Université Paris 7 | MI3
Algèbre et Analyse pour l'informatique | L2
TD groupe Inf2 | 26 septembre 2013

Série n^o 2

Déterminants

Exercice 1. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1-\alpha & 1 & -1+\alpha \\ -1-2\alpha & 3 & -1+2\alpha \\ -1-\alpha & 1 & 1+\alpha \end{vmatrix}$$

Déterminer pour quelles valeurs de α les matrices paramétrées par α sont inversibles.

Exercice 2. On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & m & m & m^2-m \\ 1 & m-1 & 3m-1 & m^2-m \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\det(A)$ et $\det(\lambda A)$ (pour $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque).
2. On se donne une base de $\mathbb{R}^4$ et l'application linéaire f dont la matrice dans cette base est A . Donner suivant les valeurs de m le rang de f et la dimension de son noyau.

Exercice 3. Soient $a_1, a_2, \dots, a$, x des nombres réels.
On considère le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & \dots & a \\ -1 & x & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \dots & \dots & & & & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

1. Montrer que $D \; = a_1 x^{\;-1} + D_{\;-1}$ où $D_{\;-1}$ se déduit de D en supprimant la première colonne et la deuxième ligne.
2. Calculer D par récurrence.

Exercice 4. Déterminer suivant les valeurs de m le rang de la matrice :

$$\begin{pmatrix} m & 2 & 5 & -3m+2 & 7m-10 \\ 0 & 1 & 2 & -m+1 & 3m-4 \\ 0 & 0 & m & -m^2 & m^2-m \\ 2m & 2 & 0 & m+1 & m \\ m & 0 & 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. (Déterminant de Vandermonde.)
Soient $a_1, ..., a \ \in \mathbb{C}$. On note $\Delta \ (a_1, \ldots, a \ )$ le déterminant suivant :

$$\Delta \ (a_1, \ldots, a \ ) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{\ -1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{\ -1} \\ \ldots & & & & \\ 1 & a & a^2 & \ldots & a^{\ -1} \end{vmatrix}$$

Montrer que

$$\Delta \ (a_1, \ldots, a \ ) = \prod_{1 \leqslant \quad \leqslant} (a \ - a \ ).$$

On pourra effectuer le calcul pour $n = 1, 2$, puis donner une preuve par récurrence sur $\mathbb{N}$.

Exercice 6. Soient $A, B \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ avec $m > n$. Montrer que l'on a $\det(A \cdot B \ ) = 0$. (B dénote la matrice transposée de B.)

Exercice 7. Soit $n \geq 2$ un entier. Calculer le déterminant de la (n, n) matrice :

$$\begin{pmatrix} a & b & \ldots & \ldots & b \\ b & a & b & \ldots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ b & \ldots & \ldots & b & a \end{pmatrix}$$

Pour le début du calcul, remplacer la première colonne de la matrice par la somme des colonnes.
En déduire suivant les valeurs de a, b le rang de la matrice.

Exercice 8. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le déterminant de la matrice $A - \lambda I_3$.
2. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{id}$ est-il inversible ?