

## TD n°4

### Modélisation et formes normales

#### Exercice 1 [Modélisation]

1. On veut prendre une photo de groupe avec Mari, Sofin, Pawl, et Kim. Pour prendre la photo, les personnes sont à placer sur une ligne, une à côté de l'autre. Mari veut absolument être placé à côté de Pawl et à côté de Kim, et Kim veut absolument être placé à côté de Sofin. Sofin et Pawl n'ont pas exprimé une préférence.

Construire une formule propositionnelle qui est vraie si et seulement si une telle placement existe. Vous avez le droit d'écrire une formule qui n'est pas en forme conjonctive normale. Procédez en deux étapes : construire d'abord une formule qui correspond à un placement des quatre personnes sur une ligne, puis une deuxième formule qui exprime qui doit être placé à côté de qui.

2. On généralise maintenant le problème de la question (1) : On a donné un groupe  $G$  de  $n$  personnes, et une fonction  $v$  qui donne pour chaque personne du groupe un ensemble de voisins demandés (qui peut être vide). Pour l'exprimer de la question (1) on aurait

$$\begin{aligned}n &= 4 \\G &= \{\text{Mari}, \text{Sofin}, \text{Pawl}, \text{Kim}\} \\v(\text{Mari}) &= \{\text{Pawl}, \text{Kim}\} \\v(\text{Kim}) &= \{\text{Sofin}\} \\v(\text{Sofin}) = v(\text{Pawl}) &= \emptyset\end{aligned}$$

Donner la construction générale de la formule propositionnelle qui est vraie si et seulement si un placement des personnes existe qui satisfait tous les souhaits.

**Exercice 2** Ahmed, Bruno, Chen et Dimitri habitent le même bâtiment dans quatre étages différents. Tous ont un animal différent. Ahmed n'aime pas les chats, Chen habite juste au-dessus de Bruno. Celui qui a le poisson habite au rez-de-chaussée. Ahmed et Dimitri n'habitent pas un juste au-dessus de l'autre. Celui qui a le lapin habite à un étage plus haut que Bruno. Exprimez ces contraintes en logique propositionnelle et dites qui a les souris.

**Exercice 3** [Petit problème de synthèse] Un coffre fort est muni de  $n$  serrures et peut être ouvert lorsque ces  $n$  serrures sont ouvertes simultanément. Cinq personnes : a, b, c, d, et e doivent recevoir des clés correspondant à certains des serrures. Chaque clé peut être disponible à autant d'expliciter que l'on souhaite.

Choisissez pour  $n$  la plus petite valeur possible, et associez lui une répartition des clés entre les cinq personnes, de manière à ce que le coffre puisse être ouvert si et seulement si l'on se trouve dans au moins l'une des situations suivantes :

- présence simultanée de a et d b ;
- présence simultanée de a, c et d ;

- présencé simultané de  $b, d$  et  $e$ .

**Exercice 4** [Echauffement 1] Mettre les formules suivantes en forme normale de négation.

- $\neg(\neg x \vee y)$
- $\neg(\neg(x \vee y) \wedge z)$

**Exercice 5** [Echauffement 2] Déterminer un forme normale conjonctive et disjonctive des formules suivantes :

- $\neg(p \leftrightarrow q)$
- $((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow q$
- $(p \rightarrow (p \wedge \neg q)) \wedge (q \rightarrow (q \wedge \neg p))$

**Exercice 6** [Preuve du théorème 15] Une formule en forme conjonctive normale

$$(d_1 \wedge d_2 \wedge \dots \wedge d_n)$$

est valide si et seulement si pour tout  $i$  il existe une variable  $x$  telle que la clause  $d_i$  contiennent à la fois le littéral  $x$  et aussi sa négation  $\neg x$ .