## *Serie n°* 5

## Systèmes différentiels

**Exercice 1.** On considère les matrices de coefficients suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}; \qquad A_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \text{ pour } a \in \mathbb{R};$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}:$$

1. Déterminer toutes les solutions des systèmes d'équations différentielles linéaires $\mathcal{S}_i$ donnés par $X' = A_i X$, pour $i = 1; :::; 4$.
   ($X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ étant une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ pour $i = 1; 3$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ étant une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ pour $i = 2; 4$.)
2. Trouver la solution $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ du système $\mathcal{S}_2$ avec condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
3. Déterminer l'ensemble des solutions du système $\mathcal{S}_3$ satisfaisant à la condition initiale $y(1) = 1$. Quelle est la structure de cet ensemble ? (espace vectoriel, espace affine...)

**Exercice 2.** Déterminer la solution du système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} x' &= 9x + 16y \\ y' &= -x + y \end{aligned}$$

avec conditions initiales $x(0) = 2$, $y(0) = 3$.

**Exercice 3.** Déterminer toutes les solutions du système d'équations différentielles (avec second membre)

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) + \sin(t) \\ y'(t) &= -2x(t) + 3y(t): \end{aligned}$$