CHAPITRE 6 : MINIMISATION D'UN AFD

1. Théorème d'existence de l'AFD minimal

1.1 Problème

Parmi les AFD reconnaissant un même langage L, peut-on en trouver un qui a le nombre minimal d'états ?

Oui, et il est unique (à un renommage près des états) :

• on l'obtient en supprimant les états inaccessibles

• puis on identife les états restants qui jouent un rôle identique du point de vue de la reconnaissance

1.2 Théorème de Myhill-Nérode

Théorème de Myhill-Nérode. *Soit L un langage rationnel. Parmi tous les AFD reconnaissant L, il en existe un et un seul qui a un nombre minimal d'états.*

2. Construction de l'AFD minimal

2.1 Suppression des états inaccessibles

Construction par récurrence d'une suite d'ensembles Acc_i

• $Acc_0 = \{i\}$

• $Acc_{i+1} = Acc_i \cup \delta(Acc_i, \Sigma)$

On s'arrête quand $Acc_{i+1} = Acc_i$, et on pose alors $Q = Acc_i$ (c'est-à-dire qu'on supprime les états de $Q \setminus Acc_i$).

Les états qu'on ne peut atteindre à partir de l'état initial n'apportent aucune contribution au langage L reconnu par l'AFD.

1.2 Automate quotient

Définition. *Un mot u sépare deux états* q_1 *et* q_2 *si*

$\delta(q_1, u) \in F$ *et* $\delta(q_2, u) \notin F$

ou $\delta(q_1, u) \notin F$ *et* $\delta(q_2, u) \in F$

Définition. *Deux états* q_1 *et* q_2 *sont équivalents si aucun mot ne les sépare :*

$q_1 \sim q_2$ si et seulement si pour tout mot u, on a :

$\delta(q_1, u) \in F$ implique $\delta(q_2, u) \in F$ et réciproquement.

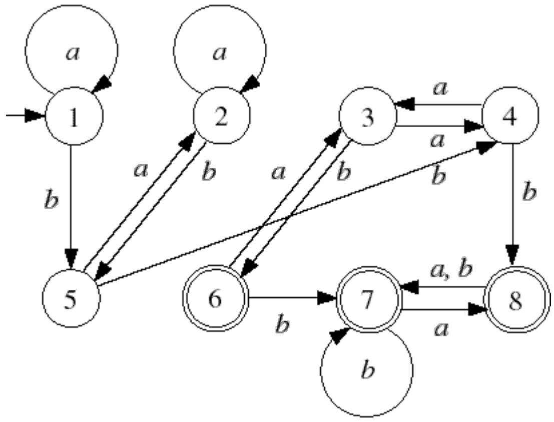
Proposition. *La relation ~ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des états Q : réflexive, symétrique, transitive.*

Supposons qu'un mot *u* sépare $p_1 = \delta(q_1, a)$, et $p_2 = \delta(q_2, a)$. On a :

$\delta(q_1, au) = \delta(\delta(q_1, a), u) = \delta(p_1, u)$, et

$\delta(q_2, au) = \delta(\delta(q_2, a), u) = \delta(p_2, u)$.

Donc le mot *au* sépare q_1 et q



$i = 1$, $F = \{6, 7, 8\}$

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	1	2	4	3	2	3	8	7
b	5	5	6	8	4	7	7	7

On voit facilement qu'aucun mot ne sépare les états 7 et 8. À partir de ces états, on peut lire n'importe quel mot sur $\{a, b\}$. Ces deux états pourront donc être confondus dans l'AFD minimal.

1. Équivalence $\sim_0$ 1. ƒquivalence ~

Initialement, les deux classes sont celle des états finals $[6]_0 = \{6, 7, 8\}$ et celle des autres $[1]_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sim_0$	$[1]_0$	$[1]_0$	$[1]_0$	$[1]_0$	$[1]_0$	$[6]_0$	$[6]_0$	$[6]_0$

2. Équivalence $\sim_1$

Pour éventuellement scinder des classes, il faut regarder dans quelles classes vont les transitions partant des états. On en déduit les nouvelles classes pour $\sim_1$.

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sim_0$	$[1]_0$	$[1]_0$	$[1]_0$	$[1]_0$	$[1]_0$	$[6]_0$	$[6]_0$	$[6]_0$
a	$[1]_0$	$[1]_0$	$[1]_0$	$[1]_0$	$[1]_0$	$[1]_0$	$[6]_0$	$[6]_0$
b	$[1]_0$	$[1]_0$	$[6]_0$	$[6]_0$	$[1]_0$	$[6]_0$	$[6]_0$	$[6]_0$
$\sim_1$	$[1]_1$	$[1]_1$	$[3]_1$	$[3]_1$	$[1]_1$	$[6]_1$	$[7]_1$	$[7]_1$

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sim_1$	$[1]_1$	$[1]_1$	$[3]_1$	$[3]_1$	$[1]_1$	$[6]_1$	$[7]_1$	$[7]_1$
a								
b			$[6]_1$	$[7]_1$	$[3]_1$			
$\sim_2$	$[1]_2$	$[1]_2$	$[3]_2$	$[4]_2$	$[5]_2$	$[6]_2$	$[7]_2$	$[7]_2$

4. Équivalence $\sim_3 = \sim_2$

Il n'y a plus aucune scission de classes, donc la suite d'équivalences s'est stabilisée, et on obtient celle de l'AFD minimal.

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sim_2$	$[1]_2$	$[1]_2$	$[3]_2$	$[4]_2$	$[5]_2$	$[6]_2$	$[7]_2$	$[7]_2$
a								
b								
$\sim_3$	$[1]_3$	$[1]_3$	$[3]_3$	$[4]_3$	$[5]_3$	$[6]_3$	$[7]_3$	$[7]_3$

On voit donc qu'on peut confondre

- les états 1 et 2
- les états 7 et 8

On en déduit l'AFD minimal.