

## TD n° 6 : Minimisation des automates

Exercice 1 : Résiduels et automate minimal : échauffement

Le résiduel  $u^{-1}:L$  d'un langage  $L$  par rapport à un mot  $u$  est le langage  $\{v \mid uv \in L\}$ . Les résiduels des langages rationnels vérifient les propriétés suivantes :

- $a^{-1}:\emptyset = \emptyset$
- $a^{-1}:1 = \emptyset$
- $a^{-1}:b = \emptyset$ , si  $b \neq a$
- $a^{-1}:a = 1$
- $(au)^{-1}:L = u^{-1}:(a^{-1}:L)$
- $u^{-1}:(L_1 + L_2) = (u^{-1}:L_1) + (u^{-1}:L_2)$
- $a^{-1}:(L_1 \cdot L_2) = \begin{cases} (a^{-1}:L_1) \cdot L_2 & \text{si } 1 \in L_1 \\ (a^{-1}:L_1) \cdot L_2 + a^{-1}:L_2 & \text{si } 1 \notin L_1 \end{cases}$
- $a^{-1}:(L^*) = (a^{-1}:L) \cdot L^*$

On considère le langage  $L = ba^* + ab$  :

1. Calculer les résiduels  $a^{-1}:L$  et  $b^{-1}:L$ .
2. Calculer  $(ab)^{-1}:L$ ,  $(aa)^{-1}:L$ ,  $(bb)^{-1}:L$  et  $(ba)^{-1}:L$ .
3. Calculer les résiduels de  $L$  par rapport aux mots sur  $\{a; b\}$  de longueur 3. Est-il nécessaire de calculer les résiduels par rapport aux mots de longueur 4 ?
4. Construire un automate  $A$  suivant les règles suivantes :
  - Les états de  $A$  sont les *différents* résiduels non vides de  $L$  par rapport aux mots sur  $\{a; b\}$  de longueur  $\leq 3$ .
  - L'état associé à  $1^{-1}:L = L$  est l'état initial.
  - Il y a une transition  $(u)^{-1}:L \rightarrow (v)^{-1}:L$  étiqueté avec  $x$  si et seulement si  $v = ux$ .
  - Un état de  $A$  est final si le résiduel associé contient 1.
5. L'automate  $A$  est minimal. Pourquoi suffit-il de se limiter aux résiduels par rapport aux mots de longueur  $\leq 3$  ?

Exercice 2 : Résiduels et automate minimal

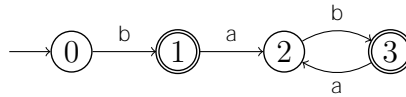
- Construire l'automate minimal des langages suivants en utilisant le calcul de résiduels :

1.  $L_1 = b(ab)^* + (ab)^*a$
2.  $L_2 = a(b + ab)^* + b^*(a + bb)$

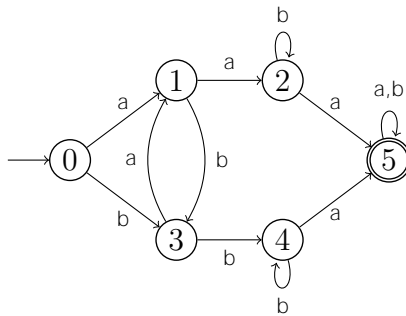
## Exercice 3 : Minimisation d'un automate

Appliquer l'algorithme de minimisation de Moore aux automates suivants. Appliquer ensuite la méthode  $\det(\text{mir}(\det(\text{mir}(A))))$

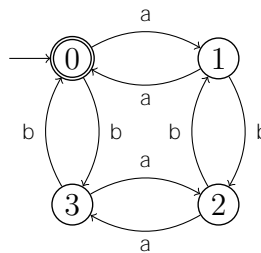
1)



2)



3)



4)

