Feuille de TD n° 1 : Mots, Langages, Automates

A designe un a phabet ni. Le ot vide est note ε.

Exercice 1 : Généralités

1. Compter les occurrences des lettres a et b dans les mots suivants : a^3cbbca, $aabgjdd$, $titi$, $babc$.
2. Donner l'ensemble des couples (u, v) tels que $u \cdot v = abaac$.
3. Un mot u est un *facteur* d'un mot v si u apparaît à l'intérieur de v : v s'écrit $w_1 \cdot u \cdot w_2$ pour certains mots w_1 et w_2. Un mot u est un *sous- ot* d'un mot v si on peut obtenir u à partir de v par 'effacement' de certaines lettres (pas forcément consécutives) de v. Le nombre d'*occurrences* d'un facteur (resp. sous-mot) u dans le mot v est le nombre de façons de voir u comme facteur (resp. sous-mot) de v.

   Donner le nombre d'occurrences du facteur aba dans le mot $v = ababab$. Donner le nombre d'occurrences du sous-mot aba dans le mÍme mot v.

Exercice 2 : Opérations sur les langages

1. Calculer $\mathcal{L} \cdot \mathcal{M}$ pour les ensembles suivants :
   - $\mathcal{L} = \{a, ab, bb\}$ et $\mathcal{M} = \{\varepsilon, b, a^2\}$;
   - $\mathcal{L} = \emptyset$ et $\mathcal{M} = \{a, ba, bb\}$;
   - $\mathcal{L} = \{\varepsilon\}$ et $\mathcal{M} = \{a, ba, bb\}$;
   - $\mathcal{L} = \{aa, ab, ba\}$ et $\mathcal{M} = A^*$.
2. Montrer que le produit est une opération distributive par rapport à l'union, c'est-à-dire que, pour tous langages $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$, on a : $\mathcal{L} \cdot (\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) = (\mathcal{L} \cdot \mathcal{M}) \cup (\mathcal{L} \cdot \mathcal{N})$. Montrer que le produit n'est pas distributif par rapport à l'intersection.
3. Parmi les égalités suivantes, lesquelles sont correctes (prouvez ou donnez un contre-exemple) ?
   - $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}^* \cdot \mathcal{M}^*$
   - $\mathcal{M}^* = (\mathcal{M} \cdot \mathcal{M})^*$
   - $\mathcal{M}^* = \mathcal{M} \cdot \mathcal{M}^*$
   - $\mathcal{M}^* = (\mathcal{M}^*)^*$
   - $\mathcal{M} \cdot (\mathcal{N} \cdot \mathcal{M})^* = (\mathcal{M} \cdot \mathcal{N})^* \cdot \mathcal{M}$
   - $(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})^* = \mathcal{M}^* \cup \mathcal{N}^*$
   - $(\mathcal{M} \cap \mathcal{N})^* = \mathcal{M}^* \cap \mathcal{N}^*$
   - $(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})^* = (\mathcal{M}^* \cdot \mathcal{N}^*)^*$
   - $(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})^* = (\mathcal{M}^* \cdot \mathcal{N})^* \cdot \mathcal{M}^*$

Exercice 3 : Commutation

Soient u et v deux mots. On dit que u et v *co utent* si $u \cdot v = v \cdot u$.

Montrer que u et v commutent si et seulement s'il existe un mot w et deux entiers positifs ou nuls m et n tels que $u = w^m$ et $v = w^n$. Pour le sens $\Rightarrow$, on pourra procéder par récurrence sur $|u| + |v|$.

Exercice 4 : Conjugaison

Deux mots u et v sont dits *conjugues* s'il existe deux mots w_1 et w_2 tels que $u = w_1 \cdot w_2$ et $v = w_2 \cdot w_1$. En d'autres termes, v s'obtient à partir de u par permutation cyclique de ses lettres.

1. Montrer que la conjugaison est une relation d'équivalence, c'est-à-dire :
   - tout mot u est conjugué à lui-mÍme ;
   - si u est conjugué à v, alors v est conjugué à u ;
   - si u est conjugué à v et v est conjugué à w, alors u est conjugué à w.
2. Montrer que u et v sont conjugués si et seulement s'il existe un mot w tel que $u \cdot w = w \cdot v$.

Exercice 5 : Résiduels

Soient $\mathcal{L} \subseteq A^*$ un langage et $u \in A^*$ un mot. On appelle *residue* du langage $\mathcal{L}$ (à gauche) par rapport à u, et on note $u^{-1} \cdot \mathcal{L}$, le langage :

$$u^{-1} \cdot \mathcal{L} = \{v \in A^* \mid u \cdot v \in \mathcal{L}\}.$$

Autrement dit, $u^{-1} \cdot \mathcal{L}$ est l'ensemble des mots de $\mathcal{L}$ commençant par u, auxquels on a retiré ce préfixe u.

1. Soit $\mathcal{L} = \{janvier, fevrier, mars, avril, mai, juin, juillet\}$. Calculer les résiduels $jan^{-1} \cdot \mathcal{L}$, $ier^{-1} \cdot \mathcal{L}$, $jui^{-1} \cdot \mathcal{L}$, $juin^{-1} \cdot \mathcal{L}$
2. Calculer les résiduels du langage $\mathcal{L} = \{\varepsilon, abb, baaba\}$ par rapport aux mots a, b, ab, ba et bb.
3. Calculer, pour tous les mots u de A^*, le résiduel de $\mathcal{L}$ par rapport au mot u dans les exemples suivants (avec $A = \{a, b\}$) :
   – si $\mathcal{L} = \{a^p b^q \mid p, q \geqslant 0\}$;
   – si $\mathcal{L} = \{a^n b^n \mid n \geqslant 0\}$.
4. Soit $\mathcal{L}$ un langage. Montrer que $\varepsilon^{-1} \cdot \mathcal{L} = \mathcal{L}$ et que, pour tous mots u et v dans A^*, $(uv)^{-1} \cdot \mathcal{L} = v^{-1} \cdot (u^{-1} \cdot \mathcal{L})$.

   Jusqu'à la fin de l'exercice $\mathcal{L}$ désigne maintetant le langage défini par l'expression rationnelle $(ab)^*(a + b)$.
5. Calculez des expressions rationnelles pour les langages $a^{-1} \cdot \mathcal{L}$ et $b^{-1} \cdot \mathcal{L}$.
6. Calculez ensuite $w^{-1} \cdot \mathcal{L}$ pour les mots w de deux lettres : aa, ab, ba et bb.
7. Les résiduels $w^{-1} \cdot \mathcal{L}$ obtenus pour des mots w de longueur quelconque sont-ils différents de ceux déjà calculés ?