

Chapitre 7

Groupe des permutations

On note \mathcal{S}_n le groupe des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$

7.1 Décomposition en cycles

Définition 7.1.1. La transposition (ij) est la permutation qui échange i et j et ne change pas les autres éléments.

Définition 7.1.2. Le cycle d'ordre 3 : (ijk) est la permutation σ définie par :

$$\sigma(i) = j, \sigma(j) = k, \sigma(k) = i, \forall x \notin \{i, j, k\}, \sigma(x) = x.$$

Définition 7.1.3. Le cycle d'ordre p : (i_1, \dots, i_p) est la permutation σ définie par :

$$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_p) = i_1, \forall x \notin \{i_1, \dots, i_p\}, \sigma(x) = x.$$

L'ensemble $\{i_1, \dots, i_p\}$ s'appelle le support du cycle.

Théorème 7.1.4. *Toute permutation se décompose en cycles à supports disjoints. Cette décomposition commute et est unique à l'ordre près.*

Théorème 7.1.5. *Toute permutation peut s'écrire comme composée de transpositions.*

7.1.1 Ordre des permutations

Théorème 7.1.6. *Soit σ une permutation décomposée en cycles à supports disjoints, alors l'ordre de σ est le PPCM des longueurs des cycles de la décomposition.*