Université Paris Diderot
Département de Sciences Exactes

MI3/MA3 – Année 2009/10
L2 Info et Mass

Un corrigé du partiel du 30 octobre 2009 : (fonctions, séries numériques et séries de fonctions)

Exercice 1 On rappelle que e désigne la base du logarithme, c'est-à-dire le nombre tel que $\log e = 1$. Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

1. *Montrer que* $\lim u_n = e$.
   Observons que $\log u_n = n\log(1+\frac{1}{n}) = n\left(\frac{1}{n}+O(\frac{1}{n^2})\right) = 1+O(\frac{1}{n})$ donc $\lim\log u_n = 1$ et, puisque la fonction exponentielle est continue, $\lim u_n = e$.
2. *Montrer que la suite u_n est croissante et en déduire la majoration* $\big(1+$ ^{1}

La série est une série de Riemann convergente. La fonction $1/t^3$ est *décroissante* et on a donc pour $t \in [k-1, k]$ l'inégalité $1/t^3 \geqslant 1/k^3$ donc $\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^3} \geqslant 1/k^3$. On peut donc écrire

$$S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^3} = \int_{n}^{\infty} \frac{dt}{t^3} = \left[\frac{1}{2t^2}\right]_n^{\infty} = \frac{1}{2n^2}.$$

Exercice 4 *Déterminer le rayon de convergence des séries*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(n+1)!(2n)!} x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$$

Notons $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la première série, on a alors $a_{n+1}/a_n = \frac{(n+1)!^3 (n+1)!(2n)!}{(n+2)!(2n+2)!(n!)^3} = \frac{(n+1)^3}{(n+2)(2n+2)(2n+1)}$ a pour limite $\frac{1}{4}$; le rayon de convergence de la série est donc $R = 4$.

La seconde série est une série géométrique de raison $x^3/3$, en effet $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{3}\right)^n$; elle est donc convergente si et seulement si $|x^2/3| < 1$ donc si et seulement si $|x| < \sqrt{3}$, on peut conclure que le rayon de convergence de la série est donc $R = \sqrt{3}$.

Exercice 5 *On définit les fonctions de* $[0, +\infty)$ *vers* $\mathbb{R}$ *:*

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2} \qquad \text{et} \qquad g(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

1. *Montrer que la série* $\sum_{n \geqslant 0} f_n(x)$ *converge simplement sur* $[0, +\infty)$.
   Les fonctions $f_n(x)$ sont à valeurs positives. Comme $f_n(0) = 0$, la série converge trivialement (et a pour somme $S(0) = 0$). Si $x > 0$, on peut majorer $|f_n(x)| = f_n(x) \leqslant \frac{1}{xn^2}$; la série est donc majorée à une constante près par une série de Riemann convergente et est donc elle-même convergente.
2. *Montrer que la série* $\sum_{n \geqslant 0} f_n(x)$ *converge normalement sur* $[a, +\infty)$ *(pour tout* $a > 0$*).*
   Lorsque $x \in [a, +\infty)$ on peut écrire $|f_n(x)| = f_n(x) \leqslant \frac{1}{xn^2} \leqslant \frac{1}{an^2}$. Comme la série $\sum \frac{1}{an^2}$ est convergente, on obtient bien la convergence normale sur tout l'intervalle $[a, +\infty)$.
3. *En déduire que la fonction définie par la série* $S(x) := \sum_{n \geqslant 0} f_n(x)$ *est continue sur* $]0, +\infty)$.
   Une application directe du cours montre que la fonction $S(x)$ est continue sur $[a, +\infty)$ pour tout $a > 0$, puisqu'elle y est définie par une série normalement convergente de fonctions continues. La fonction $S(x)$ est donc continue sur $\cup_{a>0}[a, +\infty) =]0, +\infty)$.
4. *Montrer les inégalités*
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2x^2} \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$$
   La fonction $\frac{1}{1+x^2t^2}$ est *décroissante* (par rapport à t) donc
   $$\frac{1}{1+(k+1)^2x^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{1+t^2x^2} \leqslant \frac{1}{1+k^2x^2}.$$
   En sommant ces inégalités de $k = 0$ à l'infini, on obtient les inégalités annoncées :
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+(k+1)^2x^2} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2x^2} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$$
5. *Montrer que*
   $$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2x^2} = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} g(t)dt = \frac{\pi}{2x}.$$
   En déduire que, lorsque x *tend vers zéro, on a*
   $$\lim_{x \to 0} S(x) = \frac{\pi}{2},$$

et en particulier que $S(x)$ n'est pas continue en 0.
La changement de variable $u = tx$ (ici x est fixé et t est la variable) donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2x^2} = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{x}\left[\mathrm{Arctg}(u)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2x}.$$

Les inégalités précédentes, multipliées par $x > 0$ donnent

$$\frac{\pi}{2} \leqslant S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} \leqslant x + \frac{\pi}{2}.$$

On conclut bien que $\lim_{x\to 0} S(x) = \frac{\pi}{2}$, et que, comme $S(0) = 0$, la fonction S n'est pas continue en 0.

Remarque. Un théorème du cours affirme qu'une fonction définie par série normalement convergente de fonctions continues est elle-même continue ; on peut en conclure que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ ne converge pas normalement sur $[0, +\infty)$.