$ sommets internes. À chaque sommet $x$ non racine de $A$ on va associer un sommet interne $x'$ de $A'$ et relier ces sommets de la façon suivante :

- Si $y$ est le premier fils de $x$ alors le fils gauche de $x'$ dans $A'$ est $y'$.
- Si $x$ est une feuille de $A$ alors le fils gauche de $x'$ est une feuille gauche de $A'$.
- Si $z$ suit $y$ dans la séquence des fils de $x$ alors le fils droit de $y'$ dans $A'$ est $z'$.
- Si $y$ est le dernier fils de $x$ alors le fils droit de $y'$ est une feuille droite de $A'$

Cette transformation est une bijection entre les arbres planaires de taille $n$ et les arbres binaires complets à $n-1$ sommets internes. La figure ci-dessous donne un exemple d'application de cette bijection (on a mis des étiquettes pour expliciter la correspondance entre les sommets de $A$ et les sommets internes de $A'$) :




8. Calculer l'image des arbres planaires de taille $n = 2, 3, 4$ et celle des arbres de la figure précédente.
9. Montrer que le nombre d'arbres planaires de taille $n$ ayant $k$ feuilles est égal au nombre d'arbres binaires complets avec $n-1$ sommets internes et $k$ feuilles gauches.
10. Montrer que le nombre d'arbres planaires de taille $n$ ayant $k$ sommets internes est égal au nombre d'arbres binaires complets avec $n-1$ sommets internes et $k$ feuilles droites.
11. Montrer que le nombre d'arbres planaires de taille $n$ ayant $k$ sommets internes est égal au nombre d'arbres planaires de taille $n$ ayant $k$ feuilles.

12. Décrire la transformation inverse de la bijection : cette transformation doit prendre un arbre binaire complet avec $n - 1$ sommets internes et construire un arbre planaire de taille $n$. Donner l'image du troisième arbre ci-dessus par la bijection inverse.