

Huayi Chen

**POLYCOPIÉ DU COURS L2MI3
ANALYSE ET ALGÈBRE
FONDAMENTALES**

Huayi Chen

Universite Paris Diderot, Institut de Mathematiques de Jussieu.

E-mail : `chenhuayi@math.jussieu.fr`

CHAPITRE 2

SÉRIES DE FONCTIONS

2.1. Fonctions continues

Définition 2.1.1. | Soit X un ensemble. Soit \mathcal{T} une famille de sous-ensembles de X . On dit que \mathcal{T} est une *topologie* sur X si elle vérifie les conditions suivantes :

- 1) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$,
- 2) pour toute famille (non-nécessairement finie) $(U_i)_{i \in I}$ d'éléments de \mathcal{T} , on a $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$,
- 3) l'intersection de deux éléments arbitraires de \mathcal{T} reste dans \mathcal{T} .

Le couple (X, \mathcal{T}) s'appelle un *espace topologique*. Les sous-ensembles de X dans \mathcal{T} sont appelés des *ouverts* de X (par rapport à la topologie \mathcal{T}). Si F est un sous-ensemble de X dont le complémentaire F^c est dans \mathcal{T} , on dit que F est un *fermé* de X (par rapport à la topologie \mathcal{T}).

Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique tel que X est non-vidé. Soient x un point de X et A un sous-ensemble de X contenant x . On dit que A est un *voisinage* de x s'il existe un ouvert U tel que $x \in U \subset A$. En particulier, tout ouvert de X contenant x est un voisinage de x . Un tel voisinage est appelé un *voisinage ouvert* de x .

Proposition 2.1.2. | Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique. Un sous-ensemble U de X est ouvert si et seulement s'il est un voisinage de tout point dans U .

Démonstration. | La nécessité est immédiate par définition. Montrons la suffisance. Pour tout $x \in U$, il existe un ouvert U_x de X tel que $x \in U_x \subset U$. D'où

$$U = \bigcup_{x \in U} U_x$$

est un ouvert de X (on utilise le deuxième axiome de topologie). □

Soit X un ensemble non-vidé. Soit

$$d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty[$$

une application. On dit que d est une metrique sur X si elle veri e les conditions suivantes :

- 1) (symetrie) $\forall (x, y) \in X \times X, d(x, y) = d(y, x),$
- 2) (inegalite triangulaire) $\forall (x, y, z) \in X \times X \times X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),$
- 3) (separation) $\forall (x, y) \in X \times X, d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y.$

Le couple (X, d) s'appelle un *espace métrique*.

Etant donne un espace metrique (X, d) , la metrique d induit une topologie \mathcal{T}_d sur X : un sous-ensemble U de X est ouvert si et seulement si

$$(2.1) \quad \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } B^\circ(x; \varepsilon) \subset U,$$

ou $B^\circ(x; \varepsilon) := \{y \in X \mid d(y, x) < \varepsilon\}$ est la boule ouverte centree en x et de rayon ε . Montrons que la famille \mathcal{T}_d des sous-ensemble U veri ant (2.1) est une topologie sur X

Démonstration. | D'abord l'ensemble vide est lui-même une boule ouverte de rayon 0. Soit U un ouvert non-vide de X . Pour tout $x \in U$, il existe un nombre $\varepsilon_x > 0$ tel que $B^\circ(x; \varepsilon_x) \subset U$. On a alors

$$U = \bigcup_{x \in U} B^\circ(x, \varepsilon_x).$$

□

Etant donné un espace topologique (X, \mathcal{T}) dont l'ensemble sous-jacent est non-vide. Il est possible de discuter la convergence d'une suite dans X .

Définition 2.1.5. | Soit (X, \mathcal{T}) un espace topologique ou X est non-vide. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \geq n_0}$ d'éléments de X est *convergente* s'il existe un point $x \in X$ tel que, pour tout voisinage ouvert U de x , il existe un entier $N \geq n_0$ tel que $x_n \in U$ quel que soit $n \geq N$. Le point x est appelé une *limite* de la suite $(x_n)_{n \geq n_0}$. On dit aussi que la suite $(x_n)_{n \geq n_0}$ converge vers x .

Dans le cas d'un espace métrique (en particulier le cas de \mathbb{R} ou \mathbb{C}), la convergence d'une suite revient à une condition similaire à (1.2).

Proposition 2.1.6. | Soit (X, d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_{n \geq n_0}$ dans X est convergente si et seulement s'il existe $x \in X$ qui vérifie la condition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq n_0, \forall n \geq N, d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Démonstration. | " \Rightarrow " : Pour tout ε , la boule ouverte $B^\circ(x; \varepsilon)$ est un voisinage ouvert de x . Il existe donc $N \geq n_0$ tel que $x_n \in B^\circ(x; \varepsilon)$, i.e. $d(x_n, x) < \varepsilon$, quel que soit $n \geq N$.

" \Leftarrow " : Soit U un voisinage ouvert de x . Par définition, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $B^\circ(x; \varepsilon) \subset U$. Il existe alors $N \geq n_0$ tel que $d(x_n, x) < \varepsilon$, i.e., $x_n \in B^\circ(x; \varepsilon) \subset U$ quel que soit $n \geq N$. □

Remarque 2.1.7. | Il n'est pas vrai en général que la limite d'une suite convergente dans un espace topologique est unique. Considérons l'espace topologique (X, \mathcal{T}) où X est un ensemble à deux éléments x et y , et $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Considérons la suite constante $(x_n)_{n \geq 1}$ telle que $x_n = x$ quel que soit n . Cette suite converge évidemment vers x . En même temps, elle converge aussi vers y . En effet, le seul voisinage ouvert de y est l'espace X , qui contient toute la suite $(x_n)_{n \geq 1}$.

L'unicité de limite d'une suite est vérifiée lorsque l'espace topologique est *séparé*. Autrement dit, pour tout couple de points (x, y) dans l'espace topologique tel que $x \neq y$, il existe des voisinages ouverts de x et de y respectivement dont l'intersection est vide. Notamment tout espace métrique est séparé.

Définition 2.1.8. | Soient (X, \mathcal{T}) et (X', \mathcal{T}') deux espaces topologiques, $f : X \rightarrow X'$ une application. On dit que l'application f est *continue* en $x \in X$ si l'image

reciproque par f de tout voisinage de $f(x)$ est un voisinage de x . On dit que l'application f est *continue* si elle est continue en tout point de X .

Proposition 2.1.9. | Soient (X, \mathcal{T}) et (X', \mathcal{T}') deux espaces topologiques, $f : X \rightarrow X'$ une application. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) l'application f est continue,
- 2) l'image réciproque de tout ouvert de X' par f est un ouvert de X ,
- 3) l'image réciproque de tout fermé de X' par f est un fermé de X .

Démonstration. | $\backslash 1) \Rightarrow 2)$ ": Soient V un ouvert de X' , $U = f^{-1}(V)$. Pour tout $x \in U$, on a $f(x) \in V$. Donc V est un voisinage de $f(x)$. D'où $U = f^{-1}(V)$ est un voisinage de x . Donc U est un voisinage de tout point dans U . L'ensemble U est alors un ouvert de X (voir la proposition 2.1.2).

$\backslash 2) \Rightarrow 3)$ ": Si F est un fermé de X' , alors son complémentaire F^c est un ouvert de X' . Donc $f^{-1}(F^c) = f^{-1}(F)^c$ est un ouvert de X et $f^{-1}(F)$ est un fermé.

$\backslash 3) \Rightarrow 1)$ ": Soit $x \in X$. Montrons que f est continue en x . Soient V un voisinage de $f(x)$ et $U = f^{-1}(V)$. Quitte à remplacer V par un sous-ensemble ouvert contenant $f(x)$ on peut supposer que V est lui-même un ouvert. Dans ce cas-là V^c est un fermé de X' . D'où $U^c = f^{-1}(V^c)$ est un fermé de X et U est un ouvert de X . \square

Proposition 2.1.10. | Soient (X, \mathcal{T}) et (X', \mathcal{T}') deux espaces topologiques, et $f : X \rightarrow X'$ une application. Si l'application est continue en $x \in X$ et si $(x_n)_{n \geq n_0}$ est une suite dans X qui converge vers x , alors la suite $(f(x_n))_{n \geq n_0}$ converge vers $f(x)$.

Démonstration. | Soient V un voisinage de $f(x)$ et $U = f^{-1}(V)$. Par définition U est un voisinage de x . Donc il existe $N \geq n_0$ tel que $x_n \in U$ quel que soit $n \geq N$. D'où $f(x_n) \in V$ pour tout $n \geq N$. Comme V est arbitraire, on obtient que la suite $(f(x_n))_{n \geq n_0}$ converge vers $f(x)$. \square

La reciproque de la proposition 2.1.10 n'est pas vraie en general. C'est vraie lorsque l'espace topologique (X, \mathcal{T}) a une base de voisinage dénombrable en x .

Proposition 2.1.11. | Soient (X, \mathcal{T}) et (X', \mathcal{T}') deux espaces topologiques, $f : X \rightarrow X'$ une application et $x \in X$. On suppose qu'il existe une famille dénombrable $(U_i)_{i \geq 0}$ de voisinages de x telle que tout voisinage de x contient l'un des U_i (une telle famille est appelée une base de voisinages de x). Si, pour toute suite $(x_n)_{n \geq n_0}$ qui converge vers x , la suite $(f(x_n))_{n \geq n_0}$ converge vers $f(x)$, alors la fonction f est continue en x .

Démonstration. | D'abord l'intersection de deux voisinages de x est encore un voisinage de x . Donc la famille $(U'_i)_{i \geq 0}$ est aussi une base de voisinages de x , ou

$$U'_i = \bigcap_{j=0}^i U_j.$$

Quitte à remplacer $(U_i)_{i \geq 0}$ par $(U'_i)_{i \geq 0}$, on peut supposer que

$$U_0 \supset U_1 \supset \cdots \supset U_i \supset U_{i+1} \supset \cdots.$$

Si f n'est pas continue en x , alors il existe un voisinage V de $f(x)$ tel que $f^{-1}(V)$ n'est pas un voisinage de x . Autrement dit, pour tout $i \geq 0$, il existe $x_i \in U_i \setminus f^{-1}(V)$. Montrons que la suite $(x_i)_{i \geq 0}$ converge vers x . En effet, pour tout voisinage ouvert U de x , il existe un certain indice m tel que $U_m \subset U$. Donc pour $i \geq m$, on a $x_i \in U_i \subset U_m \subset U$. Par l'hypothèse de la proposition, la suite $(f(x_i))_{i \geq 0}$ converge vers $f(x)$. Donc il existe $N \geq 0$ tel que $f(x_n) \in V$ quel que soit $n \geq N$. C'est une contradiction car alors $x_n \in f^{-1}(V)$ quel que soit $n \geq N$. \square

Remarque 2.1.12. | Soit (X, d) un espace métrique. Tout point $x \in X$ admet une base de voisinage dénombrable qui consiste des boules ouvertes $B^\circ(x, 1/n)$ ($n \geq 1$).

2.2. Suite d'applications

Soient E un ensemble non-vide, (X, d) un espace métrique, et n_0 un entier. On appelle suite d'application de E vers X (dont l'indice initial est n_0) toute application de $\mathbb{Z} \cap [n_0, +\infty[$ vers $\text{App}(E, X)$, l'espace des applications de E vers X .

Définition 2.2.1. | Soient $(f_n)_{n \geq n_0}$ une suite d'applications de E vers X , et $f \in \text{App}(E, X)$. On dit que la suite $(f_n)_{n \geq n_0}$ converge simplement vers f si la suite $(f_n(\omega))_{n \geq n_0}$ converge (dans X) vers $f(\omega)$ quel que soit $\omega \in E$. On dit que la suite $(f_n)_{n \geq n_0}$ converge uniformément vers f si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq n_0 \text{ tel que, } \forall n \geq N, \sup_{\omega \in E} d(f_n(\omega), f(\omega)) < \varepsilon.$$

Théorème 2.2.2. | Soient (E, \mathcal{T}) un espace topologique et (X, d) un espace métrique. On considère une suite $(f_n)_{n \geq n_0}$ d'applications de E vers X qui converge uniformément vers une application f . Si toutes les fonctions f_n sont continues en un point $\omega_0 \in E$, alors il en est de même de f .

Démonstration. | Soit $x_0 = f(\omega_0)$. Montrons que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $f^{-1}(B^\circ(x_0, \varepsilon))$ est un voisinage de ω_0 . Comme la suite $(f_n)_{n \geq n_0}$ converge uniformément vers f , il existe $N \geq n_0$ tel que

$$\sup_{\omega \in E} d(f_n(\omega), f(\omega)) < \varepsilon/2$$

quel que soit $n \geq N$. Soit n un entier tel que $n \geq N$. On a

$$d(f_n(\omega_0), f(\omega_0)) = d(f_n(\omega_0), x_0) < \varepsilon/2.$$

Donc $B^\circ(x_0, \varepsilon/2)$ est un voisinage ouvert de $f_n(\omega_0)$. Comme l'application f_n est continue en ω_0 , l'ensemble $f_n^{-1}(B^\circ(x_0, \varepsilon/2))$ est un voisinage de ω_0 . En outre, si ω est un point dans $f_n^{-1}(B^\circ(x_0, \varepsilon/2))$, alors

$$d(f_n(\omega), x_0) < \varepsilon/2,$$

d'ou $d(f(\omega), x_0) \leq d(f(\omega), f_n(\omega)) + d(f_n(\omega), x_0) < \varepsilon$. Donc $\omega \in f^{-1}(B^\circ(x_0, \varepsilon))$. Cela montre que $f^{-1}(B^\circ(x_0, \varepsilon)) \supset f_n^{-1}(B^\circ(x_0, \varepsilon/2))$ et donc $f^{-1}(B^\circ(x_0, \varepsilon))$ est un voisinage de ω_0 . \square

Remarque 2.2.3. | L'enonce du theoreme precedent n'est pas vrai en general si la convergence de la suite d'application $(f_n)_{n \geq n_0}$ n'est pas uniforme. En e et, considerons la suite de fonctions continues $(x^n)_{n \geq 1}$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Elle converge vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1), \\ 1 & (x = 1). \end{cases}$$

La fonction limite n'est pas continue sur $[0, 1]$.

Theoreme 2.2.4. | Soient $I = [a, b]$ un intervalle fermé dans \mathbb{R} et $(f_n)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions (à valeurs réelles) définie sur I qui converge uniformément vers une fonction f . Si chaque fonction f_n ($n \geq n_0$) est intégrable, alors il en est de même de f . En outre, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

Démonstration. | Pour toute fonction g de nie sur I et toute partition $\quad : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de l'intervalle $[a, b]$, on designe par

$$S_\pm(\quad, g) := \sum_{1 \leq i \leq n} \sup_{\inf} \{g(t) \mid t_{i-1} \leq t \leq t_i\} (t_i - t_{i-1}).$$

Soient en outre

$$\int_I^\pm g(t) dt = \inf_{\sup} \{S_\pm(\quad, g) \mid \quad \text{est une partition de } I\}.$$

Rappelons que la fonction g est dite integrable sur I si et seulement si

$$\int_I^+ g(t) dt = \int_I^- g(t) dt \in \mathbb{R}.$$

Pour tout entier $n \geq n_0$, soit

$$\delta_n := \sup_{t \in I} |f_n(t) - f(t)|.$$

Pour tout sous-ensemble I_1 de I et tout entier $n \geq n_0$, on a

$$\left| \sup_{t \in I_1} f_n(t) - \sup_{t \in I_1} f(t) \right| \leq \delta_n, \quad \left| \inf_{t \in I_1} f_n(t) - \inf_{t \in I_1} f(t) \right| \leq \delta_n.$$

D'ou

$$\left| \int_I^+ f_n(t) dt - \int_I^+ f(t) dt \right| \leq \delta_n(b-a), \quad \left| \int_I^- f_n(t) dt - \int_I^- f(t) dt \right| \leq \delta_n(b-a).$$

On en deduit

$$\left| \int_I^+ f(t) dt - \int_I^- f(t) dt \right| \leq \delta_n(b-a).$$

Par passage à la limite quand $n \rightarrow \infty$, on obtient que la fonction f est intégrable. En n , la relation

$$\left| \int_I f_n(t) dt - \int_I^+ f(t) dt \right| \leq \delta_n(b-a)$$

montre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I f(t) dt.$$

□

Remarque 2.2.5. | L'énoncé du théorème précédent n'est pas vrai en général si la convergence de la suite d'application $(f_n)_{n \geq n_0}$ n'est pas uniforme. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres distincts telle que l'ensemble $\{u_n | n \geq 0\}$ s'identifie à $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Pour tout entier $n \geq 0$, soit

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{u_0, \dots, u_n\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est intégrable sur $[0, 1]$. La suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction limite n'est pas intégrable.

Théorème 2.2.6. | Soient $I = [a, b]$ ($a < b$) un intervalle fermé dans \mathbb{R} et $(f_n)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions réelles continues sur I . On suppose que,

- 1) il existe $t_0 \in [a, b]$ tel que $(f_n(t_0))_{n \geq n_0}$ converge;
- 2) pour tout entier $n \geq n_0$, la fonction f_n est dérivable sur $]a, b[$, et la suite $(f'_n)_{n \geq n_0}$ converge uniformément sur $]a, b[$ vers une fonction φ .

Alors la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers une fonction continue f sur I , qui est dérivable sur $]a, b[$, et telle que $f' = \varphi$ sur $]a, b[$.

Démonstration. | Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \geq n_0$ tel que

$$|f_n(t_0) - f_m(t_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \sup_{t \in]a, b[} |f'_n(t) - f'_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

quel que soient $n, m \geq N$. D'après le théorème des accroissements finis, on obtient que

$$|(f_n(t) - f_m(t)) - (f_n(t_0) - f_m(t_0))| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} |t - t_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

quel que soient $m, n \geq N$ et $t \in I$. D'où $\sup_{t \in I} |f_n(t) - f_m(t)| < \varepsilon$ quel que soient $n, m \geq N$. Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq n_0}$ converge vers une fonction f , qui est continue sur I d'après le théorème 2.2.2.

Montrons que la fonction f est derivable sur $]a, b[$ et que $f' = \varphi$. Soit t un element de $]a, b[$. Pour tout entier $n \geq n_0$, soit $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(t)}{x - t} & \text{si } x \neq t, \\ f'_n(t) & \text{si } x = t. \end{cases}$$

La fonction f_n est continue en t . En outre, d'apres le theoreme des accroissements finis, on a

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{\xi \in]a, b[} |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)|.$$

Donc la suite de fonction $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformement vers la fonction

$$f(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} & \text{si } x \neq t, \\ \varphi(t) & \text{si } x = t. \end{cases}$$

D'apres le theoreme 2.2.2, la fonction f est continue en t . Donc la fonction f est derivable en t et $f'(t) = \varphi(t)$. \square

2.3. Série de fonctions

Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vector norme sur K ($=\mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). On dit que $(V, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach s'il est complet pour la metrique induite par $\|\cdot\|$, c'est-a-dire que toute suite de Cauchy est convergente dans V .

Définition 2.3.1. | Soient E un ensemble non-vide, $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, et n_0 un entier. Etant donnee une suite $(f_n)_{n \geq n_0}$ d'applications

a valeurs dans \mathbb{C} . Pour tout nombre $r \in]0, 1[$, la serie converge normalement sur $\overline{B}(0, r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\} \subset \mathbb{C}$. En effet, on a

$$\sum_{n \geq 0} \sup_{|z| \leq r} |z^n| \leq \sum_{n \geq 0} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Théorème 2.3.3. | Soit $\sum_{n \geq n_0} f_n$ une série de fonctions sur X à valeurs dans un espace de Banach $(V, \|\cdot\|)$ qui converge normalement, alors elle converge uniformément vers une fonction $f : X \rightarrow V$. En particulier, si X est un espace topologique et si chaque application f_n est continue en $\omega \in X$, alors la fonction limite f est aussi continue en ω .

Démonstration. | Pour tout entier $n \geq n_0$, soit $F_n = \sum_{k=n_0}^n f_k$. On a

$$(2.2) \quad \|F_n(\omega) - F_{n+m}(\omega)\| \leq \sum_{n < k \leq n+m} \|f_k(\omega)\|.$$

Comme la serie de fonctions converge normalement, on obtient que $(F_n(\omega))_{n \geq n_0}$ est une suite de Cauchy dans V , qui converge vers un element de V que l'on notera $F(\omega)$. Par passage a la limite dans la formule (2.2) quand m tend vers l'infini, on obtient

$$\|F_n(\omega) - F(\omega)\| \leq \sum_{k > n} \|f_k(\omega)\|,$$

d'où

$$\sup_{\omega \in X} \|F_n(\omega) - F(\omega)\| \leq \sum_{k > n} \sup_{\omega \in X} \|f_k(\omega)\|.$$

On obtient donc que la suite $(F_n)_{n \geq n_0}$ converge uniformément vers F . \square

Les resultats suivants sont des consequences immediates du theoreme 2.3.3 et des theoremes 2.2.4 et 2.2.6.

Corollaire 2.3.4. | Soient $I = [a, b]$ un intervalle fermé dans \mathbb{R} et $\sum_{n \geq n_0} f_n$ une suite de fonctions continues (à valeurs réelles) définie sur I qui converge normalement. Alors on a

$$\sum_{n \geq n_0} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \sum_{n \geq n_0} f_n(t) dt.$$

Corollaire 2.3.5. | Soient $I = [a, b]$ un intervalle fermé dans \mathbb{R} et $(f_n)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions réelles de classe C^1 sur I . On suppose que,

- 1) il existe $t_0 \in [a, b]$ tel que $\sum_{n \geq n_0} f_n(t_0)$ converge dans \mathbb{R} ,
- 2) la série $\sum_{n \geq n_0} f'_n$ converge normalement sur I .

Alors la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement vers une fonction de classe C^1 sur I , et on a

$$\sum_{n \geq n_0} f'_n = \left(\sum_{n \geq n_0} f_n \right)'.$$

2.4. Série entière

Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach sur K . On appelle *série entière* (à coefficients dans V) toute série de fonctions de K vers V de la forme

$$(2.3) \quad \sum_{n \geq 0} z^n v_n, \quad (z \in K, v_n \in V).$$

Soit S une série entière de la forme (2.3). On désigne par $A(S)$ l'ensemble des $r \in \mathbb{R}_+$ tels que la série numérique

$$\sum_{n \geq 0} r^n \|v_n\|$$

converge. On désigne par $B(S)$ l'ensemble des $r \in \mathbb{R}_+$ tels que la suite $(r^n \|v_n\|)_{n \geq 0}$ soit bornée. Par définition, il est facile de voir que les ensembles $A(S)$ et $B(S)$ sont des intervalles ou l'extrémité à gauche est 0.

Proposition 2.4.1. | Soit S une série entière de la forme

$$\sum_{n \geq 0} z^n v_n, \quad (z \in K, v_n \in V).$$

On a $\sup A(S) = \sup B(S)$ dans $[0, +\infty]$.

Démonstration. | Si $r \geq 0$ est tel que la série

$$\sum_{n \geq 0} r^n \|v_n\|$$

converge, alors la suite $(r^n \|v_n\|)_{n \geq 0}$ converge vers zéro, donc est nécessairement bornée. On en déduit donc $A(S) \subset B(S)$. Il suffit alors montrer que tout majorant de $A(S)$ est également un majorant de $B(S)$.

Soit R un majorant de $A(S)$. Si r est un élément de $B(S)$, alors pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, la série

$$\sum_{n \geq 0} r^n \|v_n\| (1 - \varepsilon)^n$$

est convergente. Par conséquent, $r(1 - \varepsilon) \in A(S)$ et donc $r(1 - \varepsilon) \leq R$. Comme ε est arbitraire, on obtient $r \leq R$. \square

Définition 2.4.2. | Soient $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et S une série entière à coefficients dans V . On appelle le *rayon de convergence* de S la borne supérieure de l'ensemble $A(S)$ (qui est égale à la borne supérieure de l'ensemble $B(S)$, d'après la proposition 2.4.1), note $R(S)$.

Proposition 2.4.3. | Soient $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et S une série entière à coefficients dans V , dont le rayon de convergence $R(S)$ est strictement positif. Alors la série de fonction S converge simplement sur $B^\circ(0; R(S))$ vers une fonction continue. En outre, cette convergence est normale, donc uniforme sur toute boule fermée $\overline{B}(0; r) = \{z \in K \mid |z| \leq r\}$ pour $0 < r < R(S)$.

Corollaire 2.4.5. | Soient $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach sur K et S une série entière à coefficients dans V de la forme

$$\sum_{n \geq 0} z^n v_n, \quad (z \in K, v_n \in V \setminus \{0\}).$$

Si la suite $(\|v_n\|/\|v_{n+1}\|)_{n \geq 0}$ converge vers un nombre $\ell \in [0, +\infty]$, alors le rayon de convergence de S est ℓ .

Démonstration. | La condition du corollaire montre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|^{1/n} = \ell^{-1}.$$

□

2.5. Opérations sur les séries entières

Dans ce paragraphe, on discute les opérations algébriques sur les séries entières.

2.5.1. Addition, dérivation et intégration. — Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach sur K . On désigne par $\text{SE}(V)$ l'espace des séries entières à coefficients dans V . Si

$$\sum_{n \geq 0} z^n v_n \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} z^n v'_n$$

sont deux séries entières dans $\text{SE}(V)$, on définit leur somme comme la série entière

$$\sum_{n \geq 0} z^n v_n + \sum_{n \geq 0} z^n v'_n := \sum_{n \geq 0} z^n (v_n + v'_n).$$

Si λ est un élément dans K et si S est une série entière dans $\text{SE}(V)$ qui est de la forme

$$\sum_{n \geq 0} z^n v_n,$$

on désigne par λS la série entière

$$\sum_{n \geq 0} z^n (\lambda v_n).$$

Il s'avère que l'espace $\text{SE}(V)$, muni de ces deux lois de composition, est un espace vectoriel sur K .

Proposition 2.5.1. | Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Pour toutes séries S et S' dans $\text{SE}(V)$, on a

$$(2.4) \quad R(S + S') \geq \min(R(S), R(S')).$$

Pour toute série $S \in \text{SE}(V)$ et tout $\lambda \in K^\times$, on a $R(\lambda S) = R(S)$.

Démonstration. | Supposons que les series S et S' sont respectivement de la forme

$$\sum_{n \geq 0} z^n v_n \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} z^n v'_n.$$

Pour tout nombre $r \geq 0$ tel que les suites $(r^n \|v_n\|)_{n \geq 0}$ et $(r^n \|v'_n\|)_{n \geq 0}$ sont bornées, alors la suite $(r^n \|v_n + v'_n\|)_{n \geq 0}$ est également bornée puisque

$$\|v_n + v'_n\| \leq \|v_n\| + \|v'_n\|.$$

On obtient donc (2.4).

Soit S une serie de la forme

$$\sum_{n \geq 0} z^n v_n.$$

On a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\lambda v_n\|^{1=n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^{1=n} \right) \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|^{1=n} \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|^{1=n}.$$

D'où $R(\lambda S) = R(S)$. □

Soit S une serie entiere de la forme

$$\sum_{n \geq 0} z^n v_n.$$

On designe par $D(S)$ la serie

$$\sum_{n \geq 1} z^{n-1} (n v_n),$$

appelee la *dérivée* de S . On designe par $I(S)$ la serie

$$\sum_{n \geq 0} z^{n+1} ((n+1)^{-1} v_n),$$

appelee l'*intégrale* de S .

Proposition 2.5.2. | Pour toute série $S \in \text{SE}(V)$, on a

$$(2.5) \quad R(D(S)) = R(I(S)) = R(S).$$

Démonstration. | On a

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|n v_n\|^{1=(n-1)} &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1=(n-1)} \right) \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|^{1=(n-1)} \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|^{1=(n-1)} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|^{1=n}. \end{aligned}$$

De facon similaire, on a

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|(n+1)^{-1} v_n\|^{1=(n+1)} &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)^{-1=(n+1)} \right) \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|^{1=(n+1)} \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|^{1=(n+1)} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|^{1=n}. \end{aligned}$$

On obtient donc (2.5). □

2.5.2. Multiplication. — Si

$$\sum_{n \geq 0} z^n a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} z^n b_n$$

sont deux series entieres dans $\text{SE}(K)$, on definit leur produit comme la serie entiere

$$\left(\sum_{n \geq 0} z^n a_n \right) \left(\sum_{n \geq 0} z^n b_n \right) := \sum_{n \geq 0} z^n \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Proposition 2.5.3. | Soient S et S' deux series entieres dans $\text{SE}(K)$. On a

$$(2.6) \quad R(SS') \geq \min(R(S), R(S')).$$

Démonstration. | Si $r \geq 0$ est un nombre reel tel que les series $\sum_{n \geq 0} |a_n| r^n$ et $\sum_{n \geq 0} |b_n| r^n$ soient convergentes, alors la serie numerique

$$\sum_{n \geq 0} r^n \sum_{k=0}^n |a_k b_{n-k}|$$

est egalement convergente (voir le corollaire 1.5.3). Par consequent, la serie

$$\sum_{n \geq 0} r^n \left| \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right|$$

est convergente. D'ou (2.6). □

2.5.3. Translation. — Soient a un element de K et $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach sur K . On appelle serie entiere translatee en a (a coefficients dans V) toute serie de fonction de la forme

$$(2.7) \quad \sum_{n \geq 0} (z - a)^n v_n, \quad (z \in K, v_n \in V).$$

L'espace des series entieres translatees en a est note $\text{SE}(a; V)$. C'est un espace vectoriel sur K . En outre, l'application $T_a : \text{SE}(V) \rightarrow \text{SE}(a; V)$, qui envoie $\sum_{n \geq 0} z^n v_n$ en $\sum_{n \geq 0} (z - a)^n v_n$, est une application K -lineaire bijective.

Soit S une serie dans $\text{SE}(a; V)$. On appelle *rayon de convergence* de S le nombre $R(T_a^{-1}(S))$, note aussi $R(S)$. C'est le rayon de convergence de la serie entiere dont la translatee en a coincide avec S . Il s'avere que la serie S converge simplement vers une fonction continue sur $B^\circ(a; R(S))$ et cette convergence est normale sur toute boule centree en a et de rayon $< R(S)$.

Les operations sur $\text{SE}(V)$ que nous avons vues plus haut se generalisent naturellement sur l'espace des series entieres translatees. Notamment, pour toutes series

$S = \sum_{n \geq 0} (z - a)^n v_n$ et $S' = \sum_{n \geq 0} (z - a)^n v'_n$ dans $\text{SE}(a; V)$, et $\lambda \in K$, on de nit

$$(2.8) \quad S + S' := \sum_{n \geq 0} (z - a)^n (v_n + v'_n),$$

$$(2.9) \quad \lambda S := \sum_{n \geq 0} (z - a)^n (\lambda v_n),$$

$$(2.10) \quad D(S) := \sum_{n \geq 1} (z - a)^{n-1} (n v_n),$$

$$(2.11) \quad I(S) := \sum_{n \geq 0} (z - a)^{n+1} ((n+1)^{-1} v_n).$$

En outre, si $S = \sum_{n \geq 0} a_n (z - a)^n$ et $S' = \sum_{n \geq 0} b_n (z - a)^n$ sont deux series entieres dans $\text{SE}(a; K)$, on de nit

$$SS' := \sum_{n \geq 0} (z - a)^n \sum_{0 \leq k \leq n} a_k b_{n-k}.$$

2.5.4. Comportement des fonctions limites. — Les resultats que nous avons obtenu dans le paragraphe §2.3 conduisent immediatement aux propositions suivantes.

Proposition 2.5.4. | Soient $(V, \|\cdot\|)$ un espace de Banach sur K et $a \in K$.

- 1) Si S et S' sont deux series entieres dans $\text{SE}(a; V)$, alors la serie $S + S'$ converge sur $B^\circ(a; \min(R(S), R(S')))$ vers une fonction continue, qui s'identifie à la somme des fonctions limites des series S et S' .
- 2) Si λ est un élément de K et si $S \in \text{SE}(a; V)$, alors la serie λS converge sur $B^\circ(a; \min(R(S), R(S')))$ vers la fonction limite de la serie S multipliée par λ .

Démonstration. | Ce sont des consequences immediates de la proposition 2.5.1 et du theoreme 2.3.3. \square

Proposition 2.5.5. | Soit a un nombre réel. Soit S une serie entiere dans $\text{SE}(a; \mathbb{R})$ dont le rayon de convergence est $R > 0$.

- 1) La serie S converge sur $]a - R, a + R[$ vers une fonction lisse f .
- 2) Pour tout entier $n \geq 1$, $f^{(n)}$ est la somme de la serie $D^n(S)$.
- 3) La serie $I(S)$ converge sur $]a - R, a - R[$ vers la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Démonstration. | Pour tout $r \in [0, R[$, les series S et $D(S)$ convergent normalement sur $] -r, r[$. En outre, $D(S)$ est obtenue en derivant la serie S terme a terme. D'apres le corollaire 2.3.5, on obtient que la serie S converge vers une fonction f qui est de classe C^1 et f' est egal a la limite de la serie $D(f)$. Comme $D(f)$ et f ont le même rayon de convergence, par recurrence on obtient 1) et 2). En n, 3) est une consequence du corollaire 2.3.4. \square

Proposition 2.5.6. | Soit a un élément de K . Soient S et S' deux séries entières dans $SE(a; K)$. Soit $R = \min(R(S), R(S'))$. La série SS' converge vers une fonction continue sur $B^\circ(a; R)$, qui s'identifie au produit des fonctions limites de S et de S' .

Démonstration. | C'est une conséquence immédiate du corollaire 1.5.3 et de la proposition 2.5.3. \square

2.6. Série de Taylor

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I . On suppose que f est de classe C^∞ dans un voisinage de $a \in I$. On appelle *série de Taylor* de f en a la série entière (dans $SE(a; \mathbb{R})$)

$$(2.12) \quad \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \quad (x \in \mathbb{R}).$$

On utilise l'expression

$$f \sim \sum_{n \geq 0} b_n (x - a)^n$$

pour désigner le fait que la série $\sum_{n \geq 0} b_n (x - a)^n$ est la série de Taylor de f en a .

La somme partielle

$$S_{f;n}(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} b_k (x - a)^k$$

est un polynôme de degré n . Il est caractérisé par la relation suivante:

$$(2.13) \quad f^{(k)}(a) = S_{f;n}^{(k)}(a) \text{ quel que soit } k \in \{0, \dots, n\}.$$

La proposition suivante résulte directement de la définition de série de Taylor.

Proposition 2.6.1. | Soient a un nombre réel et f une fonction de classe C^∞ dans un voisinage de a . Soit S la série de Taylor en a de la fonction f .

- 1) La série $D(S)$ est la série de Taylor en a de la fonction f' .
- 2) Soit F la fonction primitive de f qui vaut 0 en a . Alors $I(S)$ est la série de Taylor en a de la fonction F .

Voici une liste de series de Taylor de certaines fonctions avec leurs rayons de convergence R .

$$(2.14) \quad \exp(x) \sim \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}, \quad R = +\infty$$

$$(2.15) \quad \sin(x) \sim \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = +\infty,$$

$$(2.16) \quad \cos(x) \sim \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad R = +\infty,$$

$$(2.17) \quad \ln(1+x) \sim \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad R = 1,$$

$$(2.18) \quad \arctan(x) \sim \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad R = 1.$$

Proposition 2.6.2. | Soit a un nombre réel. Soient f et g deux fonctions de classe C^∞ dans un voisinage de a et λ un nombre réel dont les séries de Taylor en a de f et de g sont respectivement S_f et S_g . On a

$$f + g \sim S_f + S_g, \quad \lambda f \sim \lambda S_f, \quad fg \sim S_f S_g.$$

Démonstration. | Ces trois relations resultent respectivement des égalités suivantes:

$$\begin{aligned} (f+g)^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a), \\ (\lambda f)^{(n)}(a) &= \lambda f^{(n)}(a), \\ (fg)^{(n)}(a) &= \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a). \end{aligned}$$

□

Proposition 2.6.3. | Soient a et b deux nombres réels, P un polynôme tel que $P(a) = b$. Soit f une fonction de classe C^∞ et

$$\sum_{n \geq 0} a_n (x - b)^n$$

sa série de Taylor en b . Alors la série de Taylor en a de la fonction $f \circ P$ est

$$(2.19) \quad \sum_{n \geq 0} a_n (P(x) - b)^n.$$

Démonstration. | La fonction P étant lisse sur \mathbb{R} et envoyant a en b , f étant de classe C^∞ dans un voisinage de b la fonction composée $f \circ P$ est de classe C^∞ dans un voisinage de a .

Il suffit de montrer que, si on réécrit (2.19) en une série entière

$$\sum_{n \geq 0} c_n (x - a)^n \in \text{SE}(a; \mathbb{R}),$$

alors sa somme partielle d'indice n

$$S_n(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} c_k (x - a)^k$$

vérifie la relation

$$(2.20) \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad S_n^{(k)}(a) = (f \circ P)^{(k)}(a).$$

Soit

$$T_n(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k (x - b)^k.$$

Comme $P(x) - b$ est un polynôme divisible par $(x - a)$, on obtient que $T_n(P(x)) - S_n(x)$ est un polynôme divisible par $(x - a)^n$. Comme

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad T_n^{(k)}(b) = f^{(k)}(b),$$

on obtient (2.20) puisque $(f \circ P)^{(k)}(a)$ et $(T_n \circ P)^{(k)}$ s'écrivent comme le même polynôme (de plusieurs variables, qui ne dépend que de k) évalué en $f(b) = T_n(b), \dots, f^{(k)}(b) = T_n^{(k)}(b), P(a), \dots, P^{(k)}(a)$. \square

Exemple 2.6.4. | La série de Taylor en 0 de la fonction $f(x) = 1/(1 - x)$ est $\sum_{n \geq 1} x^n$. Par la proposition 2.6.3, on obtient que la série de Taylor en 0 de la fonction $f(x) = 1/(1 - x^3)$ est $\sum_{n \geq 0} x^{3n}$.

Etant donnée une fonction f de classe C^∞ dans un voisinage d'un nombre réel a , il est naturel de se demander si la série de Taylor en a de la fonction f converge vers la fonction f dans un voisinage convenable de a . Ce problème peut être décomposé en deux questions: d'abord, est-ce que la série de Taylor a un rayon de convergence strictement positif; ensuite, est-ce que la somme de la série coïncide avec f ? Il s'avère que aucune de ces deux questions n'a une réponse positive dans toute la généralité. Voici des contre-exemples.

Exemple 2.6.5. | Considérons la série de fonctions

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(n^2 x)}{e^n}$$

qui converge normalement vers une fonction f sur \mathbb{R} . Pour tout entier $k \geq 0$, la dérivée terme-a-terme d'ordre k de cette série est normalement convergente car son terme général est borné par $n^{2k} e^{-n}$. On en déduit que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} . En outre, pour tout entier impair k , on a

$$|f^{(k)}(0)| = \sum_{n \geq 1} e^{-n} n^{2k} \geq e^{-2k} (2k)^{2k}.$$

Donc, pour k pair

$$\left(\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!}\right)^{1=k} \geq \left(\frac{e^{-2k}(2k)^{2k}}{k^k}\right)^{1=k} = 4e^{-2k}.$$

On obtient donc

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!}\right)^{1=k} = +\infty,$$

d'où la série de Taylor en 0 de f a pour rayon de convergence 0.

Exemple 2.6.6. | Considerons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. En outre, pour tout $n \geq 0$, il existe un polynôme P_n tel que

$$f^{(n)}(x) = P_n(1/x) \exp(-1/x^2)$$

sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. D'où on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0.$$

Par récurrence on obtient que la fonction est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et que $f^{(n)}(0) = 0$ quel que soit $n \geq 0$. Par conséquent, la série de Taylor en 0 de la fonction f est la série nulle, qui admet pour rayon de convergence $+\infty$. Mais la fonction f est non-nul sauf en 0. Donc sa série de Taylor ne converge en aucun point de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ vers f .

D'après le théorème de Taylor-Lagrange, on obtient un critère de convergence pour la série de Taylor d'une fonction.

Théorème 2.6.7. | Soient a un nombre réel et f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle $]a - R, a + R[$, où $R \in [0, +\infty]$. Soit S la série de Taylor en a de f . Si, pour $r \in [0, R]$, la suite

$$\sup_{x \in [a-r, a+r]} |f^{(n)}(x)| \frac{r^n}{n!} \quad (n \geq 1)$$

est bornée, alors la série S converge sur $]a - R, a + R[$ vers f , et la convergence est uniforme sur tout intervalle fermé et borné contenu dans $]a - R, a + R[$.

Démonstration. | Supposons que la série S est de la forme

$$\sum_{n \geq 0} a_n (x - a)^n,$$

ou $a_n = f^{(n)}(a)/n!$. On obtient de la condition du théorème que le rayon de convergence de la série S est supérieur ou égal à R . Donc la série S converge simplement sur $]a - R, a + R[$, et la convergence est uniforme sur tout intervalle fermé et borné contenu dans $]a - R, a + R[$.

Pour tout entier $n \geq 0$, soit S_n la somme partielle

$$S_n(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k (x - a)^k.$$

D'après le theoreme de Taylor-Lagrange, on obtient

$$f(x) - S_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(a + \theta_x(x - a))}{n!} (x - a)^n,$$

ou θ_x est un nombre dans $[0, 1]$. Soit $r \in [0, R]$ tel que $r > r_x := |x - a|$. On a

$$|f(x) - S_{n-1}(x)| \leq \sup_{|y-a| \leq r} |f^{(n)}(y)| \frac{r^n}{n!} = \left(\sup_{|y-a| \leq r} |f^{(n)}(y)| \frac{r^n}{n!} \right) \left(\frac{r_x}{r} \right)^n,$$

qui tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$ puisque la suite

$$\sup_{y \in [a-r; a+r]} |f^{(n)}(y)| \frac{r^n}{n!} \quad (n \geq 1)$$

est bornée. On obtient alors

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x).$$

□

Voici quelques exemples.

$$(2.21) \quad \exp(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(2.22) \quad \sin(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(2.23) \quad \cos(x) \sim \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(2.24) \quad \ln(1+x) \sim \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in]-1, 1[,$$

$$(2.25) \quad \arctan(x) \sim \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in]-1, 1[.$$