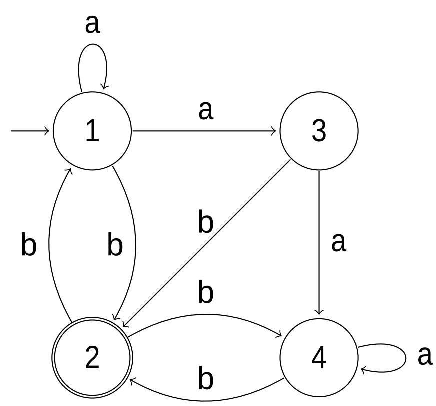
Universite Paris 7-Denis Diderot
L2
Automates nis
AF4

Examen du 21 mai 2012
| Duree 3 h |
tous documents autorises

Avertissement : Les exercices sont indépendants.

Exercice 1



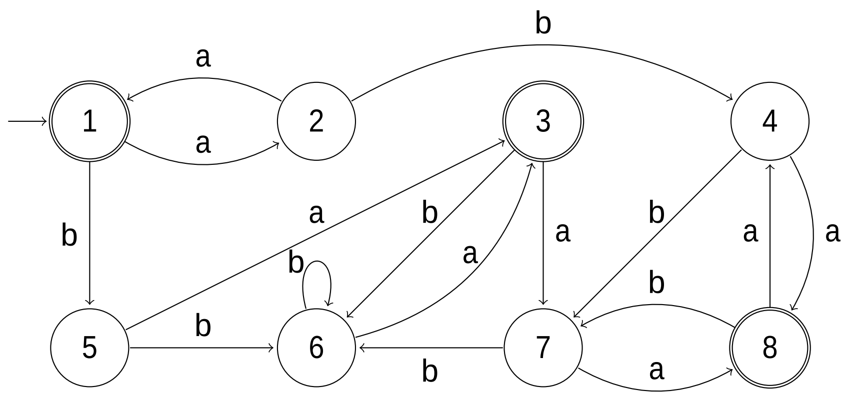
On considere l'automate ni :

Question 1 : Determiniser cet automate.

Question 2 : Si L le est le langage reconnu par cet automate, calculer par la methode de Mac Naughton et Yamada une expression rationnelle de L.

Exercice 2

On considere l'automate ni :



Question : Calculer l'equivalence de Nerode associee a cet automate. En deduire l'automate minimal qui reconna^t le même langage.

Exercice 3

Soit l'alphabet $A = \{a, b\}$. Montrer que le langage $L = \{(a^n b)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas reconnaissable.

Exercice 4

Si $L \subseteq A^*$, on note $L_{<n>} = L \cap A^n = \{w \in L \mid |w| = n\}$, et $(L) = \{n \in \mathbb{N} \mid L_{<n>} \neq \emptyset\}$. On dira que L est complet (pour les longueurs) si $(L) = \mathbb{N}$, et qu'il est presque complet si (L) et $\mathbb{N}$ ne different que par un nombre fini d'entiers.

Question 1 : Sur l'alphabet $B = \{a\}$, soit le langage $K = a^3(a^2)^* + a^2(a^3)^*$. Donner la representation sagittale (*i.e.* le dessin du graphe) d'un automate fini deterministe qui reconnaît K.

Question 2 : Calculer (K). K est-il complet ? est-il presque complet ?

Question 3 : Montrer que si $H \in Rat(B^*)$, alors soit il est fini, soit il existe un entier $i \geq 0$ et un entier $k > 0$ tels que $H = F \cup \bigcup_{j \in J} a^i(a^k)^* a^j$ ou F est un ensemble fini de mots tel que $f \in F \Rightarrow |f| < i$ et J est un ensemble (fini) d'entiers inclus dans $\{0, 1, \ldots, k-1\}$.
Aide : on pourra s'inspirer de l'exemple de la question 1, et donner la forme générale d'un automate fini déterministe qui reconnaît un langage rationnel sur un alphabet à une lettre, pour en déduire la réponse à la question.

Question 4 : Donner un algorithme qui resout le probleme :
Donnée : Une expression rationnelle d'un langage $K \in Rat(B^*)$
Question : k est-il complet ?
et un algorithme qui resout le probleme :
Donnée : Une expression rationnelle d'un langage $K \in Rat(B^*)$
Question : k est-il presque complet ?

Question 5 : Donner un algorithme qui resout le probleme :
Donnée : Deux expressions rationnelles sur l'alphabet B représentant deux langages H_1 et H_2
Question : A-t-on $(H_1) = (H_2)$?
et un algorithme qui resout le probleme :
Donnée : Deux expressions rationnelles sur l'alphabet B représentant deux langages H_1 et H_2
Question : (H_1) et (H_2) diffèrent-ils d'un nombre fini d'entiers ?

Question 6 : Soit A un alphabet quelconque. On considere le morphisme de monoïdes $: A^* \to B^*$ defini par : $\forall x \in A,\ (x)\ ($

Exercice 5

On considere sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ le langage $M = (aa + bb) + (ab + ba).(aa + bb)^*(ab + ba)$ et le langage $L = (aa + bb)^*(ab + ba).M^*$.

Question 1 : Calculer les residuels de L (les exprimer en fonction de L et M).

Question 2 : En deduire l'automate minimal $\mathcal{A} = \langle A, Q, \delta, \{1\}, F \rangle$ reconnaissant L, ou $Q = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Question 3 : Calculer le monoïde de transitions T de cet automate. *(rappel : le monoïde de transitions d'un automate est le pus petit monoïde qui contient les applications* $\overline{x}$ *de* Q *dans* Q *définies pour chaque lettre* $x \in A$ *par :* $\forall q \in Q, \overline{x}(q) = \delta(q, x)$).

Question 4 : Soit $H = \{\tau \in T \mid \tau(1) \in F\}$ et soit $G = \{\tau \in T \mid \tau \circ \tau \circ \tau(1) \in F\}$. Que valent H et G ?

On rappelle que si $\varphi : A^* \to T$ est l'homorphisme défini par $\varphi(f) = \overline{f}$, (ou $\overline{u.v} = \overline{u}.\overline{v} = \overline{v} \circ \overline{u}$) alors $L = \varphi^{-1}(H)$.

Question 5 : Vérifier que $\varphi^{-1}(G) = \{w \in A^* \mid w^3 \in L\}$, et en deduire que le langage $T(L) = \{w \in A^* \mid w^3 \in L\}$ est reconnaissable.