[redacted]

Exercice 1 : coefficient binomial

[redacted]

— En déduire le nombre de couples (X, Y) d'éléments de $P(E)^2$ tels que $X \cup Y = E$.

3. Trouver le nombre de triplets (X, Y, Z) d'éléments de $P(E)^3$ tels que $X \cup Y \cup Z = E$.
4. Trouver le nombre de p-uples $(X_1, \ldots, X_p)$ d'éléments de $P(E)^p$ dont la réunion vaut E.

Exercice 2 : placements (4 points)

Un jardinier plante des bulbes de dahlias au pourtour d'un parterre circulaire, régulièrement espacés. Il possède 6 bulbes de dahlias rouges, 4 de dahlias oranges et 2 de dahlias jaunes.

Combien de massifs différents peut-il composer

1. sans restriction ?
2. en laissant les dahlias jaunes ensem[redacted]
3. sans qu'il y ait plus [redacted]ges à la suite ?

[redacted]

3. donner la formule du principe d'inclusion-exclusion.

4. En utilisant le principe d'inclusion exclusion montrer que le nombre de surjections de A dans B est :

$$S_n^m = \begin{cases} 0 & \text{si } m < n \\ n! & \text{si } m = n \\ \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} (n-p)^m & \text{si } m > n \end{cases}$$

Exercice 4 : paires non croisées et chemins de Dyck (6 points)

1. Donner la définition d'un chemin de Dyck de longueur $2n$.
2. Soit un disque comportant $2n$ points ($n \in \mathbb{N}^*$) sur son bord, numérotés de 1 à $2n$ consécutivement. On appelle système de paires non croisées sur ce disque un appariement deux à deux des points tel que :
   - deux points appariés sont reliés par un arc passant à l'intérieur du disque ;
   - Les arcs ne se croisent pas entre eux.

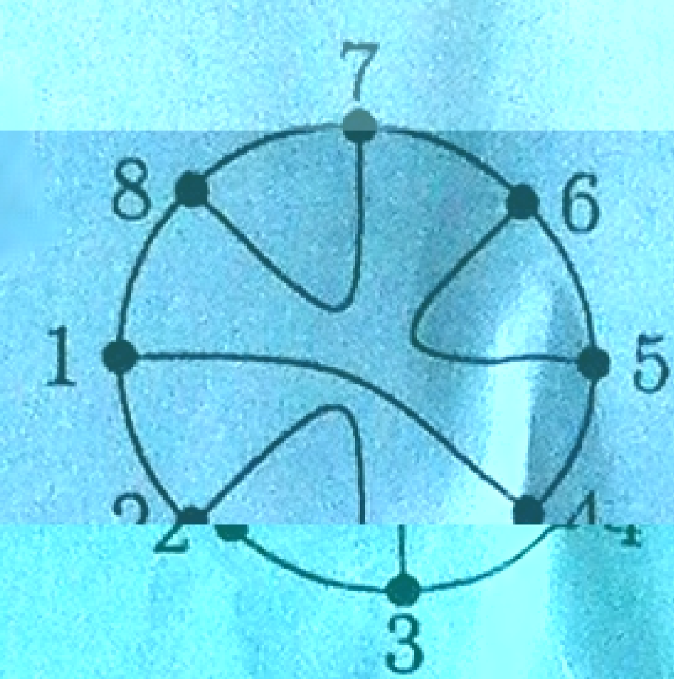

FIGURE 1 – système de paires non croisées sur le disque à 8 points

L'ensemble des systèmes de paires non croisées sur le disque à $2n$ points est en bi[illegible] avec l'ensemble de chemins de Dyck de longueur $2n$. [illegible] non croisées sur le disque à $2n$ points, on obtient un chemin de Dyck [illegible] de la façon suivante :

- Parcourir le bord du disque point par point à partir du point [illegible] numéros croissants. [illegible]
  - s'il est le début d'un arc [illegible]
  - s'il est la fin d'un arc [illegible]

(a) Donner tous les systèmes de paires non croisées sur le [illegible]

(b) Donner le chemin obtenu à partir du système de paires [illegible] en appliquant la transformation décrite ci-dessus.

[illegible]