

Huayi Chen

---

**POLYCOPIÉ DU COURS L2MI3  
ANALYSE ET ALGÈBRE  
FONDAMENTALES**

---

*Huayi Chen*

Universite Paris Diderot, Institut de Mathematiques de Jussieu.

*E-mail* : `chenhuayi@math.jussieu.fr`

## CHAPITRE 1

### SÉRIES NUMÉRIQUES

#### 1.1. Notations et rappels

Dans ce note, l'expression  $K$  designe soit le corps  $\mathbb{R}$ , soit le corps  $\mathbb{C}$ .

Le corps  $\mathbb{R}$  est muni d'une relation d'ordre " $\leq$ ". Il est totalement ordonne par cette relation, autrement dit, pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$ , ou bien  $a \leq b$ , ou bien  $b \leq a$ .

Le corps  $K$  est muni d'une *valeur absolue* que l'on note  $|\cdot|$ . Lorsque  $K = \mathbb{R}$ , cette valeur absolue est compatible a la relation d'ordre

$$(1.1) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad |a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0, \\ -a, & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Lorsque  $K = \mathbb{C}$ , la valeur absolue  $|\cdot|$  est de nie comme

$$\forall a + ib \in \mathbb{C}, (a, b) \in \mathbb{R}^2, |a + ib| := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Elle prolonge la valeur absolue (1.1) sur  $\mathbb{R}$ .

**Espaces vectoriels.** — On appelle *espace vectoriel* sur  $K$  tout ensemble non-vide  $V$  muni d'une loi de composition interne (appelee la loi d'*addition*)

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & V \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$

et d'une loi de composition externe (appelee la *multiplication par un scalaire*)

$$\begin{array}{ccc} K \times V & \longrightarrow & V \\ (a, x) & \longmapsto & ax \end{array}$$

soumises aux conditions suivantes :

(1) la loi d'addition est commutative et associative :

$$\forall x, y, z \in V, \quad x + y = y + x, \quad x + (y + z) = (x + y) + z,$$

- (2) il existe un element neutre pour la loi d'addition (on verifie facilement que l'element neutre  $0$  est unique) :

$$\exists 0 \in V \text{ tel que } \forall x \in V, x + 0 = x,$$

- (3) tout element de  $V$  admet une inverse pour la loi d'addition (on verifie facilement que l'inverse d'un element est unique) :

$$\forall x \in V, \exists -x \in V \text{ tel que } x + (-x) = 0,$$

- (4) pour tous  $a, b \in K$  et tout  $x \in V$ ,  $(ab)x = a(bx)$ ,  $(a + b)x = ax + bx$ ,  
 (5) pour tout  $a \in K$  et tous  $x, y \in V$ ,  $a(x + y) = ax + ay$ ,  
 (6) pour tout  $x \in V$ ,  $1x = x$ .

Les premieres trois conditions signifient en fait que  $(V, +, 0)$  est un groupe commutatif.

**Exercice 1.1.1.** | Soit  $V$  un espace vectoriel sur  $K$ . Montrer que, pour tout  $x \in V$ , on a  $0x = 0$  et  $(-1)x = -x$ .

Soit  $V$  un espace vectoriel sur  $K$ . On appelle *sous-espace vectoriel* de  $V$  tout sous-ensemble non-vide de  $V$  qui est stable par les lois de compositions.

Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels sur  $K$ . Soit  $\varphi : V \rightarrow W$  une application. On dit que l'application  $\varphi$  est *K-linéaire* si les conditions suivantes sont satisfaites :

- 1) pour tous  $x, y \in V$ , on a  $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ ;
- 2) pour tout  $a \in K$  et tout  $x \in V$ , on a  $\varphi(ax) = a\varphi(x)$ .

**Suites.** — Soit  $n_0$  un entier. On appelle *suite* dans  $K$  (dont l'indice initial est  $n_0$ ) toute application de  $\mathbb{Z} \cap [n_0, +\infty[$  vers  $K$ . L'ensemble  $\mathcal{S}(K, n_0)$  des suites dans  $K$  est un espace vectoriel sur  $K$ . La lois d'addition et la multiplication par un scalaire sont respectivement

$$(a_n)_{n \geq n_0} + (b_n)_{n \geq n_0} := (a_n + b_n)_{n \geq n_0},$$

$$\lambda(a_n)_{n \geq n_0} := (\lambda a_n)_{n \geq n_0}$$

De plus, sur l'espace  $\mathcal{S}(K, n_0)$ , il y a une loi de multiplication (terme a terme)

$$(a_n)_{n \geq n_0} (b_n)_{n \geq n_0} := (a_n b_n)_{n \geq n_0}$$

qui est commutative, associative, et distributive par rapport a l'addition.

Soit  $a = (a_n)_{n \geq n_0}$  une suite dans  $K$ . On dit que la suite  $a$  est *bornée* s'il existe une constante  $M > 0$  telle que  $|a_n| \leq M$  quel que soit  $n \geq n_0$ . On dit que  $a$  est une *suite de Cauchy* si la condition suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq n_0, \forall n, m \in \mathbb{Z}, m > n > N, \text{ on a } |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

On dit que la suite  $a$  est *convergente* (ou *converge* dans  $K$ ) s'il existe  $a \in K$  tel que

$$(1.2) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \geq n_0, \forall n \in \mathbb{Z}, n > N, \text{ on ait } |a_n - a| < \varepsilon.$$

On vérifie facilement que la constante  $a$  est unique (appelée la *limite* de  $a$ ). Une suite convergente est nécessairement une suite de Cauchy. La réciproque est aussi vraie : le corps  $K$  est complet pour la valeur absolue  $|\cdot|$ .

L'ensemble  $\mathcal{S}^c(K, n_0)$  des suites convergentes dans  $K$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{S}(K, n_0)$ . L'application  $\lim$  de  $\mathcal{S}^c(K, n_0)$  vers  $K$ , qui envoie une suite convergente  $(a_n)_{n \geq n_0}$  en sa limite, est une application  $K$ -linéaire qui preserve la loi de multiplication. Si  $K = \mathbb{R}$ , alors cette application preserve aussi la relation d'ordre. Autrement dit, si  $(a_n)_{n \geq n_0}$  et  $(b_n)_{n \geq n_0}$  sont deux suites réelles convergentes telles que  $a_n \leq b_n$  pour  $n$  suffisamment grand<sup>(1)</sup>, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

**Suite monotone.** — Soit  $a = (a_n)_{n \geq n_0}$  une suite réelle. On dit que la suite  $a$  est *croissante* (resp. *décroissante*) si  $a_n \leq a_{n+1}$  (resp.  $a_n \geq a_{n+1}$ ) quel que soit  $n \geq n_0$ . On dit que  $a$  est *bornée supérieurement* (resp. *bornée inférieurement*) s'il existe un nombre réel  $M$  tel que  $a_n \leq M$  (resp.  $a_n \geq M$ ) quel que soit  $n \geq n_0$ .

**Proposition 1.1.2.** | Soit  $a = (a_n)_{n \geq n_0}$  une suite réelle. Si la suite  $a$  est croissante et bornée supérieurement, alors elle est convergente.

*Démonstration.* | Montrons la proposition par l'absurde. Supposons que la suite  $a$  est divergente. Elle n'est donc pas une suite de Cauchy. Autrement dit, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$\forall N \geq n_0, \exists n, m > N \text{ avec } |a_m - a_n| \geq \varepsilon.$$

On peut donc construire par récurrence deux suites d'indices  $(n_i)_{i \geq 1}$  et  $(m_i)_{i \geq 1}$  telles que

$$n_0 < n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \dots$$

et que (la suite  $a$  étant croissante)

$$a_{m_\ell} - a_{n_\ell} = |a_{m_\ell} - a_{n_\ell}| \geq \varepsilon$$

quel que soit  $\ell$ . Comme la suite  $(a_n)_{n \geq n_0}$  est croissante, on obtient

$$\begin{aligned} a_{m_\ell} - a_{n_0} &= \sum_{n_0 < k \leq m_\ell} (a_k - a_{k-1}) \geq \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{n_i < k \leq m_i} (a_k - a_{k-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} a_{m_i} - a_{n_i} \geq \varepsilon \ell. \end{aligned}$$

C'est une contradiction puisque la suite est supposée être bornée supérieurement.  $\square$

**Corollaire 1.1.3.** | Soit  $a = (a_n)_{n \geq n_0}$  une suite réelle. Si la suite  $a$  est décroissante et bornée inférieurement, alors elle est convergente.

<sup>(1)</sup>C'est plutôt une relation de préordre sur  $\mathcal{S}^c(K, n_0)$

*Démonstration.* | Il suffit d'appliquer la proposition précédente à la suite  $(-a_n)_{n \geq n_0}$ .  $\square$

Soit  $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq n_0}$  une suite croissante. Si la suite  $\mathbf{a}$  n'est pas bornée supérieurement, alors elle tend vers  $+\infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . De façon similaire, toute suite décroissante qui n'est pas bornée inférieurement tend vers  $-\infty$ .

Une conséquence importante de la convergence monotone est l'existence de la borne supérieure/inférieure d'un sous-ensemble de  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

**Proposition 1.1.4.** | Soit  $A$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . Il existe un unique élément  $a$  dans  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  qui vérifie les conditions suivantes :

- 1)  $a$  est un majorant de  $A$  (i.e., pour tout  $x \in A$ , on a  $x \leq a$ );
- 2) tout majorant de  $A$  est supérieur ou égal à  $a$ .

*Démonstration.* | L'unicité de  $a$  provient des conditions auxquelles il doit satisfaire. Montrons l'existence. Le cas où l'ensemble  $A$  n'est pas borné supérieurement (dans  $\mathbb{R}$ ) est simple : il suffit de prendre  $a = +\infty$ . En outre, si  $A \setminus \{-\infty\} = \emptyset$ , alors tout élément de  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  est une majoration de  $A$ . Donc  $a = -\infty$  vérifie les conditions comme ci-dessus.

Dans la suite, on suppose que l'ensemble  $A \setminus \{-\infty\}$  est non-vidé et admet au moins un majorant dans  $\mathbb{R}$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ , soit  $a_n$  le plus petit élément dans l'ensemble

$$B_n := \{m/2^n \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

qui est un majorant de  $A$  (l'existence d'un tel nombre provient de l'hypothèse  $A \neq \emptyset$ ). La suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  est décroissante (car  $B_n \subset B_{n+1}$  pour tout  $n$ ) et bornée inférieurement (car  $A$  est non-vidé) donc converge vers un nombre  $a \in \mathbb{R}$  (d'après le corollaire 1.1.3). Pour tout  $x \in A$ , on a  $x \leq a_n$ . Par passage à la limite, on obtient  $x \leq a$ . Donc le nombre  $a$  est effectivement un majorant de  $A$ . Si  $b$  est un majorant de  $A$ , alors pour tout entier  $n \geq 1$  on a  $b \geq a_n - 1/2^n$ . Par passage à la limite, on obtient  $b \geq a$ .  $\square$

L'élément  $a$  figurant dans la proposition précédente s'appelle la *borne supérieure* de l'ensemble  $A$ , note  $\sup A$ . De façon similaire, on peut montrer que  $A$  admet un plus grand minorant, note  $\inf A$  et appelle la *borne inférieure* de  $A$ .

**Limites inférieure et supérieure.** — Soit  $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq n_0}$  une suite réelle. La suite  $(\inf_{m \geq n} a_m)_{n \geq n_0}$  (dans  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ) est croissante, donc tend vers un élément dans  $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ , appelée la limite inférieure de  $\mathbf{a}$ , notée  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ . De façon similaire, la limite supérieure de  $\mathbf{a}$  est définie comme

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \inf_{n \geq n_0} \left( \sup_{m \geq n} a_m \right) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Soit  $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 1}$  une suite dans  $\mathbb{R}$ . La limite supérieure de  $\mathbf{a}$  est  $+\infty$  si et seulement si la suite  $\mathbf{a}$  n'est pas bornée supérieurement, est  $-\infty$  si et seulement si la suite  $\mathbf{a}$  tend vers  $-\infty$ . La limite inférieure de  $\mathbf{a}$  est  $+\infty$  si et seulement si la suite  $\mathbf{a}$  tend vers  $+\infty$ , est  $-\infty$  si et seulement si la suite  $\mathbf{a}$  n'est pas bornée inférieurement.

**Proposition 1.1.5.** | Soit  $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq n_0}$  une suite réelle. La suite  $\mathbf{a}$  est convergente si et seulement si elle est bornée et si  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

*Démonstration.* | Pour tout entier  $N \geq n_0$ , on a

$$\sup_{n > m \geq N} |a_n - a_m| = \left( \sup_{n \geq N} a_n \right) - \left( \inf_{n \geq N} a_n \right).$$

Si la suite  $\mathbf{a}$  est convergente, alors elle est bornée. De plus, le critère de Cauchy montre que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{n > m \geq N} |a_n - a_m| = 0.$$

On obtient donc  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ . Réciproquement, si la suite  $\mathbf{a}$  est bornée (donc les limites inférieure et supérieure de  $\mathbf{a}$  sont finies), et si  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ , alors on a  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{n > m \geq N} |a_n - a_m| = 0$ . Donc la suite  $\mathbf{a}$  est convergente.  $\square$

Soit  $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq n_0}$  une suite réelle. Pour tout entier  $n$ ,  $n \geq n_0$ , on a

$$\inf_{m \geq n} a_m \leq a_n \leq \sup_{m \geq n} a_m.$$

D'après la proposition 1.1.5, si la suite  $\mathbf{a}$  est convergente, alors

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

En outre, pour toute sous-suite  $(a_{n_k})_{k \geq 1}$  de  $\mathbf{a}$ , on a

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} a_n.$$

Par conséquent, si la suite  $\mathbf{a}$  converge vers  $a \in \mathbb{R}$ , alors toute sous-suite de  $\mathbf{a}$  converge vers  $a$  aussi.

Les limites inférieure et supérieure préservent les relations de (pre)ordre.

**Proposition 1.1.6.** | Soient  $(a_n)_{n \geq n_0}$  et  $(b_n)_{n \geq n_0}$  deux suites réelles. Si  $a_n \leq b_n$  pour tout  $n$  suffisamment grand, alors

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

*Démonstration.* | Lorsque  $n$  est suffisamment grand (de telle sorte que  $a_m \leq b_m$  pour tout  $m \geq n$ ), on a (la justification est laissée comme un exercice)

$$\inf_{m \geq n} a_m \leq \inf_{m \geq n} b_m \quad \text{et} \quad \sup_{m \geq n} a_m \leq \sup_{m \geq n} b_m$$

Par passage à la limite lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on obtient le résultat.  $\square$

En general les limites superieure et inferieure ne preservent pas les lois de composition des suites. Voici un exemple.

**Exemple 1.1.7.** | Soient  $(a_n)_{n \geq 1}$  et  $(b_n)_{n \geq 1}$  deux suites reelles, ou

$$a_n = (-1)^n, \quad b_n = (-1)^{n+1} \quad (n \geq 1).$$

On a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = -1 \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 1.$$

Mais la suite  $(a_n + b_n)_{n \geq 1}$  est constante de valeur 0, donc converge vers 0.

Bien que les limites inferieure et superieure ne sont pas additives, elles veri ent certaines proprietes de semi-additivite.

**Proposition 1.1.8.** | Soient  $(a_n)_{n \geq n_0}$  et  $(b_n)_{n \geq n_0}$  deux suites reelles. On suppose que la condition suivante **n'est pas satisfaite**<sup>(2)</sup>: l'une des deux suites tend vers  $-\infty$  tandis que l'autre n'est pas bornée superieurement. Alors

$$(1.3) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

*Démonstration.* | L'assertion (1.3) devient triviale si l'une des suites  $(a_n)_{n \geq n_0}$  et  $(b_n)_{n \geq n_0}$  n'est pas bornée superieurement dans  $\mathbb{R}$ . Dans la suite, on suppose le contraire. Pour tout  $n$ , on a (la veri cation est lassiee comme un exercice)

$$(1.4) \quad \sup_{m \geq n} (a_m + b_m) \leq \left( \sup_{m \geq n} a_m \right) + \left( \sup_{m \geq n} b_m \right).$$

Soient

$$A_n = \sup_{m \geq n} a_m, \quad B_n = \sup_{m \geq n} b_m, \quad C_n = \sup_{m \geq n} (a_m + b_m).$$

Les suites  $(A_n)_{n \geq n_0}$ ,  $(B_n)_{n \geq n_0}$  et  $(C_n)_{n \geq n_0}$  sont decroissante. Si la suite  $(C_n)_{n \geq n_0}$  n'est pas bornée inferieurement, alors elle tend vers  $-\infty$ , et l'assertion est triviale. Sinon les trois suite  $(A_n)_{n \geq n_0}$ ,  $(B_n)_{n \geq n_0}$  et  $(C_n)_{n \geq n_0}$  sont toutes bornées inferieurement, et donc convergentes. On a alors (compte tenu de (1.4))

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} A_n + \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

□

De facon similaire, on a la propriete suivante de la limite inferieure.

**Proposition 1.1.9.** | Soient  $(a_n)_{n \geq n_0}$  et  $(b_n)_{n \geq n_0}$  deux suites reelles. Alors

$$(1.5) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$$

pourvu que l'on ne trouve pas  $(+\infty) + (-\infty)$  ou  $(-\infty) + (+\infty)$  dan la partie à droite de (1.5)

<sup>(2)</sup>de sorte que l'on ne trouve pas  $(+\infty) + (-\infty)$  dans la partie à droite de la formule (1.3).



### 1.2. Séries numériques: généralités

Soit  $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq n_0}$  une suite dans  $K$  ( $= \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). On appelle la *série associée* à  $\mathbf{a}$  la suite  $(A_n)_{n \geq n_0}$  ou

$$A_n := \sum_{n_0 \leq k \leq n} a_k,$$

notée  $\sum_{n \geq n_0} a_n$ . On désigne par  $S(K, n_0)$  l'application de  $S(K, n_0)$  vers lui-même qui envoie chaque suite  $\mathbf{a}$  en sa série associée. C'est une application linéaire inversible. Son inverse envoie une suite  $(A_n)_{n \geq n_0}$  en  $(A_n - A_{n-1})_{n \geq n_0}$  (on convient que  $A_{n_0-1} = 0$ ).

Si une série  $(\mathbf{a})$  est convergente, sa limite s'appelle la *somme* de cette série. Si la suite  $\mathbf{a}$  est de la forme  $(a_n)_{n \geq n_0}$  et si la série associée  $(\mathbf{a})$  converge, l'expression  $\sum_{n \geq n_0} a_n$  désigne aussi la somme de la série.

**Proposition 1.2.1.** | Soit  $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq n_0}$  une suite dans  $K$ . Si la série  $(\mathbf{a})$  est convergente, alors la suite  $\mathbf{a}$  converge vers 0.

*Démonstration.* | Si  $(\mathbf{a}) = (A_n)_{n \geq n_0}$  est convergente, elle est une suite de Cauchy. Par conséquent, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \geq n_0$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n > N, \text{ on ait } |a_n| = |A_n - A_{n-1}| < \varepsilon.$$

Donc la suite  $\mathbf{a}$  converge vers 0. □

La contraposition de cette proposition montre que, si la suite  $\mathbf{a}$  ne converge pas vers 0, alors  $(\mathbf{a})$  n'est pas convergente.

**Définition 1.2.2.** | On dit qu'une série  $(\mathbf{a})$ , ou

$$\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq n_0} \in S(K, n_0),$$

est *absolument convergente* (ou *converge absolument*) si la série  $(|\mathbf{a}|)$  est convergente, ou  $|\mathbf{a}|$  désigne la suite  $(|a_n|)_{n \geq n_0}$ .

**Proposition 1.2.3.** | Soit  $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq n_0}$  une suite. Si la série  $(\mathbf{a})$  converge absolument, alors elle est convergente.

*Démonstration.* | Supposons que la suite  $(|\mathbf{a}|)$  converge. Elle est alors une suite de Cauchy. Par conséquent,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > m > N, \text{ on a } \sum_{m < k \leq n} |a_k| < \varepsilon,$$

d'où, pour tous  $n, m, n > m > N$ , on a

$$\left| \sum_{m < k \leq n} a_k \right| \leq \sum_{m < k \leq n} |a_k| < \varepsilon,$$

donc la suite  $(\mathbf{a})$  est convergente (car elle est une suite de Cauchy). □

### 1.3. Séries à termes positifs

Dans ce paragraphe, on étudie les séries associées aux suites dans  $[0, +\infty[$ . Une telle série est appelée une série à termes positifs.

**Proposition 1.3.1.** | Une série à termes positifs  $\sum_{n \geq n_0} a_n$  est convergente si et seulement si elle est bornée supérieurement.

*Démonstration.* | Rappelons que si une suite  $(A_n)_{n \geq n_0}$  est convergente, alors elle est bornée, c'est-à-dire qu'il existe une constante  $M > 0$  telle que  $|A_n| \leq M$  pour tout  $n$ . En particulier, si la série  $\sum_{n \leq n_0} a_n$  est convergente, alors elle est bornée supérieurement.

Reciproquement, si la série  $\sum_{n \geq n_0} a_n$  est bornée supérieurement, alors elle est nécessairement convergente car elle est une suite croissante.  $\square$

**Remarque 1.3.2.** | Soit  $\sum_{n \geq n_0} a_n$  une série à termes positifs. Si la série est divergente, elle tend vers  $+\infty$ . Dans ce cas-là, on dit que la somme de cette série est  $+\infty$ .

**Exemple 1.3.3.** | On considère la série géométrique  $\sum_{n \geq 0} a^n$ , où  $a$  est un nombre positif. La somme partielle d'indice  $n$  de cette série est

$$A_n := \sum_{0 \leq k \leq n} a^k = \begin{cases} n+1, & \text{si } a = 1, \\ (1 - a^{n+1})/(1 - a), & \text{si } a \neq 1. \end{cases}$$

On obtient de la proposition 1.3.1 que la série géométrique  $\sum_{n \geq 0} a^n$  converge si et seulement si  $a < 1$ . Dans ce cas-là, la somme de la série vaut  $1/(1 - a)$ .

Lorsque la suite  $(a_n)_{n \geq n_0}$  est donnée comme des valeurs d'une fonction positive décroissante  $f$  en des points entiers  $\{n_0, n_0 + 1, \dots\}$ , la convergence de la série  $\sum_{n \geq n_0} a_n$  est équivalente à celle de l'intégrale généralisée de  $f$  sur  $[n_0, +\infty[$ .

**Lemme 1.3.4.** | Soit  $f$  une fonction monotone définie sur un intervalle borné et fermé  $[a, b]$ , alors elle est intégrable sur  $[a, b]$ .

*Démonstration.* | Sans perte de généralité, on peut supposer  $f$  croissante. Soient  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  une partition de l'intervalle  $[a, b]$  et  $\| \cdot \| = \sup_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$ . Soient

$$S_{\pm}(\cdot) := \sum_{1 \leq i \leq n} \max_{\min} \{f(t) \mid t_{i-1} \leq t \leq t_i\} (t_i - t_{i-1}).$$

On a  $f(a)(b-a) \leq S_{-}(\cdot) \leq S_{+}(\cdot) \leq f(b)(b-a)$ . Comme la fonction  $f$  est croissante, on a

$$\begin{aligned} S_{+}(\cdot) - S_{-}(\cdot) &= \sum_{1 \leq i \leq n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))(t_i - t_{i-1}) \leq \| \cdot \| \sum_{1 \leq i \leq n} (f(t_i) - f(t_{i-1})) \\ &= (f(b) - f(a)) \| \cdot \|. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\lim_{\| \cdot \| \rightarrow 0} S_+(\cdot) - S_-(\cdot) = 0,$$

donc la fonction  $f$  est intégrable.  $\square$

**Théorème 1.3.5.** | Soit  $f$  une fonction positive décroissante définie sur  $[n_0, +\infty[$ . La série  $\sum_{n \geq n_0} f(n)$  est convergente si et seulement si l'intégrale généralisée  $\int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$  est convergente. De plus, dans le cas où la série est convergente, on a

$$(1.6) \quad \int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{n \geq n_0} f(n) \leq f(n_0) + \int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt.$$

*Démonstration.* | Rappelons que l'intégrale généralisée  $\int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$  converge si et seulement si la fonction  $F(x) = \int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$  de  $n_0$  à  $+\infty$  converge lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , ou de façon équivalente, est bornée supérieurement (puisque la fonction  $f$  est positive). Comme la fonction  $f$  est décroissante, pour tout entier  $n \geq n_0$ , on a

$$F(n+1) = \sum_{n_0 \leq k \leq n} \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \sum_{n_0 \leq k \leq n} f(k) \leq f(n_0) + \sum_{n_0 < k \leq n} \int_{k-1}^k f(t) dt = f(n_0) + F(n).$$

Donc la série  $\sum_{n \geq n_0} f(n)$  est bornée supérieurement si et seulement si l'ensemble  $\{F(n) \mid n \geq n_0\}$  est bornée supérieurement. Mais cette dernière condition revient à dire que la fonction  $F$  est bornée supérieurement car elle est croissante. En  $n$ , l'encadrement (1.6) provient de la formule précédente en faisant  $n \rightarrow +\infty$ .  $\square$

**Exemple 1.3.6.** | Soit  $\sigma$  un nombre réel. La série de Dirichlet

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\sigma}$$

est convergente si et seulement si l'intégrale généralisée  $\int_1^{+\infty} t^{-\sigma} dt$  converge, i.e., si et seulement si  $\sigma > 1$ .

**Exercice 1.3.7.** | Soit  $\sigma$  un nombre réel. Étudier la nature de la série

$$\sum_{n \geq 3} \frac{1}{n \ln(n)}$$

Divers critères de convergence peuvent être obtenus par comparaison. On commence par un principe général.

**Théorème 1.3.8.** | Soient  $\sum_{n \geq n_0} a_n$  et  $\sum_{n \geq n_0} b_n$  deux séries à termes positifs telles que  $a_n \ll b_n$  ( $n \rightarrow +\infty$ )<sup>(3)</sup>.

1) Si la série  $\sum_{n \geq n_0} b_n$  est convergente, alors il en est de même de  $\sum_{n \geq n_0} a_n$ .

<sup>(3)</sup>Ici il s'agit du symbole de Vinogradov. L'expression  $a_n \ll b_n$  ( $n \rightarrow +\infty$ ) signifie qu'il existe une constante positive  $C$  telle que  $a_n \leq Cb_n$  pour  $n$  suffisamment grand.

2) Si la série  $\sum_{n \geq n_0} a_n$  est divergente, alors  $\sum_{n \geq n_0} b_n$  l'est aussi.

*Démonstration.* | La deuxième assertion est la contraposition de la première. Montrons 1). On suppose que  $C$  est une constante positive telle que  $a_n \leq C b_n$  pour tout entier  $n \geq n_1$ , ou  $n_1 \geq n_0$  est un entier. On obtient

$$\sum_{n \geq n_0} a_n \leq \sum_{n_0 \leq n < n_1} a_n + C \sum_{n \geq n_1} b_n < +\infty.$$

La série  $\sum_{n \geq n_0} a_n$  est bornée, donc convergente.  $\square$

La comparaison aux séries géométriques conduit aux critères de convergence suivants.

**Théorème 1.3.9 (Critère de d'Alembert).** | Soit  $\sum_{n \geq n_0} a_n$  une série à termes strictement positifs. Si

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

alors la série  $\sum_{n \geq n_0} a_n$  est convergente.

*Démonstration.* | La relation  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1}/a_n < 1$  signifie qu'il existe un nombre réel  $r \in ]0, 1[$  et un entier  $N \geq n_0$  tels que  $a_{n+1}/a_n \leq r$  pour tout  $n \geq N$ . D'où

$$a_n \leq \frac{a_N}{r^{n-N}} r^N \quad (n \geq N).$$

Donc  $a_n \ll r^n$  et la série  $\sum_{n \geq n_0} a_n$  est convergente, compte tenu du théorème 1.3.8.  $\square$

**Exemple 1.3.10.** | Soit  $r$  un nombre positif. La série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{r^n}{n!}$$

converge.

Le critère de d'Alembert ne marche que pour des séries à termes strictement positifs (à partir de certain rang)<sup>(4)</sup>. Le critère de Cauchy comme la suite est valable pour les séries à termes positifs généraux.

**Théorème 1.3.11 (Critère de Cauchy).** | Soit  $\sum_{n \geq n_0} a_n$  une série à termes positifs. Si

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n^{1/n} < 1,$$

alors la série  $\sum_{n \geq n_0} a_n$  est convergente.

<sup>(4)</sup>S'il y a une infinité de zéro et une infinité de termes strictement positifs figurant dans les termes généraux de la série  $\sum_{n \geq 0} a_n$ , alors on a nécessairement

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = +\infty$$

*Démonstration.* | L'hypothèse du théorème montre qu'il existe  $r \in ]0, 1[$  et un entier  $N \geq n_0$  tels que  $a_n^{1/n} \leq r$  dès que  $n \geq N$ . Donc pour tel  $n$  on a  $a_n \leq r^n$ . D'où la série  $\sum_{n \geq n_0} a_n$  est convergente (compte tenu du théorème 1.3.8).  $\square$

**Exemple 1.3.12 (Nombres décimaux).** | Soit  $a_0$  un entier. Pour tout  $n \geq 1$ , soit  $a_n$  un élément dans  $\{0, 1, \dots, 9\}$ . La série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{10^n}$$

converge dans  $\mathbb{R}$ . En effet, pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$\left(\frac{a_n}{10^n}\right)^{1/n} \leq \frac{\sqrt[n]{a_n}}{10} \leq \frac{9}{10} < 1.$$

#### 1.4. Sommation d'Abel

La sommation d'Abel est un outil efficace à étudier les séries à termes généraux (non-nécessairement positifs)

**Théorème 1.4.1 (Sommation d'Abel).** | Soient  $(a_n)_{n \geq n_0}$  et  $(b_n)_{n \geq n_0}$  deux suites dans  $\mathbb{C}$ . Pour tout entier  $m \geq 0$ , on a

$$(1.7) \quad \sum_{n_0 \leq n \leq n_0+m} a_n b_n = A_{n_0+m} b_{n_0+m} + \sum_{n_0 \leq n < n_0+m} A_n (b_n - b_{n+1}),$$

où  $A_n := \sum_{n_0 \leq k \leq n} a_k$  ( $n \geq n_0$ ). En particulier, si

$$\sup_{n_0 \leq n < n_0+m} |A_n| \leq A,$$

et si la suite  $(b_n)_{n \geq n_0}$  est positive et décroissante, alors

$$(1.8) \quad \left| \sum_{n_0 \leq n \leq n_0+m} a_n b_n \right| \leq A b_{n_0}.$$

*Démonstration.* | Pour tout entier  $n \geq n_0$ , on a  $a_n = A_n - A_{n-1}$  (avec la convention  $A_{n_0-1} = 0$ ). Donc

$$\begin{aligned} \sum_{n_0 \leq n \leq n_0+m} a_n b_n &= \sum_{n_0 \leq n \leq n_0+m} (A_n - A_{n-1}) b_n \\ &= \sum_{n_0 \leq n \leq n_0+m} A_n b_n - \sum_{n_0+1 \leq n \leq n_0+m} A_{n-1} b_n \\ &= \sum_{n_0 \leq n \leq n_0+m} A_n b_n - \sum_{n_0 \leq n < n_0+m} A_n b_{n+1} \\ &= A_{n_0+m} b_{n_0+m} + \sum_{n_0 \leq n < n_0+m} A_n (b_n - b_{n+1}). \end{aligned}$$

Dans le cas ou la suite  $(b_n)_{n \geq n_0}$  est positive et decroissante, on a

$$\begin{aligned} & \left| A_{n_0+m} b_{n_0+m} + \sum_{n_0 \leq n < n_0+m} A_n (b_n - b_{n+1}) \right| \\ & \leq |A_{n_0+m}| b_{n_0+m} + \sum_{n_0 \leq n < n_0+m} |A_n| (b_n - b_{n+1}) \\ & \leq A \left( b_{n_0+m} + \sum_{n_0 \leq n < n_0+m} (b_n - b_{n+1}) \right) = A b_{n_0}. \end{aligned}$$

□

Comme une application, on demontre la convergence des series alternees.

**Théorème 1.4.2.** | Soit  $a = (a_n)_{n \geq n_0}$  est une suite telle que  $a_n a_{n+1} < 0$  et  $|a_n| \geq |a_{n+1}|$  pour  $n$  suffisamment grand. Si la suite  $a$  converge vers 0, alors la série  $(a)$  est convergente.

*Démonstration.* | On suppose que  $a_n a_{n+1} < 0$  et  $|a_n| \geq |a_{n+1}|$  pour tout entier  $n \geq n_1$ , ou  $n_1 \geq n_0$  est un entier. Soit  $N \geq n_1$  et  $m \geq 0$  deux entiers. Si on applique la sommation d'Abel a

$$\sum_{N \leq n \leq N+m} a_n = \sum_{N \leq n \leq N+m} \operatorname{sgn}(a_n) |a_n|,$$

on obtient

$$\left| \sum_{N \leq n \leq N+m} a_n \right| \leq |a_N|.$$

Donc  $(a)$  est une suite de Cauchy pourvu que la suite  $a$  converge vers 0. □

**Remarque 1.4.3.** | Soit  $a = (a_n)_{n \geq n_0}$  une suite dans  $\mathbb{R}$  telle que  $a_n a_{n+1} < 0$  pour tout  $n \geq n_0$  et que la suite  $(|a_n|)_{n \geq n_0}$  soit decroissante et converge vers 0. La proposition precedente montre que la serie  $\sum_{n \geq n_0} a_n$  converge. En outre, on obtient de la sommation d'Abel que

$$\left| \sum_{n \geq n_0} a_n \right| \leq |a_{n_0}|.$$

**Exemple 1.4.4.** | Soit  $\sigma$  un nombre reel,  $\sigma > 0$ . La serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$$

est convergente.

Plus generalement, on a le critere suivant de convergence.

**Théorème 1.4.5.** | Soit  $(a_n)_{n \geq n_0}$  et  $(b_n)_{n \geq n_0}$  deux suites de nombres complexes. Si la série  $\sum_{n \geq n_0} a_n$  est une suite bornée et si  $(b_n)_{n \geq n_0}$  est une suite à terme positifs qui est decroissante et converge vers 0, alors la série  $\sum_{n \geq n_0} a_n b_n$  est convergente.

*Démonstration.* | Supposons que  $A$  est une constante telle que

$$\left| \sum_{n_0 \leq k \leq n} a_k \right| \leq A$$

quel que soit  $n$ . Si on applique la sommation d'Abel, on obtient

$$\left| \sum_{N \leq n \leq N+m} a_n b_n \right| \leq 2Ab_N$$

quels que soient  $N \geq n_0$  et  $m \geq 0$ . La série  $\sum_{n \geq n_0} a_n b_n$  est donc convergente car elle est une suite de Cauchy.  $\square$

### 1.5. Le produit de Cauchy

Soient  $(a) = \sum_{n \geq 0} a_n$  et  $(b) = \sum_{n \geq 0} b_n$  deux séries à valeurs dans  $K$  ( $=\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). On appelle le *produit* (de Cauchy) de  $(a)$  et  $(b)$  la série associée à la suite du terme général

$$(1.9) \quad a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0.$$

Cette nouvelle série sera notée  $(a) \cdot (b)$  ou  $(a \circ b)$ . Ainsi  $a \circ b$  est la suite dont le terme général est (1.9). On construit donc une loi de composition  $\circ$  sur l'espace  $S(K, 0)$ . Par définition, cette loi de composition est commutative, c'est-à-dire

$$a \circ b = b \circ a.$$

En outre, si  $a = (a_n)_{n \geq 0}$ ,  $b = (b_n)_{n \geq 0}$  et  $c = (c_n)_{n \geq 0}$  sont trois suites. Alors le terme d'indice  $n$  de  $a \circ (b \circ c)$  est

$$\sum_{i=0}^n a_i \left( \sum_{\substack{0 \leq j, k \leq n-i \\ j+k=n-i}} b_j c_k \right) = \sum_{\substack{0 \leq i, j, k \leq n \\ i+j+k=n}} a_i b_j c_k.$$

On obtient donc

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c,$$

i.e., la loi de composition  $\circ$  est *associative*. En outre, la loi  $\circ$  est *distributive* par rapport à l'addition:

$$\forall a, b, c \in S(K, 0), \quad (a + b) \circ c = (a \circ c) + (b \circ c).$$

Dans le cadre des séries numériques, les propriétés de la loi de composition  $\circ$  se traduisent comme les relations suivantes : pour tous  $a, b, c \in S(K, 0)$ ,

$$\begin{aligned} (a) \cdot (b) &= (b) \cdot (a), \\ (a) \cdot ((b) \cdot (c)) &= ((a) \cdot (b)) \cdot (c) \\ ((a) + (b)) \cdot (c) &= (a) \cdot (c) + (b) \cdot (c). \end{aligned}$$

Il n'est pas vrai en général que le produit de deux séries convergentes est encore une série convergente. Voici un contre-exemple.

**Exemple 1.5.1.** | Considerons la suite  $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 0}$  dont le terme general est

$$a_0 = 0, \quad a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad (n \geq 1).$$

Comme  $(\mathbf{a})$  est une serie alternee dont le terme general tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on obtient que la serie  $(\mathbf{a})$  est convergente (voir le theoreme 1.4.2). Or, pour tout entier  $n \geq 2$ , le terme d'indice  $n$  de la suite  $\mathbf{a} \circ \mathbf{a}$  est

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$$

Comme  $k(n-k) \leq n^2$ , on obtient

$$|c_n| \geq \frac{n-1}{n}.$$

Par consequent, la suite



ou l'expression  $O_{N,b}(\cdot)$  signifie que la constante implicite ne depend que de  $N$  et  $b$ .  
Donc

$$\left| AB - \sum_{k \leq n} c_k \right| = B \sum_{i > n-N} a_i + O_a(\varepsilon) + O_{N,b} \left( \sum_{n-N < i \leq n} |a_i| \right),$$

ou  $A$  est la somme de la serie (a). Par passage a la limite quand  $n$  tend vers l'infini, on obtient qu'il existe une constante  $C$  qui ne depend que de  $a$  telle que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| AB - \sum_{k \leq n} c_k \right| \leq C\varepsilon.$$

Comme  $\varepsilon$  est arbitraire, la serie (c) converge vers  $AB$ .  $\square$

Une application directe du theoreme de Mertens est la convergence absolue du produit de deux series absolument convergentes. La demonstration est laissee comme un exercice.

**Corollaire 1.5.3.** | Soient  $a$  et  $b$  deux suites dans  $S(K, 0)$ . Si les series (a) et (b) convergent absolument, alors il en est de même de  $(a) \cdot (b)$ .

## 1.6. Formule sommatoire d'Euler

Si les termes generaux d'une serie s'ecrivent comme les valeurs d'une fonction continument differentiable, les sommes partielles de la serie peut être etudiee via des integrales. Le theoreme suivant est un tel resultat, appele la formule sommatoire d'Euler.

**Théorème 1.6.1.** | Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  sur un intervalle  $[y, x]$ , alors

$$(1.10) \quad \sum_{y < n \leq x} f(n) = \int_y^x f(t) dt + \int_y^x f'(t) \langle t \rangle dt + f(x) \langle x \rangle - f(y) \langle y \rangle,$$

où  $n$  parcourt tous les entiers dans  $[y, x]$ , et l'expression  $\langle u \rangle := u - [u]$  désigne la partie factorielle de  $u$ .

*Démonstration.* | D'abord on a

$$\int_y^x \langle t \rangle f'(t) dt = \int_y^{\lfloor y \rfloor + 1} (t - \lfloor y \rfloor) f'(t) dt + \sum_{y < n < \lfloor x \rfloor} \int_n^{n+1} (t - n) f'(t) dt + \int_{\lfloor x \rfloor}^x (t - \lfloor x \rfloor) f'(t) dt.$$

La formule d'integration par partie montre que

$$\int_y^{\lfloor y \rfloor + 1} (t - \lfloor y \rfloor) f'(t) dt = f(\lfloor y \rfloor + 1) - \langle y \rangle f(y) - \int_y^{\lfloor y \rfloor + 1} f(t) dt.$$

De facon similaire,

$$\int_n^{n+1} (t - n) f'(t) dt = f(n + 1) - \int_n^{n+1} f(t) dt \quad (y < n < \langle x \rangle),$$

$$\int_{[x]}^x (t - [x]) f'(t) dt = \langle x \rangle f(x) - \int_{[x]}^x f(t) dt.$$

D'où

$$\int_y^x \langle t \rangle f'(t) dt = \sum_{y < n \leq x} f(n) + \langle x \rangle f(x) - \langle y \rangle f(y) - \int_y^x f(t) dt.$$

□

La formule sommatoire peut être utilisée à étudier la série harmonique.

**Corollaire 1.6.2.** | Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a

$$(1.11) \quad \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + O(n^{-1}),$$

où  $\gamma$  est une constante (appelée la constante d'Euler).

*Démonstration.* | Si on applique (1.10) à la fonction  $f(x) = 1/x$ , on obtient

$$\sum_{1 < k \leq n} \frac{1}{k} = \int_1^n \frac{1}{t} dt - \int_1^n \frac{\langle t \rangle}{t^2} dt = \ln n - \int_1^{+\infty} \frac{\langle t \rangle}{t^2} dt + \int_n^{+\infty} \frac{\langle t \rangle}{t^2} dt.$$

Comme

$$\int_n^{+\infty} \frac{\langle t \rangle}{t^2} dt \ll \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{n}$$

on obtient (1.11) avec

$$\gamma = 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\langle t \rangle}{t^2} dt.$$

□

**Corollaire 1.6.3.** | Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a

$$(1.12) \quad \ln(n!) = n \ln(n) - n + O(\ln(n)).$$

*Démonstration.* | Si on applique (1.10) à la fonction  $f(x) = \ln(x)$ , on obtient

$$\sum_{1 < k \leq n} \ln(k) = \int_1^n \ln(t) dt - \int_1^n \frac{\langle t \rangle}{t} dt = n \ln n - n + O(\ln n).$$

□