Cours de Combinatoire

10 décembre 2009

1 Rappels sur les ensembles

Définitions
Soit A et B deux ensembles On note par

- $|A|$ son cardinal, *c.a.d.* le nombre d'elements de A
- $A \cup B$ l'union de A et B, $A \cup B = \{x \quad x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- $A \cap B$ l'intersection de A et B, $A \cap B = \{x \quad x \in A \text{ et } x \in B\}$
- $A \subset B$ si pour tout x, si $x \in A$ alors $x \in B$
- $A \backslash B$ la di erence de A et B, $A \backslash B = \{x \quad x \in A \text{ et } x \notin B\}$
- $A \times B$ l'ensemble des couples ordonnes x, y tel que $x \in A$ et $y \in B$

$$A \times B = \{ x, y \quad x \in A \text{ et } y \in B\}$$

Proprietés

- $|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$
- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
- $|A^n| = |A|^n$ pour $n \in \mathbb{N}$

2 Applications, fonction caractéristique, arrangements

Définitions

- Soit A et B deux ensembles Une application ϕ de A dans B, notee par $\phi \quad A \to B$, associe à chaque element $a \in A$ un unique element de B, note $\phi \ a$ Formellement on peut voir une application comme un sous-ensemble de $A \times B$ tel que pour tout $x \in A$ il existe un unique $y \in B$ tel que $x, y \in$
- Soit $A \subset B$, on de nit sa fonction caracteristique $f_A \quad B \to \{ \ , \ \}$ par

$$f_A \ a = \begin{cases} & \text{si } a \notin A \\ & \text{si } a \in A \end{cases}$$

Propriétés

- *L'ensemble des applications de A dans B a cardinalité* $|B|^{|A|}$
  Pour chaque element de A on a $|B|$ possibilites de choisir son image
- *L'ensemble des fonctions caractéristiques sur l'ensemble B a cardinalité ^{n} où $n = |B|$.*
  Pour chaque element de B on a deux possibilites de choisir son image

Il y a une bijection directe entre l'ensemble $P \ B$ des parties de B et l'ensemble des fonctions caracteristiques sur B, donc $|P \ B \ | = \ ^n$, où $n = |B|$

Définitions

- Une injection $\phi \quad A \to B$ est une application telle qu'à chaque element de B correspond au plus un element de A Autrement dit il n'y a pas deux elements qui ont la meme image
- Un arrangement de n elements parmi m, est une liste ordonnee de n elements distincts d'un ensemble à m elements

Propriétés

- *L'ensemble des injections de A dans B a cardinalité $m(m-1)\dots(m-n+1)$ où $|A| = n$ et $|B| = m$.*
  On a m possibilites de choisir l'image du premier element de A, $m-1$ possibilites de choisir l'image du deuxième, etc.
- *Le nombre A_m^n d'arrangements de n éléments parmi m est $m(m-1)\dots(m-n+1)$.*

Définition

- Une surjection $\phi : A \to B$ est une application telle qu'à chaque element de B correspond au moins un element de A. Autrement dit l'ensemble des images des elements de A par ϕ est B.
- Une bijection $\phi : A \to B$ est une application
  - injective avec $|A| = |B|$,
  - ou encore injective et surjective.

Définition

- Une permutation d'un ensemble E à n elements est une bijection de E dans lui-meme.

Propriété

- *Le nombre de permutations est égal à $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.*
  L'ensemble des permutations est egal à l'ensemble des injections de E dans E.

3 Double comptage et combinaisons

Principe du double comptage : Si on compte les elements d'un meme ensemble de deux manières differentes on trouve le meme resultat.
Exercice : À un mariage, le nombre de gens qui serrent la main à quelqu'un un nombre impair de fois est pair.
Solution : Soit x_i le nombre de fois que la personne i serre la main à quelqu'un et y le nombre total de poignees de main. Par definition $\sum_i x_i = 2y$. Supposons que le nombre de gens qui serrent la main un nombre impair de fois est impair. Alors la somme des x_i correspondants est impaire. Comme les x_i restants sont pairs, la somme totale reste impaire et ne peut etre egale à $2y$. Il y a donc une contradiction et la supposition precedente est fausse : le nombre de gens qui serrent la main un nombre impair de fois est pair.

Définition

- Une combinaison de k elements parmi n est un sous-ensemble de cardinal k d'un ensemble de cardinal n. On note C_n^k ou $\binom{n}{k}$ le nombre de combinaisons de k elements parmi n.

Par convention $\binom{n}{k} = 0$ si $n < 0$, $k < 0$ ou $k > n$

Propriétés

- *Valeur du coefficiant binomial : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$*
  Par double comptage des arrangements : $k! C_n^k = A_n^k$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

3.1 La formule du binôme

Soit A un anneau et $a, b \in A$ tel que $ab = ba$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

On va le montrer combinatoirement et par induction.

Preuve combinatoire. Dans le developpement du produit $(a+b)^n$ on a $\binom{n}{k}$ facons de fabriquer le terme $a^{n-k}b^k$ (en effet parmi les n facteurs $(a+b)$, il faut choisir k fois b pour obtenir $a^{n-k}b^k$).

Preuve par induction

- Cas de base : $(a+b)^0 = C_0^0$
- Induction : On suppose que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$, on veut montrer que $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}b^k$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\cdot(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k \\
&= a_{n+1} + b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)a^{n+1-k}b^k = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k.
\end{aligned}
$$

On a utilise la relation du triangle de Pascal

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Exercices

- *Calculer* $S = \sum_{q=0}^{p}(-1)^q\binom{n}{q}\binom{n-q}{p-q}$ *pour* $1 \le p \le n$.

  On remarque $\binom{n}{q}\binom{n-q}{p-q} = \binom{n}{p}\binom{p}{q}$. De sorte que $S = \binom{n}{p}\sum_{q=0}^{p}(-1)^q\binom{p}{q} = \binom{n}{q}(1-1)^p = 0$.
- *Calculer* $S = \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{p}\binom{p}{k}(-1)^{n-p}t^{n-p+k}(1-t)^{p-k}$.

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}t^{n-p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}t^k(1-t)^{p-k} \\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-t)^{n-p}(1-t+t)^p = (1-t)^n.
\end{aligned}
$$

3.2 Coefficients multinomiaux

Définition

Etant donnes $n_1+\ldots+n_k = n$ des entiers positifs, le coefficient multinomial $\binom{n}{n_1,\ldots,n_k}$ est defini par

$$\binom{n}{n_1,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Remarquons que si $n_1+n_2 = n$ alors $\binom{n}{n_1,n_2} = \binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_2}$, on retrouve les coefficients binomiaux.

Propriété

- *Le coefficient multinomial $\binom{n}{n_1,\ldots,n_k}$ est le nombre de façons de partitionner l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$ en k parties $A_1,\ldots A_k$ disjointes telles que $|A_i| = n_i$ pour tout $i = 1,\ldots,k$.*
  Il y a $\binom{n}{n_1}$ facons de choisir les n_1 elements de A_1, puis $\binom{n-n_1}{n_2}$ facons de choisir les n_2 elements de A_2 parmi les $n - n_1$ entiers restants, puis $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$, etc. Finalement
  $$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}{n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$
- *Le nombre de mots de longueurs n sur l'alphabet $\{1,\ldots,k\}$ contenant n_i lettres i pour tout $i = 1,\ldots k$ est $\binom{n}{n_1,\ldots,n_k}$.*

Formule multinomiale
La formule du binome s'etend de la facon suivante
$$(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum_{n_1+\ldots+n_k=n} \binom{n}{n_1,\ldots,n_k} x_1^{n_1}\cdots x_k^{n_k},$$
où la somme porte sur les $n_i \geq 0$ tels que $n_1 + \ldots + n_k = n$

4 Formule d'inclusion-exclusion et applications

Proposition
Soit E un ensemble et $A_i \subset E$ des parties de E pour $i = 1,\ldots,m$. Alors
$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| &= |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m| - \sum_{i<j}|A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k}|A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &+ \ldots + (-1)^{p-1}\sum_{i_1<\ldots<i_p}|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_p}| \\ &+ \ldots + (-1)^{m-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|.\end{aligned}$$

Remarque Pour $m = 2$, on retrouve la formule $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

Proposition
Soient A et B deux ensembles de cardinal $|A| = m$ et $|B| = n$. Le nombre de surjections de A dans B est :
$$S_n^m = \begin{cases} 0 & si\ m < n \\ n! & si\ m = n \\ \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}(n-p)^m & si\ m > n\end{cases}$$

Preuve Les cas $m < n$ et $m = n$ sont faciles. Le seul cas demandant une preuve est celui où $m > n$. L'idee est de calculer le nombre d'applications de A dans B et d'enlever celles qui ne sont pas surjectives. Soit
$$A_i = \{f : A \to B \mid b_i \notin f(A)\}, \quad \text{pour} \quad i = 1,\ldots,n$$
On a
$$N = \{f : A \to B \mid f \text{ non surjective }\} = A_1 \cup \ldots \cup A_n.$$
En appliquant le principe d'inclusion-exclusion on obtient
$$|N| = \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}(n-p)^m\binom{n}{p}$$
et donc
$$n^m - |N| = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p(n-p)^m\binom{n}{p}$$

5 Permutations

Soit σ une permutation de l'ensemble $N = \{\ ,\dots,n\}$ On peut noter la permutation en forme vectorielle, en notation cyclique et en notation graphique On donne un exemple où on represente la meme permutation avec les trois notations di erentes

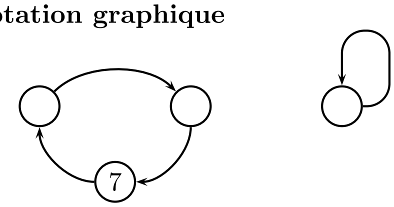
Notation vectorielle On ecrit les entiers $\ ,\dots,n$ et en dessous leurs images respectives

$$\begin{pmatrix} & & 5 & 7 & & [illegible] \\ & 7 & & & 5 & [illegible] \end{pmatrix}$$

On peut oublier la première ligne et ecrire

$$7 \quad 5 \ [illegible]$$

Notation graphique



Remarque L'ensemble des permutations de $\{ \ ,\ldots,n\}$ munie du produit des permutations forme un groupe le produit est associatif, admet une element neutre et chaque permutation a un inverse Ce groupe est note S_n et on l'appelle le groupe symetrique

5.2 Transpositions et involutions

Définition
Une transposition est une permutation qui echange deux elements et laisse les autres s Autrement dit c'est une permutation qui a un cycle de longueur et tous les autres de longueur

Propriété
Le nombre de transpositions d'une permutation $\{ \ ,\ldots,n\}$ *est* $\binom{n}{2}$.

Définition
- Une involution est une permutation telle que $\sigma^2 = \mathbf{Id}$, c'est-à-dire une permutation qui ne contient que des cycles de longueur ou de longueur
- Une involution sans point est une involution ne contenant que des cycles de longueur

Propriété
- *Le nombre* I_{2n} *d'involution sans point fixe est* $\frac{(2n)!}{2^n n!}$.
  Par exemple par double comptage des permutations de $\{ \ ,\ldots,\ n\}$, on veri $I_{2n} \cdot \ ^n \cdot n! =$ $n \ !$
- *Le nombre de permutations avec un cycle de longueur* k *et les autres de longueur 1 est* $\binom{n}{k}\ k - \ !$.
  On obtient une telle permutation en choisissant les k elements du cycle facteur $\binom{n}{k}$, puis en fabriquant le cycle facteur $k - \ !$

5.3 Inversions et tableaux d'inversions

Définition
Une permutation σ a une inversion en i, j si le couple i, j est tel que $i < j$ et $\sigma\ i\ > \sigma\ j$ On dit aussi que $\sigma\ i\ , \sigma\ j$ est une inversion de σ

Exemple La permutation a des inversions aux places , , , , , et ,

Définition
Le tableau d'inversions d'une permutation σ est le nombre d'inversions commencant à la place i, pour $i = \ ,\ldots,n$

Exemple Le tableau d'inversions de la permutation 5 7 est 5, , , , , ,

Propriété *Il y a une bijection entre les tableaux d'inversions et l'ensemble des permutations.*
En e et à partir d'un tableau d'inversion on peut reconstruire la permutation en lisant le tableau de gauche à droite l'entree courante du tableau indique parmi les elements encore non places combien sont plus petits que l'element recherche Ainsi dans l'exemple du tableau 5, , , , , , , le 5 en première position indique que σ est plus grand que 5 elements parmi $\{ \ ,\ ,\ ,\ ,5,\ ,7\}$, c'est-à-dire que $\sigma \quad =$ Puis le indique que σ est plus grand que elements parmi $\{ \ ,\ ,\ ,\ ,5,7\}$, c'est-à-dire que $\sigma \quad =$, etc

6 Génération exhaustive

Souvent le nombre d'objets combinatoires croit très vite en fonction de la taille des objets S'il est facile de faire la liste des objets de toute petite taille, il devient très vite dicile de ne pas en oublier quand la taille grandit Un algorithme de generation est un procede systematique pour engendrer tous les objets combinatoires d'une famille

6.1 Génération de l'ensemble $\mathcal{P}(N)$ des sous-ensembles d'un ensemble $N = \{1, \ldots, n\}$.

1er algorithme (récursif)

- Si $n =$ alors $N = \emptyset$ et le seul sous-ensemble est l'ensemble vide renvoyer $\{\emptyset\}$
- Sinon
  - Engendrer recursivement l'ensemble P des parties de $\{ \ , \ldots, n - \ \}$
  - Faire une copie de cet ensemble et dans chaque element de cette copie, ajouter la valeur n

$$Q = \{E \cup \{n\} \quad E \in P\}.$$

  - Renvoyer l'ensemble des ensembles engendres $P \cup Q$

Exemple Si $n =$ on a $\{\emptyset, \{ \ \}, \{ \ \}, \{ \ , \ \}, \{ \ \}, \{ \ , \ \}, \{ \ , \ \}, \{ \ , \ , \ \}\}$

Preuve Le er algorithme est bien exhaustif car pour former toutes les parties de $\{ \ , \ldots, n\}$ à partir de l'ensemble des parties de $\{ \ , \ldots, n - \ \}$, $\mathcal{P} \ \{ \ , \ldots, n - \ \}$, il suffit de prendre l'ensemble $\mathcal{P} \ \{ \ , \ldots, n - \ \}$, ainsi que toutes les parties de $\mathcal{P} \ \{ \ , \ldots, n - \ \}$ auxquelles on a ajoute l'element n

Representons chaque sous-ensemble A de $\{ \ , \ldots, n\}$ comme un nombre binaire à n chi res $x_n \ldots x_1$ avec $x_i =$ si $i \in A$, $x_i =$ sinon On peut alors engendrer toutes les parties de $\mathcal{P} \ N$ en engendrant tous les elements de $\underbrace{\ \ldots \ }_{n}$ à $\underbrace{\ \ldots \ }_{n}$

- On part de $e = \underbrace{\ \ldots \ }_{n}$
- – **Arrêt** $e = \underbrace{\ \ldots \ }_{n}$
  - **Suivant** Faire l'addition binaire de e et

Exemple Pour $n =$, en representation binaire, on obtient

$$, \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad ,$$

En termes de parties de $\mathcal{P} \ N$, l'algorithme donne

- On part avec l'ensemble $A = \emptyset$ et $\mathcal{P} = A$
- On cherche le plus petit nombre j de N qui n'est pas dans A
  - **Arrêt** S'il n'existe pas, c'est à dire si $A = \{ \ , \ldots, n\}$, on est à la n de l'algorithme
  - **Suivant** S'il existe on enlève de A tous les nombres plus petits que j et on insère j L'ensemble ainsi obtenu est le nouveau A et $\mathcal{P} = \mathcal{P} \cup A$ On continue

Cet algorithme est alors equivalent à l'algorithme suivant

2ème algorithme

- On part avec l'ensemble $A = \emptyset$
- On cherche le plus grand nombre j de N qui n'est pas dans A
  - **Arrêt** S'il n'existe pas, c'est à dire si $A = \{ \ , \ldots, n\}$, on est à la n de l'algorithme
  - **Suivant** S'il existe on enlève de A tous les nombres plus grands que j et on insère j L'ensemble ainsi obtenu est le nouveau A et $\mathcal{P} = \mathcal{P} \cup A$ On continue

Exemple Pour $n =$ les elements sont generes dans l'ordre suivant

$$\emptyset, \{ \ \}, \{ \ \}, \{ \ , \ \}, \{ \ \}, \{ \ , \ \}, \{ \ , \ \}, \{ \ , \ , \ \}$$

6.2 Génération des sous-ensembles de N à k éléments.

Algorithme

- On part avec le sous-ensemble $Y = \{ \ , \ldots, k\}$
- On suppose Y de la forme $Y = \{y_1, \ldots, y_k\}$ avec $y_1 < \ldots < y_k$ On cherche le plus grand entier i tel que $y_i \quad \notin Y$

- **Arrêt.** Si $i = k$ et $y_k = n$, c'est-à-dire si $Y = \{n - k ,\ldots, n\}$, on s'arrete
- **Suivant.** Sinon on augmente y_i de et, à partir de la position i , on remplace $y_i \; _1, \ldots, y_k$ par $y_i \;, y_i \;, \ldots, y_i \; k \; - i$

Preuve Avec cet algorithme on engendre tous les elements en ordre lexicographique Donc on les engendre tous et une seule fois

Exemple Pour $n = 5$ and $k =$ on engendre dans l'ordre
{ , , }, { , , }, { , ,5}, { , , }, { , ,5}, { , ,5}, { , , }, { , ,5}, { , ,5}, { , ,5}

6.3 Génération des permutations de l'ensemble {1, . . ., n}

- La permutation de depart est $\ldots n$
- On cherche le plus grand j tel que $x_j < x_j \; _1$
  - **Arrêt.** Si un tel j n'existe pas, alors la permutation est $n \; n -$ $\ldots$, on est sur la dernière permutation et on s'arrete
  - **Suivant.** Sinon on echange x_j avec le dernier x_k tel que $x_k > x_j$ avec $k > j$, puis on retourne la sequence des valeurs $x_j \; _1, \ldots, x_n$ On continue à partir de cette nouvelle permutation

Preuve On sait qu'il y a une bijection entre l'ensemble des tableaux d'inversions section 5 et l'ensemble des permutations Si on regarde ce que fait l'algorithme sur les tableaux d'inversions, on observe qu'il fait passer d'un tableau $\ldots m, \; n - j -$ $, \ldots ,$ à un tableau $\ldots m$ $, \ldots ,$ à partir d'un tableau on passe au tableau suivant selon l'ordre lexicographique Donc tous les tableaux sont engendres une et une seule fois et les permutations aussi

Exemple Pour $n =$ on engendre dans l'ordre

, , , , ,

ce qui correspond à engendrer les tableaux d'inversions dans l'ordre lexicographique

, , , , ,

7 Arbres et chemins de Dyck

Définition 1 – **arbres planaires** *Un arbre planaire est constitué par un noeud, appelé racine, auquel sont attachés par des arêtes un ensemble ordonné (éventuellement vide) de sous-arbres A_1,A_2, . . ., A_k. Un arbre planaire peut être donc répresenté comme une liste $r, A_1, A_2, \ldots, A_k$ où chaque A_i, pour $i =$ $, \ldots, k$ est aussi un arbre planaire. Les racines des sous-arbres A_1,A_2, . . ., A_k sont dites fils de r, r est leur père et k est dit l'arité de r. Les noeuds qui n'ont pas de fils sont dits feuilles.*

– **arbres binaires complets** *Un arbre binaire complet est un arbre planaire ayant des noeuds d'arité ou . Un arbre binaire complet avec n noeuds internes a n feuilles.*

Ils existent des bijections très connues entre les deux types d'arbres et une classe de chemins dans le plan, appelés chemins de Dyck

3arai7385:af 7.4699

Définition 2 *Soit Z le plan cartésien ...*

.J

FIG. – Un arbre plan avec $n =$ 8 nœuds et le mot de Dyck associe

FIG. – Un arbre binaire avec $n =$ nœuds internes et le mot de Dyck associe

7.1 Une bijection entre les arbres planaires et les chemins de Dyck

Définition 3 *Soit $\mathcal{A}$ un arbre planaire à n sommets. On définit alors la suite $\pi(\mathcal{A})$ formée des sommets de A dans l'*ordre prefixe *de la manière récursive suivante :*

- *si $\mathcal{A} = r$ est réduit à sa racine, $\pi(\mathcal{A}) = (r)$;*
- *si $\mathcal{A} = (r, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_p)$ où r est la racine de $\mathcal{A}$ et où $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_p$ sont les arbres planaires qui sont les fils de r, on a :*

$$\pi(A) = (r, \pi(A_1), \ldots, \pi(A_p)) .$$

Dans l'ordre prefixe on rencontre donc d'abord la racine puis les sous-arbres, de gauche à droite

Le parcours $P(A)$ de l'arbre A dans l'ordre prefixe est la suite de $(n-1)$ aretes qu'on rencontre en parcourant les sommets dans l'ordre prefixe Le mot de Dyck $D(A) = a_1 \ldots a_{2n-2}$ associe à A est alors defini en posant

$$a_i = \begin{cases} \nearrow & \text{si à la } i\text{ème etape de } P(A)\text{, on visite une arete pour la première fois} \\ \searrow & \text{si à la } i\text{ème etape de } P(A) \text{ on visite une arete pour la deuxième fois} \end{cases}$$

Reciproquement, on reconstruit l'arbre à partir d'un chemin de Dyck de la facon suivante on lit le chemin de gauche à droite, et pour chaque pas, s'il est montant on rajoute une nouvelle arete sur le noeud où on se trouve le plus à droite possible, sinon on remonte d'une arete dans l'arbre

Cette construction est une bijection entre les arbres planaires avec n nœuds et les mots de Dyck de longueur $(n-1)$

Remarque On aurait pu aussi definir notre bijection recursivement de la facon suivante

- si $A = r$ alors $D(A)$ est reduit au mot vide
- si $A = (r, A_1, \ldots, A_p)$ on a

$$D(A) = \nearrow D(A_1) \searrow \ldots \nearrow D(A_p) \searrow .$$

7.2 Une bijection entre les arbres binaires complets et les chemins de Dyck

On donne une autre bijection avec les chemins de Dyck, cette fois pour les arbres binaires complets le mot de Dyck associe à un arbre binaire complet est obtenu en faisant un parcours prefixe de l'arbre et en ecrivant un pas $\nearrow$ lorsqu'on rencontre un nœud interne et un pas $\searrow$ lorsqu'on rencontre une feuille on ignore le dernier nœud, qui est forcement une feuille

Cette construction est une bijection entre les arbres binaires complets avec n nœuds internes et $n+1$ feuilles et les mots de Dyck de longueur n

Remarque On aurait pu aussi definir notre bijection recursivement de la facon suivante
– si $A = r$ alors $D(A)$ est un pas $\searrow$
– si $A = (r, A_1, A_2)$ on a

$$D(A) = \nearrow D(A_1) \; D(A_2) \; .$$

À la fin on supprime le dernier pas (forcement descendant) de $D(A)$

7.3 Le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$

Théoreme 1 *Le nombre D_n des chemins de Dyck de longueur n est $\frac{1}{n\ 1}\binom{2n}{n}$*

Preuve
On montre que $(n+1) \; D_n = \binom{2n}{n}$
– D'un cote, on considère l'ensemble E des chemins de Dyck auxquels on rajoute un dernier pas $\searrow$ et dont on colorie un des pas $\searrow$ Ces chemins sont comptes par $(n+1) \; D_n$ car il y a $(n+1)$ facons de colorier un pas $\searrow$
– D'un autre cote on considère l'ensemble F de tous les chemins de longueur n ayant exactement n pas $\nearrow$ et donc n pas $\searrow$ Ces chemins sont comptes par $\binom{2n}{n}$
On donne maintenant une bijection entre ces deux ensembles de chemins, ce qui prouve la formule
Etant donne un chemin de F, de longueur n ayant n pas $\nearrow$, on rajoute un pas $\searrow$ à la fin du chemin et on colorie ce pas Le chemin ainsi obtenu termine au niveau $-$ On considère le point P le plus à gauche parmi les points les plus bas de ce nouveau chemin On divise alors le chemin en deux sous-chemins le chemin A qui part de l'origine et qui termine au point P et le chemin B qui commence avec P On remarque que le chemin A doit forcement terminer avec un pas $\searrow$, sinon P ne serait pas un des points plus bas du chemin On construit maintenant un nouveau chemin, obtenu en prenant B (y compris le dernier pas colorie) et en lui accrochant le chemin A après le pas colorie Le chemin ainsi obtenu est un chemin qui ne descend jamais en dessous de l'axe x sauf au dernier pas (à cause du choix de P) et qui a un pas descendant colorie Ce chemin de E est l'image du chemin de depart par notre bijection
Reciproquement, etant donne un chemin appartenant à E, on le coupe en deux après le pas colorie et on echange les deux chemins ainsi obtenus On obtient ainsi un chemin avec n pas $\nearrow$ et $(n+1)$ pas $\searrow$, terminant par le pas descendant colorie En supprimant ce pas colorie on obtient l'image du chemin de E par la bijection inverse, qui est bien un chemin de F