Cours de Combinatoire

29 décembre 2013

1 Rappels sur les ensembles

Définitions

So A B ns m s n no par

— $|A|$ son car na, $c\ a\ d$ nom r ’ ´ ´m n s A;

— $A \cup B$ ’ n on A B, $A \cup B = \{x \quad x \in A$ o $x \in B\}$;

— $A \cap B$ ’ n r s c on A B, $A \cap B = \{x \quad x \in A \quad x \in B\}$;

— $A \subset B$ s po r o x, s $x \in A$ a ors $x \in B$;

— $A \backslash B$ a ´r n c A B, $A \backslash B = \{x \quad x \in A \quad x \notin B\}$

— $A \times B$ ’ ns m s c o p s or onn´ s x, y q $x \in A$ $y \in B$

$$A \times B = \{\ x, y \quad x \in A \quad y \in B\}$$

Proprietés

— $|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$

— $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

— $|A^n| = |A|^n$ po r $n \in \mathbb{N}$

2 Applications, fonction caractéristique, arrangements

Définitions

— So A B ns m s n app c a on ϕ A ans B, no ´ par ϕ $A \to B$, asso c a c aq ´ ´m n $a \in A$ n n q ´ ´m n B, no ´ ϕ a For m m n on p o r n app c a on c omm n so s- ns m $A \times B$ q po r o $x \in A$ s n n q $y \in B$ q $x, y \in$

— So $A \subset B$, on ´fin sa on c on c ara c ´r s q f_A $B \to \{0, 1\}$ par

$$f_A\ a = \begin{cases} 0 & s\ a \notin A \\ 1 & s\ a \in A \end{cases}$$

Propriétés

— *L’ensemble des applications de A dans B a cardinalité $|B|^{|A|}$*

o r c aq ´ ´m n A on a $|B|$ poss ´s c o s r son ma

— *L’ensemble des fonctions caractéristiques sur l’ensemble B a cardinalité ^{n} ou $n = |B|$*

o r c aq ´ ´m n B on a poss ´s c o s r son ma

a n c on r c n r ’ ns m $P\ B$ s par s B ’ ns m s on c ons c ara c ´r s q s s r B, on c $|P\ B| = {}^n$, o $n = |B|$

Définitions

— n n c on ϕ $A \to B$ s n app c a on q ’ a c aq ´ ´m n B c orr spon a p s n ´ ´m n A A r m n n a pas ´ ´m n s q on a m m ma

— n arran m n n ´ ´m n s par m m, s n s or onn´ n ´ ´m n s s n c s ’ n s m a m ´ ´m n s

Propriétés

- *L'ensemble des injections de A dans B a cardinalité $m(m-1)\dots(m-n+1)$ ou $|A| = n$ et $|B| = m$*

  n a m po ´ c o r ' ma pr ma r ´ ´ma n A, $m-1$ po ´ c o r ' ma ma , c
- *Le nombre A_m^n d'arrangements de n éléments parmi m est $m(m-1)\dots(m-n+1)$*

Définition

- n r c on $\phi : A \to B$ n app ca on q ' a c aq ´ ´ma n B corr pon a mo n ´ ´ma n A A r ma n ' n ma ma ´ ´ma n A par ϕ B
- n c on $\phi : A \to B$ n app ca on
  - n c a c $|A| = |B|$
  - o ncor n c r c

Définition

- n p rma a on ' n n ma E a n ´ ´ma n c on E an -ma ma

Propriété

- *Le nombre de permutations est égal à $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$*

  ' n ma p rma a on ´ a a ' n ma n c on E an E

3 Double comptage et combinaisons

Principe du double comptage : S on comp ´ ´ma n ' n ma ma n ma man r ´r n on ro ma r´ a

Exercice : A n mara , noma r n q rr n a ma n a q q ' n n noma r pa r o pa r

Solution : So x_i noma r o q a p r onn i rr a ma n a q q ' n y noma r o a po n´ ma n ar n on $\sum_i x_i = y$ S ppo on q noma r n q rr n a ma n n noma r pa r o pa r A or a ommo x_i corr pon an pa r Comma x_i r an on pa r a omma o a r pa r n p r ´ a a y a on n con ra c on a ppo on pr´c´ n a noma r n q rr n a ma n n noma r pa r o pa r

Définition

- n com na on k ´ ´ma n par ma n n o n ma car na k ' n n ma car na n n no C_n^k o $\binom{n}{k}$ noma r com na on k ´ ´ma n par ma n

ar con n on $\binom{n}{k} = 0$ $n < 0$, $k < 0$ o $k > n$

Propriétés

- *Valeur du coefficient binomial :* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

  ar o comp a arran ma n k $C_n^k = A_n^k$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

3.1 La formule du binôme

Soit A un anneau et $a, b \in A$ tel que $ab = ba$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

n a mon r r com na o r ma n par n c on

Preuve combinatoire Dans ´ oppmn pro $(a+b)^n$ on a $\binom{n}{k}$ açons a r q r rm $a^{n-k}b^k$ n parm s n ac rs $(a+b)$, a c o s r k o s b po r o n r $a^{n-k}b^k$

Preuve par induction

— Cas as $(a+b)^0 = C_0^0$

— n c on n s ppos q $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$, on mon r r q $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}b^k$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\cdot(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k \\
&= a_{n+1} + b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)a^{n+1-k}b^k = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k.
\end{aligned}$$

n a s´ a r a on r an ascal

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Exercices

— *Calculer* $S = \sum_{q=0}^{p} (-1)^q \binom{n}{q}\binom{n-q}{p-q}$ *pour* $0 \le p \le n$

n r marq $\binom{n}{q}\binom{n-q}{p-q} = \binom{n}{p}\binom{p}{q}$ D sor q $S = \binom{n}{p}\sum_{q=0}^{p}(-1)^q\binom{p}{q} = \binom{n}{q}(1-1)^p = 0$

— *Calculer* $S = \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{p}\binom{p}{k}(-1)^{n-p}t^{n-p+k}(1-3t)^{p-k}$

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}t^{n-p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}t^k(1-3t)^{p-k} \\
&= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(-t)^{n-p}(1-t)^p = (1-3t)^n.
\end{aligned}$$

3.2 Coefficients multinomiaux

Définition

E an onn´s $n_1+\ldots+n_k = n$ s n rs pos s co c n m noma $\binom{n}{n_1,\ldots,n_k}$ s n par

$$\binom{n}{n_1,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}.$$

marq ons q s $n_1+n_2 = n$ a ors $\binom{n}{n_1,n_2} = \binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_2}$, on r ro s co c n s noma

Propriété

— *Le coe cient multinomial* $\binom{n}{n_1,\ldots,n_k}$ *est le nombre de façons de partitionner l'ensemble* $\{1,\ldots,n\}$ *en* k *parties* $A_1,\ldots A_k$ *disjointes telles que* $|A_i| = n_i$ *pour tout* $i = 1,\ldots,k$
 y a $\binom{n}{n_1}$ a on c o r n_1 n A₁ p $\binom{n-n_1}{n_2}$ a on c o r n_2 n A₂ par $n-n_1$ n r r an p $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ c na n

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}{n_k} = \frac{n}{n_1\, n_2\, \ldots n_k}.$$

— *Le nombre de mots de longueurs* n *sur l'alphabet* $\{1,\ldots,k\}$ *contenant* n_i *lettres* i *pour tout* $i = 1,\ldots k$ *est* $\binom{n}{n_1,\ldots,n_k}$

Formule multinomiale
a or nom n a a on an

$$x_1 + \ldots + x_k \;{}^{n} = \sum_{n_1+\ldots+n_k=n} \binom{n}{n_1,\ldots,n_k} x_1^{n_1}\cdots x_k^{n_k},$$

o a so por r $n_i \geq 0$ q $n_1 + \ldots + n_k = n$

4 Formule d'inclusion-exclusion et applications

Proposition
Soit E *un ensemble et* $A_i \subset E$ *des parties de* E *pour* $i = 1,\ldots,m$ *Alors*

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| &= |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &\quad + \ldots + \; -1 \;{}^{p-1} \sum_{i_1<\ldots<i_p} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_p}| \\ &\quad + \ldots + \; -1 \;{}^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|.\end{aligned}$$

Remarque o r $m =$, on r ro a or $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

Proposition
Soient A *et* B *deux ensembles de cardinal* $|A| = m$ *et* $|B| = n$ *Le nombre de surjections de* A *dans* B *est*

$$S_n^m = \begin{cases} 0 & si\ m < n \\ n & si\ m = n \\ \sum_{p=0}^{n} \; -1 \;{}^{p} \binom{n}{p} \; n-p \;{}^{m} & si\ m > n \end{cases}$$

Preuve ca $m < n$ $m = n$ on a ca man an n pr o $m > n$ ca r nom r app ca on A an B n r q n on pa r So

$$A_i = \{f \quad A \to B \mid b_i \notin f \;\, A \;\}, \quad \text{po r} \quad i = 1,\ldots,n$$

n a

$$N = \{f \quad A \to B \mid f \text{ non } \; r \; c \; \} = A_1 \cup \ldots \cup A_n.$$

En app q an pr n p n on- c on on o n

$$|N| = \sum_{p=1}^{n} \; -1 \;{}^{p-1} \; n-p \;{}^{m} \binom{n}{p}$$

on

$$n^m - |N| = \sum_{p=0}^{n} \; -1 \;{}^{p} \; n-p \;{}^{m} \binom{n}{p}$$

5 Permutations

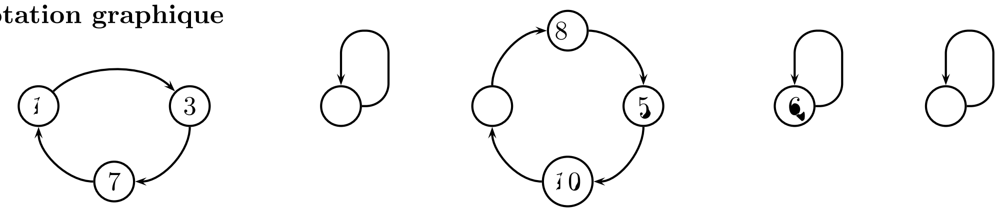
So σ n p rm a on ' n m $N = \{1, \ldots, n\}$ n p no r a p rm a on n orm c or , n no a on c c q n no a on rap q n onn n mp o on r pr' n a m m p rm a on a c ro no a on ' r n

Notation vectorielle n 'cr n r $1, \ldots, n$ n o r ma r p c

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 10 \\ 3 & 7 & 8 & 10 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

n p o r a pr m r n 'cr r
3 78 10 6 1 5

Notation graphique



Notation cyclique n 'cr c c a p rm a on n r par n
1 3 7 8 5 10 6

Exercice

— *Combien de représentations cycliques admet la permutation* 3 78 10 6 1 5
a c o r 'or r an q on 'cr c c po r c aq c c q ' 'm n on 'cr n pr m r C p rm a on a on c 5 · 3 · r pr' n a on c c q ' r n

5.1 Le groupe symétrique

Définition

— pro p rm a on σ ρ a p rm a on $\sigma \cdot \rho$ q po r o i $\sigma \cdot \rho$ i $= \sigma$ ρ i

Exemple So

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \\ & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \\ 3 & 1 & \end{pmatrix}$$

a or

$$\sigma \cdot \rho = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \\ 1 & & 3 \end{pmatrix}$$

Définition

n app n ' a p rm a on

$$\mathbf{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Propriétés

— *On a* $\sigma \cdot \mathbf{Id} = \mathbf{Id} \cdot \sigma = \sigma$
— *Toute permutation* σ *a une permutation inverse* σ^{-1} *telle que* $\sigma \cdot \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \cdot \sigma = \mathbf{Id}$ a p rm a on σ^{-1} o n n an c onn σ a n a

Exemple a p rm a on n r

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \\ & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \\ 3 & & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque [illegible] $\{1,\dots,n\}$ [illegible] S_n [illegible]

5.2 Transpositions et involutions

Définition
[illegible]

Propriété
Le nombre de transpositions d'une permutation $\{1,\dots,n\}$ est $\binom{n}{2}$

Définition

- [illegible] $\sigma^2 = \mathbf{Id}$ [illegible]
- [illegible]

Propriété

- *Le nombre I_{2n} d'involution sans point fixe est $\frac{(2n)!}{2^n n!}$*
  [illegible] $\{1,\dots,2n\}$, [illegible] $I_{2n}\cdot 2^n\cdot n! = (2n)!$
- *Le nombre de permutations avec un cycle de longueur k et les autres de longueur 1 est $\binom{n}{k}(k-1)!$*
  [illegible] k [illegible] $\binom{n}{k}$, [illegible] $(k-1)!$

5.3 Inversions et tableaux d'inversions

Définition
[illegible] σ [illegible] (i,j) [illegible] (i,j) [illegible] $i<j$ [illegible] $\sigma(i)>\sigma(j)$ [illegible] $(\sigma(i),\sigma(j))$ [illegible] σ

Exemple [illegible]

Définition
[illegible] σ [illegible] i, [illegible] $i=1,\dots,n$

Exemple [illegible] $5,2,1,0,1,0,0$

Propriété *Il y a une bijection entre les tableaux d'inversions et l'ensemble des permutations*
En [illegible] $5,2,1,0,1,0,0$ [illegible] $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ [illegible] $\sigma(1)=6$ [illegible] $\{1,2,3,4,5,7\}$ [illegible] $=3$ [illegible]

6 Génération exhaustive

[illegible]

6.1 Génération de l'ensemble $\mathcal{P}(N)$ des sous-ensembles d'un ensemble $N = \{1, \ldots, n\}$.

1er algorithme (récursif)

- S $n = 0$ a ors $N = \emptyset$ s so s- ns m s ' ns m r n o r $\{\emptyset\}$
- S non
  - En n r r r´ rs m n ' ns m P s par s $\{1, \ldots, n-1\}$;
  - Fa r n op ns m ans aq ´ ´m n op , a o r a r n

$$Q = \{E \cup \{n\} \quad E \in P\}.$$

  - n o r ' ns m s ns m s n n r´s $P \cup Q$

Exemple S $n = 3$ on a $\{\emptyset, \{1\}, \{\ \}, \{1,\ \}, \{3\}, \{1,3\}, \{\ ,3\}, \{1,\ ,3\}\}$

Preuve 1 r a or m s n a s ar po r or m r o s s par s $\{1, \ldots, n\}$ a par r ' ns m s par s $\{1, \ldots, n-1\}$, $\mathcal{P}\ \{1, \ldots, n-1\}$, s pr n r ' ns m $\mathcal{P}\ \{1, \ldots, n-1\}$, a ns q o s s par s $\mathcal{P}\ \{1, \ldots, n-1\}$ a q s on a a o ´ ' ´ ´m n n

pr´s n ons aq so s- ns m A $\{1, \ldots, n\}$ omm n nom r na r a n r s $x_n \ldots x_1$ a $x_i = 1$ s $i \in A$, $x_i = 0$ s non n p a ors n n r r o s s par s $\mathcal{P}\ N$ n n n ran o s s ´ ´m n s $\underbrace{00\ldots0}_{n}$ a $\underbrace{11\ldots1}_{n}$

- n par $e = \underbrace{00\ldots0}_{n}$
- — **Arrêt** $e = \underbrace{11\ldots1}_{n}$
  - **Suivant** Fa r ' a on na r e 1

Exemple o r $n = 3$, n r pr´s n a on na r , on o n

$$000,\ 001,\ 010,\ 011,\ 100,\ 101,\ 110,\ 111$$

En r m s par s $\mathcal{P}\ N$, ' a or m onn

- n par a ' ns m $A = \emptyset$ $\mathcal{P} = A$
- n r p s p nom r j N q n s pas ans A
  - **Arrêt** S n s pas s a r s $A = \{1, \ldots, n\}$, on s a a n ' a or m
  - **Suivant** S s on n A o s s nom r s p s p s q j on ns r j ' ns m a ns o n s no a A $\mathcal{P} = \mathcal{P} \cup A$ n on n

C a or m s a ors ´q a n a ' a or m s an

2ème algorithme

- n par a ' ns m $A = \emptyset$
- n r p s ran nom r j N q n s pas ans A
  - **Arrêt** S n s pas s a r s $A = \{1, \ldots, n\}$, on s a a n ' a or m
  - **Suivant** S s on n A o s s nom r s p s ran s q j on ns r j ' ns m a ns o n s no a A $\mathcal{P} = \mathcal{P} \cup A$ n on n

Exemple o r $n = 3$ s ´ ´m n s son ´n´r´s ans ' or r s an

$$\emptyset, \{3\}, \{\ \}, \{\ ,3\}, \{1\}, \{1,3\}, \{1,\ \}, \{1,\ ,3\}$$

6.2 Génération des sous-ensembles de N à k éléments.

Algorithme

- n par a so s- ns m $Y = \{1, \ldots, k\}$
- n s ppos Y a or m $Y = \{y_1, \ldots, y_k\}$ a $y_1 < \ldots < y_k$ n r p s ran n r i q $y_i + 1 \notin Y$

— **Arrêt.** S $i = k$ $y_k = n$, c -a- r $Y = \{n-k+1, \ldots, n\}$, on arr ;

— **Suivant.** S non on a n y_i 1 , a par r a po on $i+1$, on r p ac $y_{i+1}, \ldots, y_k$ par y_i+ , $y_i+3, \ldots, y_i+$ $k+1-i$

Preuve A c c a or on n n r o ´ n n or r co rap q Donc on n n r o n o

Exemple o r $n = 5$ an $k = 3$ on n n r an ' or r
$\{1, \ ,3\}$, $\{1, \ , \ \}$, $\{1, \ ,5\}$, $\{1,3, \ \}$, $\{1,3,5\}$, $\{1, \ ,5\}$, $\{ \ ,3, \ \}$, $\{ \ ,3,5\}$, $\{ \ , \ ,5\}$, $\{3, \ ,5\}$

6.3 Génération des permutations de l'ensemble {1, . . ., n}

— a p r a on ´par 1 ... n

— n c rc p ran j q $x_j < x_{j+1}$

— **Arrêt.** S n j n pa a or a p r a on $n \ n-1 \ \ldots \ 1$, on r a rn r p r a on on arr

— **Suivant.** S non on ´c an x_j a c rn r x_k q $x_k > x_j$ a c $k > j$, p on r o rn a ´q nc r $x_{j+1}, \ldots, x_n$ n con n a par r c no p r a on

Preuve n a q' a n c on n r ' n a a ' n r on c on ?? ' n p r a on S on r ar c q a 'a or r a a ' n r on on o r q' a pa r ' n a a $\ldots m$, $n-j-1$, . . . , 1, 0 a n a a $\ldots m+1, 0, \ldots 0, 0$ a par r ' n a a on pa a a a an on ' or r co rap q Donc o a a on n n r´ n n o p r a on a

Exemple o r $n = 3$ on n n r an ' or r

1 3, 13 , 13, 31, 31 , 3 1,

c q corr pon a n n r r a a ' n r on an ' or r co rap q

000, 010, 100, 110, 00, 10

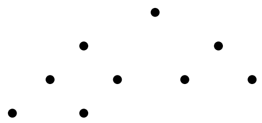
7 Arbres et chemins de Dyck

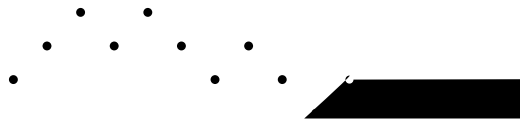
Définition 1 **arbres planaires** *Un arbre planaire est constitué par un noeud appelé racine auquel sont attachés par des aretes un ensemble ordonné éventuellement vide) de sous-arbres A_1 A_2 A_k Un arbre planaire peut etre donc représenté comme une liste $r, A_1, A_2, \ldots, A_k$ ou chaque A_i pour $i = 1, \ldots, k$ est aussi un arbre planaire Les racines des sous-arbres A_1 A_2 A_k sont dites ls de r r est leur pere et k est dit l'arité de r Les noeuds qui n'ont pas de ls sont dits feuilles*

arbres binaires complets *Un arbre binaire complet est un arbre planaire ayant des noeuds d'arité 0 ou Un arbre binaire complet avec n noeuds internes a $n+1$ feuilles*

n c on r conn n r c p ' ar r n c a c n an p an app ´ c n D c

Définition 2 *Soit $\mathbb{Z}^2$ le plan cartesien discret Un chemin de Dyck est un chemin faisant des pas $\nearrow$ et $\searrow$ qui part de l'origine ne descends jamais en dessous de l'axe x et qui termine sur l'axe x Le nombre de pas du chemin de Dyck est la* on r *du chemin*





Remarque n a ra p a ﬁn r no r on r´ r n a on an

— A r a or D A n pa ↘;

— A r, A_1, A_2 on a

$$D\ A\ \nearrow\ D\ A_1\ \ D\ A_2\ .$$

A a ﬁn on ppr rn r pa or´ n n an D A

7.3 Le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$

Théoreme 1 *Le nombre D_n des chemins de Dyck de longueur n est* $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

Preuve

n on r q n D_n $\binom{2n}{n}$

— D n o ´ on on r ’ n E n D a q on ra o n rn r pa ↘ on on o or n pa ↘ C n on omp ´ par n D_n ar a n a on o or r n pa ↘

— D n a r o ´ on on r ’ n F o n on r n a an a- n n pa ↗ on n pa ↘ C n on omp ´ par $\binom{2n}{n}$

n onn a n nan n on r pa