

## Feuille de TD n° 4 : Expressions Rationnelles

### Exercice 1 :

Donner des expressions rationnelles décrivant les langages ci-dessous :

- $\{ L_1 = \{u \in A^* : \text{toute occurrence de } b \text{ est immédiatement suivie de deux occurrences de } a\},$
- $\{ L_2 = \{u \in A^* : u \text{ ne contient pas deux } a \text{ successifs}\},$
- $\{ L_3 = \{u \in A^* : \text{le nombre d'occurrences de } a \text{ dans } u \text{ est pair}\},$
- $\{ L_4 = \{u \in A^* : \text{les blocs de } a \text{ dans } u \text{ sont alternativement de longueur paire et impaire}\}.$

### Exercice 2 :

Dans la suite  $a$  et  $b$  désignent des lettres, et  $A$  et  $B$  des expressions rationnelles.

1. Que pensez vous des égalités suivantes (les prouver ou trouver un contre-exemple) ?

- $\{ (A^n)^* = (A^*)^n, n \text{ entier} ;$
- $\{ (A^+)^* = A^* ;$
- $\{ (A + A^n)^* = A^* + (A^*)^n, n \text{ entier} ;$
- $\{ A^2 + B^2 = (A + B)^2 ;$
- $\{ A^* \cap B^* = (A \cap B)^* ;$
- $\{ A(BA)^* = (AB)^* A ;$
- $\{ (A + B)^* = (A^* B^*)^* ;$
- $\{ A(B + C) = AB + AC.$

2. Simplifier les expressions régulières suivantes :

- $\{ (aa)^* a + (aa)^* ;$
- $\{ (a + b)(+aa)^+ a + b ;$
- $\{ (a + ) a^* b.$

3. Montrer les égalités suivantes :

- $\{ (a^2 + a^3)^* = (a^2 a^*)^* ;$
- $\{ a^*(a + b)^* = (a + ba^*)^* ;$
- $\{ (ba)^+(a^* b^* + a^*) = (ba)^* ba^+ b^*.$

### Exercice 3 :

Decrire (en français) les langages définis par les expressions rationnelles ci-dessous, puis construire des automates qui les reconnaissent.

- $\{ E_1 = (a + ba + bba)^*,$
- $\{ E_2 = (a + ba + bba)^*(1 + b + bb),$
- $\{ E_3 = (aa + b)^*,$
- $\{ E_4 = (aa + b)^*(a + bb)^*,$
- $\{ E_5 = (aa + bb + (ab + ba)(aa + bb)^*(ab + ba))^*.$