Université Paris Diderot
Département de Sciences Exactes

MI3/MA3 – Année 2009/10
L2 Info et Mass

Un corrigé de l'examen du 4 janvier 2010 (avec quelques rappels de cours)

I SÉRIES

Commentaires. (*Rappel de cours*) Si la série entière $\sum_n a_n x^n$ (resp. $\sum_n b_n x^n$) a pour rayon de convergence R_1 (resp. R_2) alors la série $\sum_n (a_n + b_n)x^n$ a un rayon de convergence $R \geq \min(R_1, R_2)$; de plus si $R_1 \neq R_2$ alors $R = \min(R_1, R_2)$.
Critère de d'Alembert. Supposons que la limite de $|a_{n+1}|/|a_n|$ existe et vaut ℓ (éventuellement 0 ou $+\infty$). Alors, si $\ell < 1$, la série $\sum_n a_n$ est absolument convergente; si $\ell > 1$, la série $\sum_n a_n$ est divergente. En particulier, le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n x^n$ est égal à $R = 1/\ell$ (si $\ell = 0$, cela signifie $R = +\infty$ et si $\ell = +\infty$ cela signifie $R = 0$).
Critère de Cauchy. Mêmes énoncés sous l'hypohèse que la limite de $\sqrt[n]{|a_n|}$ existe et vaut ℓ.

Exercice 1. (Séries entières) 1.a) *Déterminer le rayon de convergence de la série* $\sum a_n x^n$ *pour les coefficients suivants*

$$n^2 + 2^n; \qquad \frac{1}{(2n)!}\prod_{k=0}^{n}(4 + k^2).$$

La série $\sum_{n\geq 0} n^2 x^n$ a pour rayon de convergence 1 (par exemple le critère de d'Alembert $\lim \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$ ou par le critère de Cauchy $\lim \sqrt[n]{n^2} = 1$) et la série $\sum_{n\geq 0} 2^n x^n$ a pour rayon de convergence $1/2$ (c'est une série géométrique de raison $2x$). Par conséquent la série somme de ces deux séries a pour rayon de convergence $1/2$.
On pouvait aussi appliquer le critère de d'Alembert (noter que $a_n > 0$) :

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{(n+1)^2 + 2^{n+1}}{n^2 + 2^n} = \lim_n 2\frac{(n+1)^2 2^{-n-1} + 1}{n^2 2^{-n} + 1} = 2,$$

puisque $(n+1)^2 2^{-n-1}$ et $n^2 2^{-n}$ tendent vers zéro ("l'exponentielle l'emporte sur la puissance"). On retrouve $R = 1/\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1/2$. Le critère de Cauchy pouvait aussi être utilisé:

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{n^2 + 2^n} = \lim_n \sqrt[n]{2^n(n^2 2^{-n} + 1)} = 2.$$

Appliquons le critère de d'Alembert à la deuxième série (on a aussi $a_n > 0$).

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{(2n)!\prod_{k=0}^{n+1}(4+k^2)}{(2n+2)!\prod_{k=0}^{n}(4+k^2)} = \lim_n \frac{4 + (n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}.$$

Par conséquent le rayon de convergence est égal à 4.

On considère maintenant $a \geq 0$ un entier, on définit la série entière suivante:

$$S_a(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n n!(n+a)!}$$

1.b) *Déterminer le rayon de convergence de la série définissant $S_a(x)$.*

On pouvait appliquer le critère de d'Alembert, pour changer un peu utilisons un critère de comparaison

$$\left|\frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n n!(n+a)!}\right| \leq \frac{|x^2|^n}{n!}$$

or le membre de droite est le terme de la série $\exp(x^2)$ convergente pour tout x donc le rayon de convergence est $+\infty$.

1.c) *Monter que S_a est deux fois dérivable et donner une expression sous forme de série entière de $S'_a(x)$ et $S''_a(x)$, en justifiant du rayon de convergence de chacune des séries.*

D'après le cours, une série entière $\sum_n a_n x^n$ ayant un rayon de convergence $R > 0$ définit sur l'intervalle $]-R, R[$ (ou sur le disque $|x| < R$ si l'on travaille avec une variable complexe) une fonction indéfiniment dérivable dont les dérivées successives sont obtenues en prenant la série des dérivées, le rayon de convergence de chacune de ces séries dérivées étant égal à R. Dans le cas présent, on obtient que $S_a(x)$ est indéfiniment dérivable et que

$$S'_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n-1}}{4^n n!(n+a)!} \quad \text{et} \quad S''_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n(2n-1)x^{2n-2}}{4^n n!(n+a)!}$$

(où l'on peut omettre le terme correspondant à $n = 0$ car il est nul).

1.d) *Vérifier que $S_a(x)$ est solution de l'équation différentielle*

$$xy'' + (2a+1)y' + xy = 0$$

Ecrivons $a_n := \frac{(-1)^n}{4^n n!(n+a)!}$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ alors

$$xS'' + (2a+1)S' + xS = \sum_{n\geq 0}(2n)(2n-1)a_n x^{2n-1} + (2a+1)\sum_{n\geq 0} 2na_n x^{2n-1} + \sum_{n\geq 0} a_n x^{2n+1}$$

Remarquons que le terme avec $n = 0$ peut être omis dans les deux premières séries et que l'on obtient une série entière avec seulement des termes impairs; en reindexant a dernière série $n = m$ et les deux premières sommes $n = m+1$, c'est-à-dire en écrivant:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{2n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} b_{m+1} x^{2m+1},$$

on obtient l'identité :

$$xS'' + (2a+1)S' + xS = \sum_{m\geq 0} \{2(m+1)(2m+2a+2)a_{m+1} + a_m\} x^{2m+1}.$$

Cette série est égale à la série nulle puisque

$$4(m+1)(m+a+1)a_{m+1} = 4(m+1)(m+a+1)\frac{(-1)^{m+1}}{4^{m+1}(m+1)!(m+1+a)!} = -a_m.$$

Exercice 2. (Série de fonctions) *Soit la suite de fonctions $f_n(t) = \frac{t^n \sin(nt)}{n}$.*
2.a) *Montrer que les séries $S(t) := \sum_{n\geq 1} f_n(t)$ et $T(t) := \sum_{n\geq 1} f'_n(t)$ convergent simplement pour $|t| < 1$.*

On calcule $f'_n(t) = t^{n-1}\sin(nt) + t^n \cos(nt)$. On utilise que sinus et cosinus sont bornées en valeur absolue par 1 pour écrire

$$|f_n(t)| \leq \frac{|t|^n}{n} \qquad \text{et} \qquad |f'_n(t)| \leq |t|^{n-1} + |t|^n$$

Les séries de terme général $|t|^n$ et $|t|^n/n$ sont convergentes pour $|t| < 1$ donc on obtient bien la convergence (absolue) simple des deux séries pour $|t| < 1$.
2.b) *Montrer que pour tout $0 < a < 1$, la convergence de chacune des séries est normale sur l'intervalle $[-a, a]$.*

Reprenons les majorations précédentes en supposant $t \in [-a, a]$ on obtient

$$|f_n(t)| \leq \frac{a^n}{n} \qquad \text{et} \qquad |f_n'(t)| \leq a^{n-1} + a^n$$

et comme les séries de terme général a^n et a^n/n sont convergentes on obtient bien la convergence normale sur chaque intervalle $[-a, a]$ des séries $S(t)$ et $T(t)$.

2.c) *Peut-on en déduire que pour tout $t \in]-1, 1[$ on a la relation*

$$S'(t) = T(t)?$$

(on justifiera soigneusement la réponse en énonçant les résultat du cours invoqués).

D'après le cours, si la série $T(t) = \sum f_n'(t)$ converge normalement sur un intervalle I et la série $S(t) = \sum f_n(t)$ converge simplement en un point de l'intervalle alors la série $S(t)$ est convergente et définit dans I une fonction dérivable dont la dérivée est $T(t)$. D'après les questions précédentes, on peut appliquer cela à tout intervalle $I = [-a, a]$ pour $a < 1$. On obtient donc que $S(t)$ est dérivable et $S'(t) = T(t)$ d'abord sur l'intervalle $[-a, a]$ puis sur $]-1, 1[= \cup_{a<1}[-a, a]$.

2.d) *Donner une expression simple pour $T(t)$.*

On utilise la formule d'Euler $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ et la formule de la série géométrique (valable pour $x \in \mathbf{C}$ avec $|x| < 1$)

$$\sum_{n\geq 1} x^n = \frac{x}{1-x}$$

Au point $x = te^{it}$ cela donne

$$\sum_{n\geq 1} t^n \cos(nt) +$$

$\sum_{n\geq 1} t^n$ *in n*)*t*Td [(1)]T .06 26 Tf 20.23.106 0 Td [(t)]T 5.2. 626

Trigonalisation. Si la dimension du sous-espace propre associé à une valeur propre α est strictement plus petite que la multiplicité de α comme racine du polynôme caractéristique, la matrice ne sera pas diagonalisable. La seule condition pour qu'une matrice soit trigonalisable est que son polynôme caractéristique soit scindé (c'est donc toujours le cas sur $\mathbf{C}$). Prenons le cas d'une matrice A de taille 3×3 avec un polynôme caractéristique $(\alpha - X)^3$ et un sous-espace propre $\mathrm{Ker}(A - \alpha I)$ de dimension 1. Noter que $\mathrm{Ker}(A - \alpha I) \subset \mathrm{Ker}(A - \alpha I)^2 \subset \mathrm{Ker}(A - \alpha I)^3 = K^3$.On choisira f_1 base de $\mathrm{Ker}(A - \alpha I)$, puis f_2 vecteur de $\mathrm{Ker}(A - \alpha I)^2$ indépendant de f_1 et enfin un vecteur f_3 complétant une base (noter que automatiquement $f_3 \in \mathrm{Ker}(A - \alpha I)^3$). On aura forcément alors

$$Af_1 = \alpha f_1, \quad Af_2 = \alpha f_2 + af_1 \quad \text{et} \quad Af_3 = \alpha f_3 + bf_2 + cf_1,$$

(avec des coefficients a, b, c qu'il faut calculer) et on obtiendra donc une trigonalisation

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & a & c \\ 0 & \alpha & b \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Exercice 3. (Algèbre linéaire I) *On se propose d'étudier les suites numériques vérifiant la relation de récurrence*

$$u_{n+1} = 2u_n + 2u_{n-1}$$

Pour cela on introduit la suite de vecteurs du plan $V_n := \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$ *et la matrice* $A := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3.a) *Montrer que la relation de récurrence se traduit par une relation matricielle*

$$V_{n+1} = AV_n.$$

En effet on a bien

$$AV_n = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_n + 2u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = V_{n+1}.$$

3.b) *Diagonaliser la matrice A sous la forme $A = PDP^{-1}$ avec des matrices P et D que l'on déterminera.*

On commence par calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A. On a

$$P_A(X) = \det \begin{pmatrix} 2 - X & 2 \\ 1 & -X \end{pmatrix} = X^2 - 2X - 2$$

et les racines sont $1 + \sqrt{3}$ et $1 - \sqrt{3}$. Comme les racines sont distinctes et réelles, on sait déjà que la matrice est diagonalisable. Calculons donc les sous-espaces propres.
Un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est dans $\mathrm{Ker}(A - \alpha I)$ (pour $\alpha = 1 \pm \sqrt{3}$) si

$$\begin{cases} (2 - \alpha)x + 2y & = 0 \\ x - \alpha y & = 0 \end{cases}$$

ou encore si $x - \alpha y = 0$. On retrouve bien que le sous-espace propre est de dimension 1 et on peut choisir comme base $f_1 := \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f_2 := \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. On obtient alors

$$A = PDP^{-1}$$

avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.c) *En déduire une expression de A^n et de u_n.*

On peut écrire

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix} (1+\sqrt{3})^n & 0 \\ 0 & (1-\sqrt{3})^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

On peut terminer le calcul en calculant P^{-1} et en effectuant le produit des trois matrices. On peut aussi déterminer u_n en remarquant que le calcul donnera nécessairement une expression de la forme

$$u_n = C_1(1+\sqrt{3})^n + C_2(1-\sqrt{3})^n$$

et que l'on peut déterminer les constantes C_1 et C_2 en fonction de u_0 et u_1 ainsi: $u_0 = C_1 + C_2$ et $u_1 = C_1(1+\sqrt{3}) + C_2(1-\sqrt{3})$ donc

$$C_1 = \frac{u_1 - (1-\sqrt{3})u_0}{2\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{-u_1 + (1+\sqrt{3})u_0}{2\sqrt{3}}$$

3.d) *À quelle condition sur u_0 et u_1, la suite u_n reste-t-elle bornée?*

On a $|1-\sqrt{3}| < 1$ donc $(1-\sqrt{3})^n$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini; par contre $1+\sqrt{3} > 1$ donc $(1+\sqrt{3})^n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini; ainsi la suite u_n reste bornée si et seulement si $C_1 = 0$ c'est-à-dire si et seulement si $u_1 = (1-\sqrt{3})u_0$.

Exercice 4. (Algèbre linéaire II) *On veut étudier les solutions du système différentiel suivant:*

$$\begin{cases} x' &= -2y \\ y' &= x - z \\ z' &= 2y \end{cases} \qquad (S)$$

4.a) *Déterminer une matrice A telle que le système s'écrive sous la forme matricielle : $X' = AX$ avec $X := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.*

Il faut choisir

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.b) *Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. Est-il possible de choisir ces matrices à coefficients réels ou doit-on les choisir à coefficients complexes?*

On commence par calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A. On a

$$P_A(T) = \det\begin{pmatrix} -T & -2 & 0 \\ 1 & -T & -1 \\ 0 & 2 & -T \end{pmatrix} = -T^3 - 4T = -T(T-2i)(T+2i).$$

Le polynôme caractéristique n'est pas scindé sur $\mathbf{R}$ donc A n'est pas diagonalisable sur $\mathbf{R}$; par contre les valeurs propres complexes sont distinctes donc la matrice est diagonalisable sur $\mathbf{C}$. Calculons donc une base de vecteurs propres. L'espace $\operatorname{Ker} A$ est engendré par $f_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; l'espace $\operatorname{Ker}(A - 2iI)$ est engendré (calculs omis) par $f_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}$; l'espace $\operatorname{Ker}(A + 2iI)$ est engendré par $f_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$; on tire

$$A = A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

4.c) *Utiliser la question précédente pour calculer les solutions du système (S).*

Effectuons le changement de repère $Y = P^{-1}X$, alors $X = PY$ et $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ est solution du système différentiel $Y' = DY$ qui s'écrit

$$\begin{cases} u'(t) &= 0 \\ v'(t) &= 2iv(t) \\ w'(t) &= -2iw(t) \end{cases}$$

On obtient donc

$$u(t) = u_0;\ v(t) = v_0 e^{2it},\ w(t) = w_0 e^{-2it}$$

et enfin

$$X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 e^{2it} \\ w_0 e^{-2it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 + v_0 e^{2it} + w_0 e^{-2it} \\ -iv_0 e^{2it} + iw_0 e^{-2it} \\ u_0 - v_0 e^{2it} - w_0 e^{-2it} \end{pmatrix}$$

Remarque. On notera qu'il n'était pas indispensable de calculer la matrice P^{-1}, toutefois, si l'on veut les solutions *réelles* ou les solutions avec conditions initiales $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, il faut procéder ainsi: on écrit $Y_0 = P^{-1}X_0$, on calcule

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2i & -1 \\ 1 & -2i & -1 \end{pmatrix}$$

et on trouve en multipliant les matrices

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{x_0+z_0}{2} + \frac{x_0-z_0}{2}\cos(2t) - y_0 \sin(2t) \\ y(t) &= y_0 \cos(2t) + \frac{x_0-z_0}{2}\sin(2t) \\ z(t) &= \frac{x_0+z_0}{2} + y_0 \sin(2t) - \frac{x_0-z_0}{2}\cos(2t). \end{cases}$$

Exercice 5. : (Algèbre linéaire III) *Soit la matrice*

$$B := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

5.a) *Calculer le polynôme caractéristique de B et vérifier qu'elle possède une racine triple.*

Développons par rapport à la dernière colonne

$$P_B(X) = \det \begin{pmatrix} 2-X & -1 & 0 \\ 2 & -2-X & 1 \\ 3 & -5 & 3-X \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 2-X & -1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} + (3-X)\det \begin{pmatrix} 2-X & -1 \\ 2 & -2-X \end{pmatrix}$$

$$= -(5X-7) + (3-X)(X^2-2) = -X^3 + 3X^3 - 3X + 1 = -(X-1)^3.$$

5.b) *Déterminer une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telles que $B = PTP^{-1}$. La matrice B est-elle diagonalisable?*

Comme le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbf{R}$, la matrice est trigonalisable sur $\mathbf{R}$. Si elle était diagonalisable on aurait $A = PIP^{-1} = I$ ce qui est faux. Calculons donc une base de $\mathrm{Ker}(B-I)$ que l'on complètera en une base de $\mathrm{Ker}(B-I)^2$ etc. Les coordonnées d'un vecteur de $\mathrm{Ker}(B-I)$ vérifient

$$\begin{cases} x - y &= 0 \\ 2x - 3y + z &= 0 \\ 3x - 5y + 2z &= 0 \end{cases}$$

ou encore $x = y = z$. Une base est donnée par $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (noter qu'on retrouve que B n'est pas diagonalisable puisque la dimension du sous-espace propre est différente de la multiplicité de la valeur propre). On calcule ensuite $(B-I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $(B-I)^3 = 0$; donc $\mathrm{Ker}(B-I)^2$ est le plan d'équation $-x+2y-z=0$. On peut choisir pour base du plan f_1 et $f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et compléter en une base de $\mathbf{R}^3$ en choisissant un troisième vecteur indépendant par exemple $f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Nous savons que $Bf_1 = f_1$, $Bf_2 = f_2 + af_1$ et $Bf_3 = f_3 + bf_2 + cf_1$, il faut calculer les coefficients a, b, c.

$$Bf_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $a = 1$. Ensuite

$$Bf_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $b = -1$ et $c = 2$. On conclut donc

$$B = PTD^{-1} \quad \text{avec} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.c) *En déduire le calcul de la matrice* $\exp(tB)$.

On écrit $B = PTP^{-1}$ donc $\exp(tB) = P\exp(tB)P^{-1}$ et $T = I + N$ avec donc $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et (bien sûr) $N^3 = 0$. On en tire, puisque I commute avec N :

$$\exp(tT) = \exp(tI)\exp(tN) = e^t(I + tN + \frac{t^2}{2}N^2) = e^t \begin{pmatrix} 1 & t & 2t - \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.d) *Exprimer les solutions du système différentiel suivant:*

$$\begin{cases} x' &= 2x - y \\ y' &= 2x - 2y + z \\ z' &= 3x - 5y + 3z \end{cases} \qquad (E)$$

Nous savons que les solutions du système sont données par $X(t) = \exp(tB)X_0$. Si l'on pose $Y = P^{-1}X$ celui-ci vérifie $Y' = TY$ et donc $Y(t) = \exp(tT)Y_0$ et $X(t) = P\exp(tT)Y_0$. Ainsi

$$X(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & 2t - \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y_0 = e^t \begin{pmatrix} 1 & t+2 & -\frac{t^2}{2} \\ 1 & t+1 & -\frac{t^2}{2} + t \\ 1 & t & -\frac{t^2}{2} + 2t + 1 \end{pmatrix} Y_0$$