

## TD n°2

### Sémantique

**Exercice 1** [Pruve de la Proposition 2] Soit  $p$  un formule propositionnelle et  $v_1, v_2$  des affectations telles que  $v_1(x) = v_2(x)$  pour toute variable  $x \in \mathcal{V}(p)$ . Montrer que  $\llbracket p \rrbracket v_1 = \llbracket p \rrbracket v_2$ .

**Exercice 2** [Pruve du théorème 4.2 du cours] Montrer qu'une formule  $p$  est valide si et seulement si  $v \models p$  pour toute affectation  $v$  avec  $\text{supp}(v) \subseteq \mathcal{V}(p)$ .

**Définition 1** Soient  $p$  et  $q$  des formules propositionnelles.

- On dit que  $q$  est une *conséquence* de  $p$ , et on écrit  $p \models q$ , si pour toute affectation  $v$  telle que  $v \models p$  on a aussi que  $v \models q$ .
- On dit que  $p$  et  $q$  sont *équivalentes*, et on écrit  $p \models q$ , si  $p \models q$  et  $q \models p$ .

Parfois on s'intéresse aussi à la notion de conséquence de tout un ensemble de formules :

**Définition 2** Soient  $p \in \text{Form}$  une formule et  $T \subseteq \text{Form}$  un ensemble de formules. On dit que  $p$  est une *conséquence* de  $T$ , noté  $T \models p$ , si pour toute affectation  $v$  telle que  $v \models q$  pour tout  $q \in T$  on a aussi que  $v \models p$ .

**Exercice 3** 1. Montrer que  $\{q\} \models p$  ssi  $q \models p$

2. Montrer que si  $T \models p$  et  $T \subseteq S$  alors  $S \models p$

3. Qu'est-ce que ça veut dire que  $\emptyset \models p$  ?

**Exercice 4** Soient  $q_1, q_2$  deux formules telles que  $q_1 \models q_2$ ,  $x_1, \dots, x_n$  des variables propositionnelles différentes, et  $p_1, \dots, p_n$  des formules propositionnelles. Alors

$$q_1[x_1/p_1, \dots, x_n/p_n] \models q_2[x_1/p_1, \dots, x_n/p_n]$$