TD 2

Performances asymptotiques

On s'intéresse à des ordres de grandeur et à des termes dominants, l'idée étant que pour des entrées grandes, les effets des constantes et des termes d'ordre de grandeur inférieurs sont négligeables.

La classe $O(g) = \{f,\ \text{t.q. } \exists c, n_0 \geq 0.\ \forall n \geq n_0, 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$; g est une borne supérieure asymptotique, elle peut décrire une approximation des cas les plus défavorables.

La classe $\Omega(g) = \{f,\ \text{t.q. } \exists c, n_0 \geq 0.\ \forall n \geq n_0.\ 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)\}$; g est alors une borne inférieure asymptotique, elle peut parler du cas le plus favorable.

La classe $\Theta(g) = \{f,\ \text{t.q. } \exists c_1, c_2, n_0 \geq 0.\ \forall n \geq n_0.\ 0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)\}$; g est une borne asymptotiquement approchée de f. Parfois on écrira des expressions de la forme $2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n)$

La classe $o(g) = \{f,\ \text{t.q. } lim_n f(n)/g(n) = 0\}$; on dira que f est négligeable devant g. Par exemple : $3n + 1 \in o(n^2)$. Remarquer que $f \in o(g) \Rightarrow f \in O(g)$.

Exercice 1 Montrer que $1/2\, n^2 - 3n \in \Theta(n^2)$

Exercice 2 Montrer que $6n^3 \notin \Theta(n^2)$

Exercice 3 Montrer que $f \in \Theta(g)$ ssi $f \in O(g)$ et $f \in \Omega(g)$.

Exercice 4 Montrer que $max(f, g) \in \Theta(f + g)$.

Exercice 5 La fonction 2^{n+1} est-elle dans $O(2^n)$? La même question pour 2^{2n}.

Exercice 6 La fonction 3^n est-elle dans $O(2^n)$?

Exercice 7 Montrer que $3n^2 + 2n \in O(n^2)$ en précisant les constantes et les rangs associés dans la définition.

Exercice 8 Montrer en reprenant la définition de la classe Θ que si $f_1 \in \Theta(g_1)$ et que $f_2 \in \Theta(g_2)$ alors $f_1 \cdot g_2 \in \Theta(f_2 \cdot g_1)$

Exercice 9 Quelle est la complexité du test qui répond à la question de savoir si un tableau de taille n est trié ? Expliquez pourquoi tout algorithme de tri d'un tableau de taille n peut être transformé en un algorithme en $\Omega(n)$.

Exercice 10

1. Soit h une fonction dont on cherche à estimer la complexité, peut on avoir :
   - à la fois $h \in O(n^2)$ et $h \in O(n^3)$?
   - à la fois $h \in \Omega(n^2)$ et $h \in \Omega(n^3)$?
   - à la fois $h \in \Theta(n^2)$ et $h \in \Theta(n^3)$?
2. Est il vrai que $f \in \Omega(g)$ si et seulement si $g \in O(f)$?
3. Donner une classe de complexité Θ claire de $f(n) = n(2 + sin^2\ n)$.