Université Paris 7 MI3
Algèbre et Analyse pour l'informatique L2
TD groupe Inf2

Série n^o 4

Trigonalisation

Exercice 1. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant les deux propriétés suivantes :
– la seule valeur propre de f est 1,
– le sous-espace propre $P = E_1(f)$ est de dimension 2.

1. Soit u un vecteur quelconque de P. Que vaut $f(u)$?
2. Soit (u_1, u_2) une base de P et u_3 un vecteur de $\mathbb{R}^3$ n'appartenant pas à P.
   (a) Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Montrer que la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est de la forme
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \text{où } a,\ b,\ c \text{ sont des nombres réels.}$$
   (c) Exprimer le polynôme caractéristique de f à l'aide de c. En déduire que $c = 1$.
3. Montrer que l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.
4. Soit v_3 un vecteur n'appartenant pas à P. On pose $v_2 = f(v_3) - v_3$.
   (a) Montrer que le vecteur v_2 est non nul et appartient à P.
   (b) Montrer qu'il existe un vecteur $v_1 \in P$ tel que (v_1, v_2, v_3) soit une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Quelle est la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3) ?

Exercice 2. Soit $\alpha \in [0, 2\pi)$. On considère la matrice
$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 2 & -1 & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles A_α est trigonalisable en tant que matrice réelle.
2. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles A_α est trigonalisable en tant que matrice complexe.

Exercice 3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. Montrer que f est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
3. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f est triangulaire supérieure.
4. Calculer $(A - 2I_3)^2$. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. Soient a un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 3a \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 3a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f. Montrer que 1 est valeur propre de f.
2. On suppose que $a \neq 1$.
   (a) Montrer que f est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a > 1$.
   (b) Lorsque $a > 1$, l'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
3. On suppose que $a = 1$.
   (a) Trouver une base de chaque sous-espace propre.
   (b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
   (c) Trouver une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.
   (d) Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.