

## TD n°2

### Sémantique

**Exercice 1** Calculer l'interprétation des formules suivantes

$$p_1 = ((x \vee y) \wedge z)$$

$$p_2 = ((\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee z))$$

$$p_3 = ((\neg z \wedge \neg y) \vee (x \wedge y))$$

$$p_4 = (\neg(\neg x \vee y) \vee y)$$

par rapport à chacune des affectations ci-dessous :

$$[x \mapsto 1; y \mapsto 1]$$

$$[x \mapsto 1; z \mapsto 1]$$

$$[y \mapsto 1; t \mapsto 1]$$

Dire à quel(s) de ces quatre formules sont satisfaisable(s)/falsifiable(s)/valid(e)s/contradictoire(s).

**Exercice 2** [Preuve de la Proposition 2 du cours] Soit  $p$  une formule propositionnelle et  $v_1, v_2$  des affectations telles que  $v_1(x) = v_2(x)$  pour tout variable  $x \in \mathcal{V}(p)$ . Montrer que  $\llbracket p \rrbracket_{v_1} = \llbracket p \rrbracket_{v_2}$ .

**Exercice 3** [Preuve du théorème 4.2 du cours] Montrer qu'une formule  $p$  est valide si et seulement si  $v \models p$  pour toute affectation  $v$  avec  $\text{supp}(v) \subseteq \mathcal{V}(p)$ .

**Exercice 4** On rappelle la définition de l'ensemble  $\mathcal{V}(p)$  des variables d'une formule propositionnelle :

- $\mathcal{V}(x) = \{x\}$ , pour  $x \in V$ .
- $\mathcal{V}(\neg p) = \mathcal{V}(p)$ .
- $\mathcal{V}(p \wedge q) = \mathcal{V}(p \vee q) = \mathcal{V}(p) \cup \mathcal{V}(q)$ .

Une *affectation finie* pour  $p$  est une fonction de  $\mathcal{V}(p)$  dans  $\{0, 1\}$ . Si  $\mathcal{V}(p)$  a  $n$  éléments, il existe  $2^n$  affectations finies pour  $p$ .

Par exemple, les 4 affectations finies pour la formule  $\neg(x_1 \wedge x_2)$  sont données sous forme de

1. Montrer qu'  $((x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3))$  est instable.
2. Donner un exemple *aussi simple que possible* de formule instable.
3. Montrer que la négation d'une formule instable est instable.
4. Donner un exemple de deux formules instables dont la disjonction est une tautologie, et de deux formules instables dont la conjonction est une contradiction.