

Examen

Jeudi 17 Janvier 2013

Motivez bien vos réponses. On recommande de *bien lire* l'énoncé d'un exercice avant de commencer à le résoudre. A côté de chaque exercice on donne, à titre indicatif, un barème.

Tout document est autorisé. Les téléphones portables, comme tout autre moyen de communication vers l'extérieur, doivent être éteints. Le temps à disposition est de 3 heures.

Exercice 1 Les formules de Hoare suivantes sont-elles valides ?

- Dans le cas positif, vous devez donner une preuve sémantique de quelques lignes ou une preuve utilisant le calcul de Hoare.
 - Dans le cas négatif, vous devez donner une affectation qui rend la formule fausse et expliquer brièvement pourquoi.
1. $\{z < 2\} x := z; z := 3; y := z - x \{y \geq 2\}$
 2. $\{x - y < 0\} y := y + 1; \text{if } y > x \text{ then } x := x - 1 \text{ else } y := x \text{ fi } \{x - y < 0\}$
 3. $\{y > 0\} \text{ while } x > 0 \text{ do } x := x + y \text{ od } \{\text{False}\}$

Exercice 2 Dire pour chacune des règles suivantes si elle est correcte ou pas. Justifiez vos réponses : si vous pensez que la règle n'est pas correcte, donnez une de ses instances qui n'est pas correcte ; si vous pensez que la règle est correcte, donnez une preuve de sa correction.

1.

$$\frac{\{p_1 \wedge p_2\} S \{q_1 \wedge q_2\}}{\{p_1\} S \{q_1\}}$$

2.

$$\frac{\{p\} S_1 \{q\} \quad \{p \wedge \neg b\} S_2 \{q\}}{\{p\} \text{ if } b \vee c \text{ then } S_1 \text{ else } S_2 \text{ fi } \{q\}}$$

3.

$$\frac{\{p\} S; S \{p\}}{\{p\} \text{ while } b \text{ do } S; S; S; S \text{ od } \{p \wedge \neg b\}}$$

Exercice 3 Prouver formellement (c'est à dire en utilisant les règles d'inférence du calcul de Hoare) les formules suivantes :

1. $\{x = 5\} y := x * x \{y \geq 1\}$
2. $\{x \geq 0\} x := x + 1; y := x * x \{y \geq 1\}$
3. $\{x \neq 0\} \text{ if } x > 0 \text{ then } x := x / 2 \text{ else } x := x * 2 \text{ fi } \{x \neq 0\}$

- $F(x) = x$ si $x \in V$, où V désigne l'ensemble des variables propositionnelles.
 - $F(\neg p) = \neg F(p)$.
 - $F((p \vee q)) = (F(p) \rightarrow F(q))$.
 - $F((p \wedge q)) = \neg(F(p) \rightarrow \neg F(q))$.
1. Montrer par induction que, pour tout $p \in \text{Form}$, la longueur de p est inférieure ou égal à la longueur de $F(p)$ (la longueur d'une formule a été définie en cours).
 2. Montrer que $(x \wedge \neg y)$ et $F((x \wedge \neg y))$ sont des formules logiquement équivalentes.
 3. Exhiber une formule $p \in \text{Form}$, aussi simple que possible, telle que p et $F(p)$ ne soient pas des formules logiquement équivalentes.
 4. Comment faudrait-il modifier la définition de F , pour obtenir une fonction $F' : \text{Form} \rightarrow \text{Form}'$ telle que, pour tout $p \in \text{Form}$, p et $F'(p)$ soient des formules logiquement équivalentes ? Justifier.
 5. Soit Form'' l'ensemble des formules du Calcul Propositionnel, construites à partir du connecteur \uparrow , le *nand*, dont la table de vérité est rappelée ci-dessous :

x	y	$x \uparrow y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Définir par récurrence une fonction $F'' : \text{Form} \rightarrow \text{Form}''$ telle que, pour tout $p \in \text{Form}$, p et $F''(p)$ soient des formules logiquement équivalentes.

Exercice 5 Le vaisseau spatial Européen de recherche *George Boole* s'approche de sa destination, la planète Logiqua. Son équipage consiste en deux cosmonautes Allemands nommés Alfons et Beate, les deux Français Chloë et Didier, les deux Italiens Eduardo et Franciska, et les deux Anglais Gisela et Henry. Ils doivent maintenant s'organiser en binômes, chaque binôme étant en charge d'explorer une région différente parmi les quatre régions intéressantes de la planète : la mer de l'Induction, la colline de la Vérification, la plaine Modale, ou le désert Probabiliste. Le règlement Européen, qui évidemment est aussi de rigueur dans l'espace, exige que chaque binôme est composé de deux cosmonautes de nationalité différente.

On cherche à établir quel cosmonaute va partir en quelle région de la planète. Une des missions de la *Georges Boole* est de trouver cette affectation en modélisant le problème en logique propositionnelle. Il n'est pas demandé que les formules à construire soient en forme conjonctive normale.

1. Définir l'ensemble de variables propositionnelles qui permet de modéliser le problème. Expliquer brièvement la signification des variables.
2. Donner une formule propositionnelle exprimant le fait que chaque cosmonaute est envoyé en exactement une région.
3. Donner une formule propositionnelle exprimant que toute région est explorée par au moins deux cosmonautes.
4. Donner une formule propositionnelle exprimant que jamais deux cosmonautes de la même nationalité sont envoyés dans la même région.
5. Donner une formule propositionnelle qui exprime que Alfons et Chloë forment un binôme dans le cas où Henry et Franciska ne sont pas dans le même binôme.