Partiel du 30 octobre 2009 : (fonctions, séries numériques et séries de fonctions)

Exercice 1 On rappelle que e désigne la base du logarithme népérien, c'est-à-dire le nombre tel que $\log e = 1$. Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = (1+\frac{1}{n})^n$.

1. Montrer que $\lim u_n = e$.
2. Montrer que la suite u_n est croissante et en déduire l'inégalité $(1+\frac{1}{n})^n < e$. [Indication : pour montrer $u_{n+1} \geqslant u_n$ on pourra commencer par montrer que la fonction $f(x) = \frac{\log(1+x)}{x}$ est décroissante pour $x > 0$]

Exercice 2 Déterminer lesquelles des séries suivantes sont convergentes, absolument convergentes ou divergentes.

$$\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{\binom{2n}{n}}{3^n} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n^3)}{n^2} \qquad \sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$$

Exercice 3 On pose dans cet exercice

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \quad \text{et} \quad S := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

En appliquant une comparaison intégrale/série, démontrer que

$$0 < S - S_n \leqslant \frac{1}{2\,n^2}.$$

Exercice 4 Déterminer le rayon de convergence des séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(n+1)!\,(2n)!} x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}$$

Exercice 5 On définit les fonctions de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \qquad \text{et} \qquad g(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

1. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ (pour tout $a>0$).
3. En déduire que la fonction définie par la série $S(x) := \sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
4. Montrer les inégalités
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2x^2} \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$$
5. Montrer que
$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2x^2} = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} g(t)\,dt = \frac{\pi}{2\,x}.$$
En déduire que lorsque x tend vers zéro on a
$$\lim_{x\to 0} S(x) = \frac{\pi}{2},$$
et en déduire que $S(x)$ n'est pas continue en 0.