<u>***Série n***</u>

Série n^o 1

Révisions d'Algèbre linéaire

Exercice 1. Soit E l'ensemble des polynômes de degre inferieur ou egal a deux et a coe -cients reels. Montrer que E, muni de la multiplication par un reel et de l'addition usuelle des polynômes, est un espace vectoriel.

1. L'ensemble F des applications a nes et l'ensemble G des polynômes tels que $P(1) = 1$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?
2. Soient f, g, h les applications

$$\begin{array}{rcl} f : E & \to & E \\ P & \mapsto & P' \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : F & \to & E \\ P(x) & \mapsto & (x+1)P(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} h : F & \to & E \\ P & \mapsto & P^2. \end{array}$$

   Ces applications sont-elles lineaires ? Si oui, quel est leur noyau ? Leur image ?
3. Veri er que $B_E = (1, x, x^2)$ est une base de E, et a partir de ces vecteurs constituer une base B_F de F. Ecrire les matrices A et B representant respectivement f et g dans les bases B_E et B_F.
4. Calculer l'application $f \quad g$ et veri er que la matrice C de $f \quad g$ dans les bases B_E et B_F est bien $C = AB$.
5. Soit D l'ensemble des polynômes de degre inferieur ou egal a trois. Donner une base de D. On considere l'application

$$\begin{array}{rcl} i : D & \to & E \\ P(x) & \mapsto & (x \quad 2)P''(x). \end{array}$$

   Determiner la dimension de son noyau $\ker(i)$ et la dimension de son image $\mathrm{im}(i)$.

Exercice 2. Soient A et B deux matrices semblables, c'est{a{dire telles qu'il existe P inversible veri ant

$$A = PBP^{-1}.$$

1. Montrer que si l'une des deux matrices A ou B est inversible, alors l'autre aussi.
2. Montrer que si l'une des deux matrices A ou B est nilpotente (il existe un entier n tel que $A^n = 0$), alors l'autre aussi.
3. Montrer que si $B = \lambda I$, alors $A = B$.

Exercice 3. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On de nit

$$f_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad f_2 = e_1 + e_2 \quad 2e_3 \quad \text{et} \quad f_3 = e_1 \quad e_3.$$

1. Veri er que (f_1, f_2, f_3) constituent une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ 1134111131111133333111431132141134334331131123134113133113223131122311411333111131133