Université Paris 7 - Licence Année universitaire 2010–2011

Examen de Combinatoire

Lundi 10 janvier 2011

Durée : 3 heures

Avertissement

Aucun document n'est autorisé. L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdit.
Le barême est indicatif.
Pensez à bien justifier vos réponses.

Problème de comptage (10 points)

Un groupe de 6 femmes et 5 hommes vont au cinéma et ils s'installent sur une rangée de 11 places. Combien ont ils de façons de s'installer sachant que :

1. Il n'y a pas de restrictions.
2. Les femmes et les hommes sont alternés.
3. Les femmes sont groupées ensemble et les hommes aussi.
4. La femme F_i et l'homme H_j ne veulent pas être assis l'un à côté de l'autre.
5. Les femmes et les hommes sont alternés et la femme F_i et l'homme H_j ne veulent pas être assis l'un à côté de l'autre.
6. Les femmes et les hommes sont groupés ensemble et l'homme H_k ne veut pas être assis à coté de l'homme H_l.

Ensuite ils vont au restaurant et ils ne trouvent pas de table pour 11. Il decident de s'installer alors sur une table ronde de 6 et sur une table ronde de 5. Combien de façons ont ils de s'installer (en considérant égales les configurations à rotation près) sachant que :

1. Il n'y a pas de restrictions.
2. Les femmes sont assises à une table et les hommes à l'autre.
3. Les femmes sont assises à une table, les hommes à l'autre et l'homme H_i n'est pas à coté de l'homme H_l.
4. La femme F_i et l'homme H_j ne sont pas assis l'un à coté de l'autre. (Attention, deux cas possibles !)

Le coe□cient binomial (5 points)

On considère une séquence de n cases,

1. On appelle $S_{n,1}$ (respectivement $S_{n,2}$) l'ensemble des séquences de n cases dont une est (respectivement deux sont) coloriée(s). Quel est le cardinal de $S_{n,1}$ et $S_{n,2}$?

2. On définit l'application suivante : étant données deux séquences distinctes s_1 appartenant à $S_{n,1}$ et s_2 appartenant à $S_{n,2}$, on obtient une nouvelle séquence t de n cases selon la règle suivante : pour tout $i = 1; : : : ; n$, la i-ème case de t est coloriée si la i-ème case de s_1 ou de s_2 est coloriée. On note T_n l'image de cette application, autrement dit l'ensemble des configurations t qu'on peut obtenir à partir de deux séquences quelconques s_1 et s_2 de $S_{n,1}$ et $S_{n,2}$.
   (a) Dessiner toutes les configurations possibles de $S_{n,1}$ pour $n = 1; 2; 3$ et toutes les configurations possibles de $S_{n,2}$ pour $n = 2; 3$.
   (b) En utilisant l'application ci-dessus dessiner toutes les configurations possibles de T_n pour $n = 3$.
   (c) Décrire l'ensemble T_n pour n quelconque.
   (d) Quelle est le cardinal de T_n ?
   (e) Modifier l'application ci-dessus pour expliquer la formule suivante, pour $n \geq 3$:

$$n \cdot \binom{n}{2} = 2 \cdot \binom{n}{2} + 3 \cdot \binom{n}{3}:$$

   En particulier décrire les configurations qui sont comptées respectivement par la partie gauche et la partie droite de la formule et la bijection entre les deux.

Le principe d'inclusion-exclusion (5 points)

1. Donner la formule d'inclusion-exclusion.
2. Soit S_i, pour $i = 1; : : : ; n-2$, l'ensemble des permutations de $1; : : : ; n$ telles que $(i) = i + 2$ et soit $|S_i|$ son cardinal. Calculer $|S_i|$, c.à.d. le nombre de permutations de longueur n ayant le i-ème élément égal à $i + 2$.
3. Calculer $|S_{i_1,i_2,\ldots,i_p}|$ où $S_{i_1,i_2,\ldots,i_p}$ est l'ensemble des permutations de $1; : : : ; n$ telles que $(i_k) = i_k + 2$, avec $i_k \neq n - 1$ et $i_k \neq n$, pour tout $k = 1; : : : ; p$.
4. En utilisant la formule d'inclusion-exclusion, calculer le nombre de permutations de $1; : : : ; n$ telles qu'il existe au moins une position $i \in \{1; : : : ; n-2\}$ où $(i) = i + 2$.
5. Montrer que le nombre de permutations de $\{1; : : : ; n\}$ telles que $(i) \neq i+2$ pour tout $i = 1; : : : ; n-2$ est :

$$\sum_{p=0}^{n-2} (-1)^p \frac{(n-2)!}{p!}(n-p)(n-p-1):$$

6. Donner la formule pour le nombre de permutations de $\{1; : : : ; n\}$ telles que $(i) \neq i+k$, où $k = 0; : : : ; n-1$ et $i = 1; : : : ; n-k$.

Arbres et chemins 2-Motzkin (8 points)

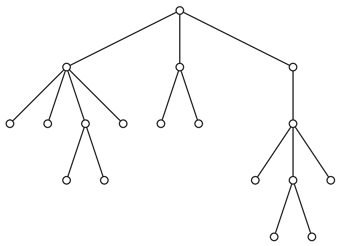
Un chemin de Motzkin est un chemin commençant en (0,0), terminant sur l'axe des abscisses, ne passant jamais au-dessous de l'axe des abscisses et formé de pas *nord-est*, $(1; 1)$, *sud-est*, $(1; -1)$ et *est*, $(1; 0)$.

1. Combien y-a-t'il de chemins de Motzkin de longueur 1, 2 et 3 (les dessiner) ?
2. Un chemin 2-Motzkin est un chemin de Motzkin où les pas *est* peuvent être de deux types, trait plein ou pointillé.

(a) Déduire de la question 1 le nombre de chemins 2-Motzkin de longueur 1, 2 et 3.

(b) Les chemins 2-Motzkin sont en bijection avec les arbres planaires. Etant donné un arbre planaire à n arêtes, on obtient un chemin 2-Motzkin en effectuant un parcours préfixe de l'arbre. Partant de la racine, on ignore la première arête et pour chaque arête rencontrée ensuite pour la première fois on dessine :
- un pas *nord-est* pour une arête gauche,
- un pas *sud-est* pour une arête droite,
- un pas *est*, trait plein, pour une arête seule,
- un pas *est*, trait pointillé, pour toute autre arête.

i. Dessiner le chemin obtenu pour l'arbre planaire suivant :



ii. Montrer que toute arbre planaire donne par cette bijection un chemin 2-Motzkin.

iii. Quelle est la longueur d'un chemin obtenu par cette bijection lorsque l'arbre à n arêtes ? En déduire le nombre de chemins de Motzkin de longueur n.

iv. Décrire la bijection inverse qui permet de passer d'un chemin 2-Motzkin à un arbre planaire.