Université Paris 7 — MI3
Algèbre et Analyse pour l'informatique — L2
TD groupe Inf2

Série n^o^ 3

Diagonalisation

Exercice 1. Calculer le polynôme caractéristique des matrices suivantes et déterminer lesquelles sont diagonalisables :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer son polynôme caractéristique. Donner ses valeurs propres.
2. Que peut-on conclure à ce stade sur la diagonalisabilité de f ?
3. Trouver les espaces propres associés aux valeurs propres de f. Donner, si c'est possible, une base de vecteurs propres de f, écrire la matrice de passage de la base canonique à celle-là et écrire la matrice de f dans cette nouvelle base.
4. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice C suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -2 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 4. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de $\mathbb{C}$. On note f l'endomorphisme de E dont la matrice dans cette base est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de f.
2. Montrer qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f, et écrire la matrice de f dans cette base.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 0 & -7 & 3 \\ -1 & -16 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f et dresser son tableau de variation.
2. Montrer que f est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. On considère la matrice D suivante

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de D. Donner ses valeurs propres.
2. On définit deux vecteurs V et W par

$$V = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad W = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $D\,V$ et $D\,W$. Que sont V et W pour D ?
3. Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale Δ telles que :

$$D = P\Delta P^{-1}$$

Montrer que pour tout n, $D^n = P\Delta^n P^{-1}$.
On introduit maintenant une suite réelle (u_n) définie par la récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_1 = b \\ \forall\, n,\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$$

Pour l' étudier, on introduit la suite (U_n) de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ définis par :

$$U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

4. Montrer que la suite des vecteurs U_n vérifie la récurrence suivante :

$$\begin{cases} U_0 = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \\ \forall\, n,\ U_{n+1} = D\,U_n. \end{cases}$$

En déduire que pour tout n, $U_n = D^n\,U_0$.
5. Utiliser les résultats précedents pour calculer la valeur de u_n pour chacune des conditions initiales suivantes :
i. $a = 1$, $b = -2$
ii. $a = 1$, $b = 3$
iii. $a = 2$, $b = 1$