Université Paris 7 — MI3
Algèbre et Analyse pour l'informatique — L2
TD groupe Inf2

Série n^o 6

Suites (rappels) et séries numériques

Exercice 1. Indiquer avec une brève justification si chacun des énoncés suivants est vrai pour deux suites de réels $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Si U est croissante et convergente, elle est majorée.
2. Si U est majorée et convergente, elle est croissante.
3. Si U est décroissante et positive, elle converge.
4. Si U est croissante et non majorée, elle diverge.
5. Si U et V sont divergentes, $U + V$ est divergente.
6. Si U est convergente et V divergente, $U + V$ est divergente.
7. Si U est convergente et V divergente, UV est divergente.
8. Si U tend vers 0, UV tend vers 0.

Exercice 2. Déterminer les limites quand $n \to +\infty$ des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$a_n = \frac{\sqrt{n}\sin(e^n - n^e)}{n+1} \quad \text{et} \quad b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Exercice 3. On considère les deux suites de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}.$$

1. Montrer que :
   (a) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante ;
   (b) la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante ;
   (c) pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq v_n$;
   (d) $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

   En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et de même limite. Cette limite est le nombre réel e.

Exercice 4. Discuter en fonction du paramètre $q > 0$ la nature de la série de terme général

$$\frac{q^n}{(1+q^n)^2}.$$

Exercice 5. Pour un nombre réel α, on écrit $\cos\alpha$ en utilisant la formule de Taylor :

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} - \ldots + (-1)^N \frac{\alpha^{2N}}{(2N)!} + R_N(\alpha)\ .$$

1. À l'aide d'une expression convenable du reste $R_N(\alpha)$, montrer qu'on a
$$\lim_{N \to +\infty} R_N(\alpha) = 0 \ .$$
2. En déduire que la série de terme général
$$(-1)^n \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}$$
est convergente et que sa somme est égale à $\cos \alpha$.
3. Application numérique : calcul de $\cos 1$ avec une erreur inférieure à 10^{-4}.

Exercice 6. Soit (u_n) une suite de nombres réels.

1. Montrer que, si la série de terme général u_n est ***absolument*** convergente, il en est de même pour la série de terme général u_n^2.
2. Donner l'exemple d'une suite (u_n) telle que la série de terme général u_n soit convergente mais pas la série de terme général u_n^2.

Exercice 7. Soit (u_n) une suite de réels positifs. Montrer que les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature, où
$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

Exercice 8. Étudier les séries (alternées) de termes généraux
$$u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n}} - 1 \quad , \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{n^{1+(1/n)}} \ .$$

Exercice 9. On pose
$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \ .$$

1. Montrer qu'on a $u_n \sim v_n \ (n \to +\infty)$, où v_n est le terme général d'une série convergente.
2. Considérer la série de terme général
$$u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \ ;$$
en déduire que la série de terme général u_n est divergente.

Quelle “morale” tirer de cet exercice ?

Exercice 10. Montrer que si la fonction g est continue positive et décroissante sur $]0, +\infty[$, alors on a :
$$\int_1^{n+1} g(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} g(k) \leq g(1) + \int_1^n g(x)dx.$$
En déduire le comportement de la suite définie par $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 11. Étudier la nature des séries dont voici le terme général :

1) $\frac{1}{n \log n}$	2) $\frac{1+\log n}{n^2}$	3) $\frac{2^n+5}{3^n-11}$
4) $n^{\ln(a)}$ $(a > 0)$	5) $e^{-\sqrt{n}}$	6) $n^2 \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$
7) $\frac{(n!)^3}{(3n)!}$	8) $\left(\frac{3n}{4n-1}\right)^{2n+1}$	9) $\frac{(n+1)^4}{n!+1}$
10) $\frac{1!+\cdots+(n-2)!}{n!}$	11) $n \cdot n^{\frac{1}{n}}$	12) $n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$ $(0 < x$ et $x \neq e)$
13) $1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)$	14) $n^2 e^{-\sqrt{n}}$	