

Feuille de TD n° 4 : Expressions Rationnelles

Exercice 1 :

1. Donner un algorithme qui prend en entrée deux expressions rationnelles et qui renvoie vrai si elles contiennent au moins un mot commun.
2. Même question pour décider si deux expressions rationnelles représentent exactement le même langage.

Exercice 2 :

Donner des expressions rationnelles décrivant les langages ci-dessous :

- $L_1 = \{u \in A^* : \text{toute occurrence de } b \text{ est immédiatement suivie de deux occurrences de } a\}$,
- $L_2 = \{u \in A^* : u \text{ ne contient pas deux } a \text{ successifs}\}$,
- $L_3 = \{u \in A^* : \text{le nombre d'occurrences de } a \text{ dans } u \text{ est pair}\}$,
- $L_4 = \{u \in A^* : \text{les blocs de } a \text{ dans } u \text{ sont alternativement de longueur paire et impaire}\}$.

Exercice 3 :

Dans la suite a et b désignent des lettres, et A et B des expressions rationnelles.

1. Que pensez vous des égalités suivantes (les prouver ou trouver un contre-exemple) ?
 - $(A^n)^* = (A^*)^n$, n entier ;
 - $(A^+)^* = A^*$;
 - $(A + A^n)^* = A^* + (A^*)^n$, n entier ;
 - $A^2 + B^2 = (A + B)^2$;
 - $A^* \setminus B^* = (A \setminus B)^*$;
 - $A(BA)^* = (AB)^*A$;
 - $(A + B)^* = (A^*B^*)^*$;
 - $A(B + C) = AB + AC$.
2. Simplifier les expressions régulières suivantes :
 - $(aa)^*a + (aa)^*$;
 - $(a + b)(\epsilon + aa)^+a + b$;
 - $(a + \epsilon)a^*b$.
3. Montrer les égalités suivantes :
 - $(a^2 + a^3)^* = (a^2a^*)^*$;
 - $a^*(a + b)^* = (a + ba^*)^*$;
 - $(ba)^+(a^*b^* + a^*) = (ba)^*ba^+b^*$.

Exercice 4 :

Parmi les langages suivants, lesquels sont reconnaissables ?

1. $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
2. $L = \{a^p b^q \mid (p, q) \in \mathbb{N}^2\}$
3. $L = \{a^p b^q \mid p \geq q\}$
4. $L = \{a^p b^q \mid p \geq q \text{ et } q \leq 5\}$
5. $L = \{a^p b^q \mid p \neq q\}$
6. $L = \{u \in A^* \mid juj_a = juj_b\}$

7. $L = \{u \in A^* \mid juja < jujb\}$
8. $L = \{u \in \Sigma^* \mid juja \equiv jujb \pmod{7}\}$
9. $L = \{a^n b a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
10. $L = \{a^n \mid n \text{ est un nombre premier}\}$
11. $L = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
12. $L = \{b a b a^2 b a^3 \dots b a^n \mid n \geq 0\}$
13. $L = \{w w w \mid w \in \Sigma^*\}$
14. $L = \{u u \mid u \in A^*\}$
15. $L = \{u \in A^* \mid u \text{ est un palindrome}\}$
16. $L = L_2 \cap A^* f a a, b b g A^*$

Exercice 5 :

1. Utiliser les constructions vues en cours pour les opérateurs '+', '.', et '*' pour trouver des automates reconnaissant les langages décrits par les expressions rationnelles suivantes.
 - $E_1 = (a + ba + bba)^*$,
 - $E_2 = (a + ba + bba)^*(1 + b + bb)$,
 - $E_3 = (aa + b)^*$,
 - $E_4 = (aa + b)^*(a + bb)^*$,
 - $E_5 = (aa + bb + (ab + ba)(aa + bb)^*(ab + ba))^*$.
 - $E_6 = (a^* b^*)^*$,
 - $E_7 = b(ab)^* + (ba)^* b$,
 - $E_8 = (a + bb)^*(b + aa)^*$.
2. Faire de même avec l'algorithme de Glushkov.