

## TD n 3 - Correction

### Systèmes de connecteurs

**Rappel sur la notion de complétude d'un ensemble de connecteurs introduite en cours.** On peut formaliser cette notion comme suit : Un ensemble de connecteurs est complet si pour tout nombre naturel  $n$ , et pour toute fonction  $f$

$$f: \underbrace{\{0,1\}^n}_{n \text{ fois}} \rightarrow \{0,1\}$$

on peut trouver une formule propositionnelle  $p$ , avec  $\forall(p) \rightarrow f(x_1, \dots, x_n)$  qui « réalise »  $f$ , c'est-à-dire telle que

$$\llbracket p \rrbracket[x_1 \mapsto b_1, \dots, x_n \mapsto b_n] = f(b_1, \dots, b_n)$$

pour tous les valuations booléennes  $b_1, \dots, b_n \in \{0,1\}^n$ .

**Exercice 1** 1. Montrer que  $\neg, \wedge, \vee$  sont fonctionnellement complets.

2. Montrer que  $\neg, \rightarrow, \leftrightarrow$  sont fonctionnellement complets.

**Correction :**

- On doit utiliser les lois de De Morgan et le fait que  $\neg, \wedge, \vee$  est fonctionnellement complet.
- Il suffit d'observer que  $\neg \phi \equiv \phi \rightarrow 0$  ( $\phi \rightarrow \phi$ ), et que  $\neg \phi \rightarrow \psi \equiv \phi \vee \psi$  est fonctionnellement complet.

**Exercice 2** Montrer que l'ensemble de connecteurs  $\neg, \wedge, \vee$  n'est pas complet. Pour cela vous devez trouver une fonction  $f$  de  $\{0,1\}^n$  dans  $\{0,1\}$  telle qu'il n'y a pas de formule  $p$  construite avec  $\neg, \wedge, \vee$  telle que

$$\llbracket p \rrbracket[x_1 \mapsto b_1, \dots, x_n \mapsto b_n] = f(b_1, \dots, b_n)$$

pour toutes les valuations booléennes  $b_1, \dots, b_n \in \{0,1\}^n$ . Pour prouver qu'une telle formule n'existe pas, on raisonne par induction sur l'ensemble des formules construites uniquement avec  $\neg, \wedge, \vee$ .

**Correction :** Soit  $n = 1$  et soit  $f$  la fonction constante unaire qui à  $x$  associe 0 quelque soit  $x$ .

Montrons qu'il n'existe pas de formule  $p$  construite uniquement avec  $\neg$  et  $\vee$  qui réalise cette fonction, c'est-à-dire qui compte au plus une variable propositionnelle et telle que, quelle que soit  $v$  une affectation on a  $\llbracket p \rrbracket_v = 0$ .

Pour cela nous allons montrer que quelle que soit la formule  $p$  que l'on construit, si elle ne comporte que des  $\vee$  et des  $\neg$  alors pour toute affectation  $v$   $\llbracket p \rrbracket_v = \llbracket x \rrbracket_v$ . Nous en déduirons que pour l'affectation  $v_1$  qui à  $x$  associe 1,  $\llbracket p \rrbracket_{v_1} = 1$  pour toute formule  $p$ .

- Cas de base : Soit  $p$  est une formule propositionnelle. Alors  $p$  est forcément de la forme  $x$ . Donc pour toute affectation  $v$   $\llbracket p \rrbracket_v = \llbracket x \rrbracket_v$  puisque  $p = x$ .
- Soit  $p$  est de la forme  $(q \vee r)$ . Dans ce cas, par hypothèse d'induction, on sait que si  $\llbracket q \rrbracket_v = \llbracket x \rrbracket_v$  et  $\llbracket r \rrbracket_v = \llbracket x \rrbracket_v$  (1). Par définition l'interprétation d'une formule, si  $\llbracket q \rrbracket_v = \llbracket r \rrbracket_v$  alors  $\llbracket q \rrbracket_v = \llbracket r \rrbracket_v = \llbracket (q \vee r) \rrbracket_v$  (2). En effet soit  $\llbracket q \rrbracket_v = \llbracket p \rrbracket_v = 1$  et dans ce cas  $\llbracket (q \vee r) \rrbracket_v = 1$ . Soit  $\llbracket q \rrbracket_v = \llbracket p \rrbracket_v = 0$  et dans ce cas  $\llbracket (q \vee r) \rrbracket_v = 0$ . Nous concluons de (1) et (2) que  $\llbracket (q \vee r) \rrbracket_v = \llbracket x \rrbracket_v$ .

- Soit  $p$  est de la forme  $(q \wedge r)$ . Dans ce cas nous raisonnons de manière analogue.

De là nous concluons qu'il n'est pas possible d'exprimer toutes les fonctions avec seulement les connecteurs  $\wedge$  et  $\neg$ .

**Exercice 3** Montrer que  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$  ne sont pas fonctionnellement complets. Pour cela il s'agira de montrer par induction sur l'ensemble des formules construites uniquement grâce à  $\neg$  et  $\wedge$ , qu pour toute formule comportant deux variables propositionnelles, le nombre d'affectations qui la satisfont est toujours pair.

**Correction :** Là encore pour montrer qu'un système n'est pas complet, il suffit d'exhiber une arité  $n$  et une formule  $f$  de cette arité telle que cette formule n'est pas exprimable par ce système de connecteurs. Nous prétendons que l'ensemble des fonctions ayant une arité 2 et qui sont satisfaites par un nombre impair d'affectations n'est pas exprimable.

Nous montrons par induction pour toutes formules construites uniquement avec  $\neg$  et  $\wedge$  que le nombre d'affectations qui la satisfont est pair. Nous remarquerons que des connecteurs comme le  $\vee$  ou le  $\rightarrow$  ne sont pas exprimables.

- Cas de base  $p = x$  pour  $x \in \{x_1, x_2\}$  une variable propositionnelle. Il nous suffit de constater qu'il y a en tous deux affectations qui satisfont  $p$ . Ce sont les deux affectations qui satisfont  $x$ .
- $p$  est de la forme  $\neg q$ . Par hypothèse d'induction  $q$  est satisfaite par un nombre pair d'affectations. Comme le nombre total d'affectations est paire. Alors le nombre d'affectations  $v$  telle que  $\llbracket q \rrbracket_v = 0$  est pair. Donc par définition de l'interprétation d'une formule, les affectations qui rendent  $q$  fausse rendent  $\neg q$  vraie. On conclue donc que ce nombre d'affectations est pair.
- $p$  est de la forme  $(q \wedge r)$ . On note  $n_q$ , resp.  $n_r$  le nombre d'affectations qui font  $q$ , resp.  $r$  vraies. Par hypothèse d'induction, le nombre  $n_q$  et le nombre  $n_r$  sont pairs. De plus, on note

$n_{q,r}$	nombre d'affectations qui font $q$ vraie et $r$ vraie
$n_{\neg q,r}$	nombre d'affectations qui font $q$ fausse et $r$ vraie
$n_{q,\neg r}$	nombre d'affectations qui font $q$ vraie et $r$ fausse
$n_{\neg q,\neg r}$	nombre d'affectations qui font $q$ fausse et $r$ fausse

La formule  $q \wedge r$  est vraie ssi soit  $q$  est vraie et  $r$  est vraie, soit  $q$  et fausse et  $r$  est fausse. On a donc que pour le nombre d'affectations qui font  $q \wedge r$  vraie :

$$n_{q \leftrightarrow r} = n_{q,r} + n_{\neg q,\neg r}$$

Or, on a que

$$\begin{aligned} n_{q,r} + n_{q,\neg r} &= n_q \\ n_{q,\neg r} + n_{\neg q,\neg r} &= 4 - n_r \end{aligned}$$

La somme de deux nombres est pair si et seulement si les deux nombres ont la même parité (pair ou impair). Par hypothèse d'induction,  $n_q$  et  $n_r$  sont pairs. Par conséquence,  $n_{q,r}$  et  $n_{q,\neg r}$  ont la même parité, et aussi  $n_{q,\neg r}$  et  $n_{\neg q,\neg r}$  ont la même parité. Donc,  $n_{q,r}$  et  $n_{\neg q,\neg r}$  ont la même parité, leur somme  $n_{q \leftrightarrow r}$  est alors paire.

**Exercice 4** Montrer que l'opérateur  $\leftrightarrow$  est fonctionnellement complet.

**Correction :** On sait grâce au cours que  $\neg, \wedge, \vee$  est fonctionnellement complet. Donc, par définition, pour tout entier naturel  $n$  et pour toute fonction  $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$  on a une formule propositionnelle  $p$ , avec  $V(p) = \{x_1, \dots, x_n\}$  telle que

$$\llbracket p \rrbracket[x_1 \mapsto b_1, \dots, x_n \mapsto b_n] = f(b_1, \dots, b_n)$$

pour toutes les valeurs booléennes  $b_1, \dots, b_n \in \{0,1\}$ .

Il suffit donc de montrer que pour toute formule propositionnelle  $p$ , avec  $V(p) = \{x_1, \dots, x_n\}$ , il existe une formule propositionnelle  $q$  engendrée à partir du seul connecteur  $\leftrightarrow$  telle que  $q \not\equiv p$  avec  $V(q) = V(p)$ . On aura alors d'après le cours que

$$\llbracket q \rrbracket[x_1 \mapsto b_1, \dots, x_n \mapsto b_n] \neq \llbracket p \rrbracket[x_1 \mapsto b_1, \dots, x_n \mapsto b_n]$$

ce qui prouvera que " est fonctionnellement complet si  $\neg, \vee, \wedge$  l'est également.

Soit  $Form_{\uparrow}$  l'espace engendré par le connecteur " , c'est-à-dire le plus petit ensemble tel que  $V \subseteq Form_{\uparrow}$  et si  $p, q \in Form_{\uparrow}$  alors  $p \text{ " } q \in Form_{\uparrow}$ .

Montrons donc par induction que pour toute formule propositionnelle  $p \in Form$ , il existe une formule  $q \in Form_{\uparrow}$  telle que  $p \equiv q$  et  $V(q) = V(p)$ .

–  $x \in V$  :

On a  $x \equiv x$  et  $x \in V \subseteq Form_{\uparrow}$  et  $V(x) = V(x) = \{x\}$

–  $\neg p$  :

Par hypothèse, on a  $p' \in Form_{\uparrow}$  telle que  $p \equiv p'$ , et  $V(p) = V(p')$ .

Or  $\neg p \equiv \neg(p \wedge p) \equiv \neg(p' \wedge p') = p' \text{ " } p'$  et on a bien  $V(\neg p) = V(p) = V(p') = V(p' \text{ " } p')$ .

–  $p \vee q \in Form$  :

Par hypothèse, on a  $p', q' \in Form_{\uparrow}$  telles que  $p \equiv p', q \equiv q', V(p) = V(p'), V(q) = V(q')$ .

Or  $p \vee q \equiv (p \wedge p) \vee (q \wedge q) \equiv (p' \wedge p') \vee (q' \wedge q') = (p' \text{ " } p') \text{ " } (q' \text{ " } q')$   
et on a bien  $V(p \vee q) = V(p) \cup V(q) = V(p') \cup V(q') = V((p' \text{ " } p') \text{ " } (q' \text{ " } q'))$ .

–  $p \wedge q \in Form$  :

De même on montre que  $p \wedge q \equiv (p' \text{ " } q') \text{ " } (p' \text{ " } q')$  avec  $V(p \wedge q) = V((p' \text{ " } q') \text{ " } (p' \text{ " } q'))$ .