Université Paris Diderot — Combinatoire
L2 — Année 2012-2013

TD n°2

Dénombrement

Exercice 1 1. Montrer par récurrence et de façon combinatoire que $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

2. Montrer de façon combinatoire que $1+3+\cdots+2n-1=n^2$.

Exercice 2 1. Montrer de façon combinatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. En déduire que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

3. Déduire alors la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^i i^2$.

Exercice 3 Combien y-a-t'il de façon de colorier k cases d'une rangées de n cases ? Utiliser cette interprétation pour montrer combinatoirement les formules suivantes :

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
3. $\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$
5. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-k}\binom{n-i-1}{k-1} = \binom{n}{k}$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$
7. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$ et en déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exercice 4 1. Combien de sous-ensembles de $[\![1,10]\!]$ contiennent au moins un entier impair ?

2. Un groupe est formé de quatre hommes et six femmes. Chaque homme épouse une femme. Combien y a-t-il de solutions possibles ?

Exercice 5 1. Montrer que le nombre de k-uplets d'entiers ≥ 1 dont la somme est n est $\binom{n-1}{k-1}$.

2. Montrer que le nombre de k-uplets d'entiers ≥ 0 dont la somme est n est $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Exercice 6 1. Montrer que le nombre d'applications strictement croissante de $[\![1,k]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$, avec $1 \leq k \leq n$, est $\binom{n}{k}$.

2. Soient n et k deux entiers naturels non nuls.
   (a) Soit f une application croissante de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$. Montrer que l'application g de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, k+n-1]\!]$ définie par $g(p) = f(p) + p - 1$, pour tout p, $1 \leq p \leq k$, est strictement croissante.
   (b) Soit A l'ensemble des applications croissantes de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$. Soit B l'ensemble des applications strictement croissantes de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, k+n-1]\!]$. Montrer qu'il existe une bijection de A sur B et en déduire que le nombre des applications croissantes de $[\![1, k]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ est $\binom{k+n-1}{k}$.

Exercice 7 [Mots]

1. Combien y a-t-il de mot de 16 bits ayant 8 bits égaux à 1 ?
2. Soit $A = \{a, b, c, d\}$. Combien y a-t-il de mots de longueurs n sur l'alphabet A ? Combien d'entre eux sont-ils des palindromes ?
3. Combien de mots différents peut-on faire avec les lettres du mot ESTATE ?
4. On a n lettres dont m sont identiques et les autres toutes distinctes. Quel est le nombre de mots qu'on peut faire avec ? Vérifier sur un petit exemple ($n = 3$, $m = 2$).
5. Un tiroir contient trois chaussettes bleues, trois chaussettes rouges et quatre chaussettes vertes. On en sort huit, une par une. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

Exercice 8 [Boites] On dispose de m boîtes $B_1, B_2, \ldots, B_m$ et de n objets $\{1, \ldots, n\}$.

1. Combien y a-t-il de façons de ranger tous les objets dans les boîtes (une boîte peut contenir plusieurs objets) ? Montrer l'égalité

$$\begin{aligned} m^n &= \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_m=n} \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\ldots-n_m}{n_m} \\ &= \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_m=m} \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!} = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_m=m} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} \end{aligned}$$

2. Combien reste-t-il de façons de ranger tous les objets si on peut mettre au plus un objet par boîte ? Et si on veut que la première boîte reste vide ? Ou plutôt si on veut qu'au moins l'une des deux premières boîtes reste vide ?