Partiel du cours de Combinatoire et Probabilités

Mercredi 21 novembre 2007

Durée : 2 heures

Avertissement

Aucun document n'est autorisé. L'usage des calculatrices et des téléphones portables est interdit. Rédigez chaque exercice sur des copies séparées portant votre nom, prénom et numéro d'étudiant cachetés.

Exercice 1

Etant donné un ensemble E, on appelle partition de E, un ensemble $(P_i), i \in I$ de parties de E, non vides, disjointes 2 à 2 et dont la réunion fait E. Si par exemple $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, l'ensemble $\{\{1, 2\}, \{3, 5, 6\}, \{4\}\}$ est une partition de E en 3 ensembles.

Dans cet exercice, on se propose de calculer le nombre de partitions d'un ensemble E_n à n éléments. On note M_n ce nombre et $M_{n,p}$ le nombre de partitions de E_n en p ensembles.

1) Écrire et compter les différentes partitions pour les ensembles $E_2 = \{1, 2\}$, $E_3 = \{1, 2, 3\}$, et $E_4 = \{1, 2, 3, 4\}$.
2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \sum_{k=1}^{n} M_{n,k}$.
3) Si $S_{n,k}$ est le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à k éléments, montrer que $S_{n,k} = k! M_{n,k}$.
4) À l'aide de la formule d'inclusion-exclusion, calculer $S_{n,k}$ (vu en cours).
5) En déduire comme double somme l'expression de M_n.
6) **Question facultative.** Par convention, on note $M_0 = 1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} M_{n-k}.$$

On rappelle que $C_n^k = \binom{n}{k}$ sont des notations pour les coefficients binomiaux.

Exercice 2

On considère le plan cartesien discret $\mathbb{Z}^2$ muni d'un repère orthonormé. Un chemin de Dyck de longueur n est un chemin dans le plan $\mathbb{Z}^2$ formé de pas nord-est $(1, 1)$ ou sud-est $(1, -1)$, issus de l'origine $(0, 0)$ et terminant en $(n, 0)$. Un tel chemin peut également être vu comme suite de points $M_0, \ldots, M_n$ avec $M_i = (i, y_i)$ où $y_0 = 0$, $y_n = 0$, $y_{i+1} = y_i \pm 1$, et $y_i \geqslant 0$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. La longueur d'un chemin de Dyck est le nombre de ses pas. Dans la figure 1 on a un exemple de chemin de Dyck de longueur 20.

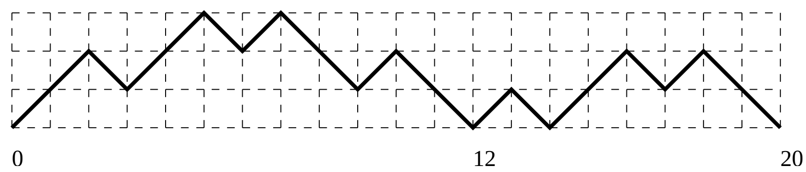

FIG. 1 – Un chemin de Dyck

On note D_n l'ensemble des chemins de Dyck de longueur n et d_n son cardinal. On pose $d_0 = 1$ par convention. On note C_n l'ensemble des chemins de Dyck de longueur n ne rencontrant l'axe x qu'au début et à la fin et c_n son cardinal. On note B_n l'ensemble des chemins de Dyck de longueur n rencontrant au moins une fois l'axe des x en un autre point que M_0 et M_n et b_n son cardinal.

1) Montrer que la longueur d'un chemin de Dyck est nécessairement paire.
2) Dessiner et compter les chemins de Dyck de longueur n, pour n= 2, 4, 6.
3) Montrer qu'un chemin de Dyck de longueur $n = 2m$ rencontre l'axe des x nécessairement dans des points $(2p, 0)$, avec p entre 0 et m.
4) Pour p entre 1 et $m-1$, on note $B_{2m,p}$ l'ensemble des chemins de Dyck touchant pour la première fois (sans compter le point M_0) l'axe des x en un point $(2p, 0)$ et $b_{2m,p}$ son cardinal. Dans l'exemple de la Figure 1 le chemin touche l'axe x pour la première fois au point $(12, 0)$. Montrer que $B_{2m} = \cup_{p=1}^{2m-1} B_{2m,p}$. Cette union est-elle disjointe ?
5) Soit $D = M_0, \dots, M_{2m}$ un chemin de Dyck qui touche l'axe x pour la première fois au point $(2p, 0)$: montrer que le chemin $M_0, \dots, M_{2p}$ est un chemin de Dyck qui ne touche l'axe x qu'en M_0 et en M_{2p} ; montrer que le chemin $M_{2p}, \dots, M_{2m}$ est un chemin de Dyck. En déduire que $b_{2m,p} = c_{2p} * d_{2(m-p)}$.
6) En translatant l'axe des x de façon convenable, montrer que $c_{2m} = d_{2(m-1)}$.
7) Déduire des points 6) et 7) que pour $m \geqslant 1$, $d_{2m} = d_{2(m-1)} + \displaystyle\sum_{p=1}^{m-1} d_{2p-2} * d_{2(m-p)}$.
8) Calculer d_n, pour $n = 2, 4, 6, 8$ à partir de la récurrence précédente.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un ensemble de cardinal n et $P(E)$ l'ensemble de ses parties.

1) Trouver le nombre de couples (X, Y) d'éléments de $P(E)^2$ tels que $X \cup Y = E$ et $X \cap Y = \emptyset$.
2) On veut trouver le nombre de couples (X, Y) d'éléments de $P(E)^2$ tels que $X \cup Y = E$.
   – Montrer par double comptage que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} = 3^n$
   – Montrer par la formule du binôme (écrire la formule) que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} = 3^n$.
   – En déduire le nombre de couples (X, Y) d'éléments de $P(E)^2$ tels que $X \cup Y = E$.
3) Trouver le nombre de triplets (X, Y, Z) d'éléments de $P(E)^3$ tels que $X \cup Y \cup Z = E$.
4) **Question facultative.** Trouver le nombre de p-uples $(X_1, \dots, X_p)$ d'éléments de $P(E)^p$ dont la réunion vaut E.