EXAMEN MI3 - 17 JANVIER 2012, DE 12H à 15H

Tous documents et équipements électroniques (calculatrices, téléphones, etc) sont interdits.

Exercice 1. *Montrer que les fonctions suivantes sont developpables en serie entiere en* 0. *Determiner leur developpement en serie entiere et les rayons de convergence correspondant.*

$$f(x) = \frac{x^3+2}{x^2 \quad x \quad 2} \qquad g(x) = \frac{x^2}{2x^3 \quad 3x^2+1}$$

Exercice 2. *On considere la matrice*

$$A = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

(1) *Trouver une matrice triangulaire superieure T et une matrice inversible P telles que $P^{-1}AP = T$.*

(2) *Calculer T^n pour tout n 2 $\mathbb{Z}$.*

(3) *En deduire une expression de A^n pour tout n 2 $\mathbb{Z}$.*

Exercice 3. *Calculer le determinant de la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \\ 5 & 0 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. *La matrice A suivante est-elle diagonalisable ? trigonalisable ? Determiner une matrice P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale si possible, triangulaire sinon.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. (1) *Quelle est la nature de la serie de terme general suivant ?*

$$u_n = \sin \quad \frac{2^n}{(\quad 1)^n n! + n^n}$$

(2) *Quel est le rayon de convergence de la serie entiere $\sum u_n x^n$?*

(3) *Quel est le rayon de convergence de la serie entiere $\sum n! u_n x^n$?*