MI3- Algèbre et analyse pour l'informatique.

Examen du 13 janvier 2014

Durée : 3 heures

Les documents personnels, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Donner le polynôme caractéristique de la matrice A.

(2) Donner les valeurs propres de f.

(3) Donner les sous-espaces propres de f.

(4) Trouver une matrice inversible S et une matrice diagonale D à coefficients dans $\mathbb{R}$ telles que $A = SDS^{-1}$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on définit A_n une matrice $n \times n$ dont tous les éléments sont égaux à 1. On appelle $C_n(\lambda)$ le polynôme caractéristique de cette matrice.

(1) [illegible]

$$[illegible]$$

(2) En utilisant cette relation de récurrence, donner une expression pour $C_n(\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. *Indication : Vous pouvez aussi vous aider de l'expression de $C_2(\lambda)$ qui est facile à obtenir et de $C_3(\lambda)$ qui a été calculée à l'exercice précédent.*

(3) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, donner les deux seules valeurs propres distinctes de A_n.

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$T = \begin{pmatrix} -1 & a\sqrt{2} & 3 \\ -\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \\ 1 & a\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que f est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

(2) Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

[illegible]

Exercice 4. Déterminer si les séries numériques ci-dessous sont absolument convergentes ou non. Lorsqu'une série n'est pas absolument convergente, déterminer si elle converge. Justifiez entièrement vos réponses à l'aide de tests donnés dans le cours.

[illegible]

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{4^{2n+1}(n+1)}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3n^2-10n^3}{4n^3+n})^n$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n+4}$

Exercice 5. Donner l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels les séries entières suivantes convergent. Commencez par déterminer le rayon de convergence R et déterminez ensuite le comportement de la série aux bords de l'intervalle de convergence.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^{2n}}(x-2)^n$, (série entière autour de 2)

(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} x^n$

Exercice 6. Donner la série de MacLaurin (c'est-à-dire la série de Taylor en $x = 0$) des fonctions suivantes :

(1) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in]-1, 1[,$

(2) $g(x) = \frac{1}{(1-x^2)^2}, \quad x \in]-1, 1[.$

Exercice 7. A l'aide d'une série entière, écrire les intégrales définies suivantes comme des séries numériques convergentes :

(1) $\int_0^{0.4} \ln(1+x^4)dx,$

(2) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^6}.$