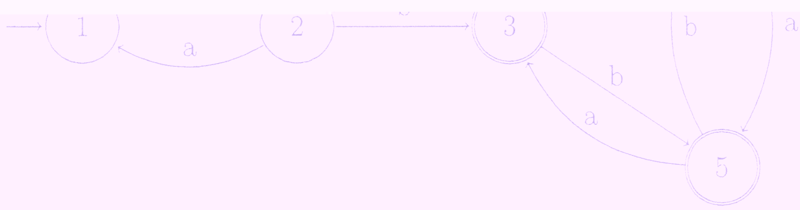
Université Paris 7-Denis Diderot
L2
Automates finis
AF4

Examen du 23 juin 2014
— Durée 3 h —
tous documents autorisés

Nota : Ce problème est présenté sous la forme de 3 parties ; il est attendu que les étudiants traitent la première partie et soit la partie II, soit les questions 10 et 11 de la partie



Soit L le langage reconnu par cet automate ; on note M_i le langage reconnu par $\mathcal{A}_i = < A, Q, \delta, \{1\}, \{i\} >$

Question 1 : Calculer par la méthode de Mac Naughton et Yamada une expression rationnelle de L (on détaillera les calculs en les présentant de façon claire et précise).

Question 2 : Démontrer que cet automate $\mathcal{A}$ est minimal.

Question 3 : Calculer avec soin tous les résiduels de L (on détaillera les calculs en les présentant de façon claire et précise).

Question 4 : On considère le langage $K = (ba)$ [illegible] (ab) [illegible]. En utilisant la méthode de Glushkov, donner un automate fini qui reconnaît ce langage K, puis déterminiser cet automate.

Question 5 : Déterminer, pour chaque état i de l'automate $\mathcal{A}$ reconnaissant L, si $K \cap M_i$ est vide ou non, et donner l'ensemble D des états de $\mathcal{A}$ pour lesquels cette intersection n'est pas vide.

Question 6 : On considère l'automate $\mathcal{A}_{\backslash K} =< A, Q, \delta, D, F >$. Montrer que le langage reconnu par cet automate vaut $\{w \in A^* \mid \exists f \in K : fw \in L\}$. En donner une expression rationnelle.

Question 7 : De manière générale, montrer, en s'inspirant de ce qui a été fait dans le cas particulier ci-dessus, que si K et L sont deux langages reconnaissables quelquonques, il en est de même du langage $K^{-1}.L = \{g \in A^* \mid \exists f \in K : fg \in L\}$.

Partie II

Si K est un langage rationnel quelquonque sur l'alphabet A, on définit un alphabet $\bar{A}$ disjoint de A en bijection avec celui-ci, et soit σ la bijection de A dans $\bar{A}$, que l'on étend en un homomorphisme $\sigma : A^* \to \bar{A}^*$, et l'on note $\bar{K} = \sigma(K)$. Soit $Z = A \cup \bar{A}$, φ et ψ les deux homomorphismes de Z^* dans A^* définis par : $\forall x \in A, \varphi(x) = \psi(x) = x$ et $\forall x \in \bar{A}, \varphi(x) = \sigma^{-1}(x)$ et $\psi(x) = 1$. Soit enfin le langage rationnel $R = \bar{K}.A^*$ sur Z, et on appelle T la transduction rationnelle caractérisée par R, φ et ψ.

Question 8 : Construire un transducteur fini qui réalise la transduction T.

Question 9 : Quelle est l'image $T(L)$ d'un langage L par la transduction rationnelle T vue comme une application. En déduire que si K et L sont deux langages reconnaissables quelquonques, il en est de même du langage $K^{-1}.L$.

Partie III

Question 10 : Revenant à l'exemple d'automate $\mathcal{A}$ du début, pour tout état i de cet automate, on considère le langage noté C_i des mots non vides qui partant de l'état i amènent à ce même état i, sans repasser par i, c'est-à-dire, avec les notations du cours : $C_i = {}_iW_i^{Q\setminus\{i\}}$.
Montrer que C_i est un code préfixe(1).
Calculer chacun des C_i.

Question 11 : Montrer qu'il existe un état i tel que C_i vérifie la propriété :
(*) $\forall w \in A^* \setminus C_i, C_i \bigcup \{w\}$ n'est pas un ensemble préfixe.

Question 12 : Montrer qu'il en est de même dans le cas général si l'on se donne n'importe quel automate fini déterministe et complet.

Question 13 : (*nettement plus difficile*) Montrer dans le cas général qu'il existe un état i tel que C_i vérifie la propriété :
(**) $\forall w \in A^* \setminus C_i, C_i \bigcup \{w\}$ n'est pas un code(2).

(1) *On rappelle qu'un ensemble P est préfixe si $[u \in P$ et $uv \in P] \Longrightarrow v = 1$, et que tout ensemble préfixe est un code.*
(2) *On rappelle qu'un ensemble C est un code si tout mot de C^* admet une unique factorisation en éléments de C.*