

Contrôle de connaissance
du 3 décembre 2010 (Durée 3 h)
Documents autorisés : notes de cours/TD

La première partie

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie comme

$$f(x) := \begin{cases} \exp(x^2) + \exp(-x^{-2}) & \text{si } x \neq 0; \\ 1 & \text{si } x = 0; \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .
2. Déterminer la série de Taylor $S(f)$ de f en $x = 0$.
3. Déterminer le rayon de convergence R de $S(f)$.
4. Déterminer la limite de la série $S(f)$ sur $] -R; R[$.

La deuxième partie

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes. Pour tout entier $n \geq 1$, soit A_n la matrice de taille $(n+1) \times (n+1)$ de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \end{pmatrix}$$

On désigne par A_0 la matrice $(-a_0)$ qui est de taille 1×1 .

5. Pour tout entier $n \geq 0$, calculer le déterminant de la matrice A_n .

Pour tout entier $n \geq 0$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, soit

$$D_n(\lambda) = \det(\lambda I_{n+1} - A_n);$$

où I_{n+1} est la matrice d'identité de taille $(n+1) \times (n+1)$.

6. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $D_n(\lambda) = \lambda D_{n-1}(\lambda) + a_n$.
7. Exprimer $D_n(\lambda)$ en fonction de λ et a_0, \dots, a_n .
8. Soient λ une valeur propre de A_n et (z_0, \dots, z_n) un vecteur propre (non-nul!) de A_n associé à la valeur propre λ . Montrer que $z_0 \neq 0$ puis exprimer la valeur de z_k ($1 \leq k \leq n$) en fonction de z_0 et λ .
9. En déduire que tout espace propre de A_n est de rang 1.
10. Déterminer le polynôme minimal de A_n .

TSVP

La troisième partie

Dans cette partie, on fixe un entier $n \geq 1$. On étudie l'équation différentielle suivante :

$$y^{(n+1)}(t) + a_0 y^{(n)}(t) + \cdots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}): \quad (*)$$

Soit V_n l'ensemble des fonctions y définies sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{C} qui vérifient l'équation (*).

11. Montrer que l'espace V_n est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, l'espace vectoriel (sur \mathbb{C}) des fonctions de classe C^∞ sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{C} .
12. Pour tout $y \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, soit $\underline{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ l'application qui envoie $t \in \mathbb{R}$ en $(y(t); y'(t); \dots; y^{(n)}(t))$. Montrer que y est une solution de (*) si et seulement si \underline{y} vérifie l'équation différentielle $\underline{y}'(t) = A_n \underline{y}(t)$.
13. On suppose que la fonction D_n introduite dans la deuxième partie admet $n+1$ racines distinctes $\lambda_0; \dots; \lambda_n$. Montrer que la famille de fonctions $(\exp(\lambda_k t))_{k=0}^n$ est une base de V_n .
14. Application : Déterminer l'espace des solutions de l'équation différentielle

$$y''(t) + y(t) = 0:$$

Déterminer toutes les fonctions définies sur \mathbb{R} et à valeurs réelles qui vérifient cette équation différentielle.

La quatrième partie

On désigne par \mathcal{S} l'espace vectoriel (sur \mathbb{C}) des suites complexes indexées par \mathbb{N} . Comme dans la partie précédente, on fixe un entier $n \geq 1$. On désigne par W_n le sous-ensemble des suites $(z_k)_{k \geq 0} \in \mathcal{S}$ telles que

$$z_{k+n+1} + a_0 z_{k+n} + \cdots + a_{n-1} z_{k+1} + a_n z_k = 0 \quad (k \geq 0)$$

15. Montrer que W_n est un sous-espace vectoriel de \mathcal{S} .
16. On suppose que le polynôme $P_n(X) := X^{n+1} + a_0 X^n + \cdots + a_{n-1} X + a_n$ admet $n+1$ racines complexes distinctes $\lambda_0; \dots; \lambda_n$. Montrer que les suites

$$\left(\binom{k}{0} \lambda_0^k \right)_{k \geq 0}; \dots; \left(\binom{k}{n} \lambda_n^k \right)_{k \geq 0}$$

forment une base de W_n sur \mathbb{C} . On peut introduire l'application linéaire $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ qui envoie $(z_0; z_1; z_2; \dots)$ en $(z_1; z_2; z_3; \dots)$.

17. Application : déterminer le terme général de la suite de Fibonacci :

$$F_0 = 0; F_1 = 1; F_{k+2} = F_{k+1} + F_k \quad (k \geq 0):$$

18. Déterminer le rayon de convergence r de la série entière

$$S = \sum_{k \geq 0} F_k z^k \quad (z \in \mathbb{C}):$$

19. Déterminer la somme de la série S sur $] -r; r[$.
20. Que peut-on dire sur W_n lorsque le polynôme P_n admet des racines multiples ?