


TD1 – Algorithmes simples, ordres de grandeur

Exercice 1.*Temps d'exécution*

 Quelle est la plus petite valeur strictement positive de n pour laquelle un algorithme dont le temps d'exécution est $100n^2$ s'exécute plus vite qu'un algorithme dont le temps d'exécution est 2^n , sur la même machine ?

Exercice 2.*Ordres de grandeur*

1. Comparer, pour les relations O , o , Ω et Θ , les fonctions $f(n) = \log^k n$ et $g(n) = n$ (pour toute constante $k > 0$). De même pour $2^{n/2}$ et 2^n .
2. Si $f \in O(n^a)$ et $g \in O(n^b)$, que peut-on dire de leur produit fg ?
3. Soient f et g deux fonctions à valeurs positives. A-t-on forcément $f \in O(g)$ ou $g \in O(f)$? Qu'en est-il si les deux fonctions sont strictement croissantes ?
4. Pour tout entier $k \geq 0$, montrer que $\sum_{i=1}^n i^k \in \Theta(n^{k+1})$.

Exercice 3.

1. Évaluer la complexité du bout de programme suivant :

```
Pour i de 1 à n faire
  Pour j de 1 à i faire
    Pour k de 1 à j faire
      {instruction en coût constant}
```

2. On sait qu'un bout de programme a une complexité en $O(f(n))$ et qu'il est exécuté dans une boucle qui est itérée $g(n)$ fois. Quelle est la complexité totale de la boucle ?
3. On sait que deux bouts de programme ont une complexité en $O(f(n))$ et en $O(g(n))$ respectivement. Ils sont exécutés séquentiellement l'un après l'autre. Quelle est la complexité totale ?

Exercice 4.*Algorithmes simples*

Dans tous les cas qui suivent, on évaluera la complexité en temps de l'algorithme proposé et on prouvera sa correction.

1. Écrire une fonction `max` qui renvoie le maximum de ses deux arguments. Par exemple, `max(5, 2)` doit renvoyer la valeur 5.
2. Donner un algorithme qui dit si un tableau d'entiers est trié (par ordre croissant).
3. Écrire une fonction qui renvoie le plus petit élément d'un tableau d'entiers.
4. Écrire une fonction qui renvoie la somme des éléments d'un tableau d'entiers. De même pour le produit et la moyenne.

5. Donner un algorithme qui dit s'il existe deux éléments égaux dans un tableau d'entiers. Peut-on améliorer l'algorithme dans le cas où le tableau est trié ?
6. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n + 5$. Écrire une fonction qui, sur l'entrée n , renvoie le n -ème terme de la suite (u_n) .
7. Écrire une fonction qui, sur l'entrée n , renvoie le n -ème terme de la suite de Fibonacci définie par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
8. Donner un algorithme qui teste si un nombre est premier.