EXAMEN MI3 - 18 JUIN 2012, DE 15H30 à 18H30

Tous documents et équipements électroniques (calculatrices, téléphones, etc) sont interdits.

Exercice 1. *Pour les suites u_n definies ci-dessous, determiner*

(1) *La nature de la serie $\sum u_n$.*
(2) *Le rayon de convergence de la serie entiere $\sum u_n x^n$.*
(3) *Le rayon de convergence des series entieres $\sum u_n n! x^n$, $\sum (u_n/n!) x^n$.*

$$u_n = \frac{(n+2)^4}{4^{n+2}} \qquad u_n = n^n(\sqrt{3n})^3 \qquad u_n = \frac{1}{n+(-1)^n \log n}$$

Exercice 2. *Calculer le determinant de la matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ -4 & 4 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. *On considere la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) *Trouver une matrice triangulaire superieure T et une matrice inversible P telles que $P^{-1}AP = T$.*
(2) *Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*
(3) *En deduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Exercice 4. *Montrer que les fonctions suivantes sont developpables en serie entiere en 0. Determiner leur developpement en serie entiere et les rayons de convergence correspondant.*

$$f(x) = \frac{2x^2+6x-47}{x^2+x-20} \qquad g(x) = \frac{2x^2-5x+1}{(x-1)^2(x+1)}$$

Exercice 5. *Montrer que la fonction suivante est definie, continue et derivable sur $\mathbb{R}^+$.*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{n+3}$$

Exercice 6. *Donner le developpement en serie entiere en 0 (incluant le rayon de convergence) des fonctions e^x et $\sin(x)$.*

Exercice 7. *Diagonaliser la matrice A suivante, c'est-a-dire determiner deux matrices P et D telles que D soit diagonale et $D = P^{-1}AP$.*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 32 & 17 & -16 \\ 44 & 22 & -21 \end{pmatrix}$$