

TD n°2 - Correction

Sémantique

Exercice 1 [Pruvée la Proposition 2] Soit p une formule propositionnelle et v_1, v_2 des affectations telles que $v_1(x) = v_2(x)$ pour tout variable $x \in \mathcal{V}(p)$. Montrer que $\llbracket p \rrbracket_{v_1} = \llbracket p \rrbracket_{v_2}$.

Correction : Reformulons d'abord la définition de $\llbracket p \rrbracket_v$. On considère les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} NON &: \{0;1\} \rightarrow \{0;1\} \\ ET &: \{0;1\} \times \{0;1\} \rightarrow \{0;1\} \\ OU &: \{0;1\} \times \{0;1\} \rightarrow \{0;1\} \end{aligned}$$

définies selon les tables de vérité de la négation, de la conjonction et de la disjonction.

Alors la définition de $\llbracket p \rrbracket_v$ par induction sur la formule p peut s'exprimer ainsi :

- $\llbracket x \rrbracket_v = v(x)$
- $\llbracket \neg p \rrbracket_v = NON(\llbracket p \rrbracket_v)$,
- $\llbracket (p \wedge q) \rrbracket_v = ET(\llbracket p \rrbracket_v; \llbracket q \rrbracket_v)$,
- $\llbracket (p \vee q) \rrbracket_v = OU(\llbracket p \rrbracket_v; \llbracket q \rrbracket_v)$.

Par exemple, $\llbracket (\neg x \wedge y) \vee z \rrbracket_v = OU(ET(NON(v(x)); v(y)); v(z))$. Attention : $\neg; \wedge; \vee$ sont des objets *syntactiques* tandis que $NON; ET; OU$ sont des fonctions mathématiques, c'est-à-dire des objets *sémantiques*.

On prouve maintenant l'exercice 1 par induction. On fixe deux affectations quelconques v_1, v_2 . On définit la propriété $P(p)$: si $v_2(x) = v_1(x)$ pour tout $x \in \mathcal{V}(p)$, alors $\llbracket p \rrbracket_{v_1} = \llbracket p \rrbracket_{v_2}$.

1. soit p une variable z . Par définition, $\llbracket z \rrbracket_{v_1} = v_1(z)$. Si $v_2(x) = v_1(x)$ pour tout $x \in \mathcal{V}(p)$, puisque $z \in \mathcal{V}(p)$, on a $v_2(z) = v_1(z)$. Donc $\llbracket z \rrbracket_{v_1} = \llbracket z \rrbracket_{v_2}$.
2. soit p de la forme $\neg q$. Supposons que $v_2(x) = v_1(x)$ pour tout $x \in \mathcal{V}(p)$. On observe que $\mathcal{V}(p) = \mathcal{V}(q)$. Par hypothèse d'induction on a donc $\llbracket q \rrbracket_{v_1} = \llbracket q \rrbracket_{v_2}$. Alors

$$\begin{aligned} \llbracket \neg q \rrbracket_{v_1} &= NON(\llbracket q \rrbracket_{v_1}) \\ &\parallel \quad (\text{par hypothèse d'induction}) \\ \llbracket \neg q \rrbracket_{v_2} &= NON(\llbracket q \rrbracket_{v_2}) \end{aligned}$$

3. soit p de la forme $q \wedge r$. Supposons que $v_2(x) = v_1(x)$ pour tout $x \in \mathcal{V}(p)$. On observe que $\mathcal{V}(p) \supseteq \mathcal{V}(q)$ et $\mathcal{V}(p) \supseteq \mathcal{V}(r)$. On a donc que $v_2(x) = v_1(x)$ pour tout $x \in \mathcal{V}(q)$ et pour tout $x \in \mathcal{V}(r)$. Par hypothèse d'induction on a $\llbracket q \rrbracket_{v_1} = \llbracket q \rrbracket_{v_2}$ et $\llbracket r \rrbracket_{v_1} = \llbracket r \rrbracket_{v_2}$. Alors :

$$\begin{aligned} \llbracket (q \wedge r) \rrbracket_{v_1} &= ET(\llbracket q \rrbracket_{v_1}; \llbracket r \rrbracket_{v_1}) \\ &\parallel \quad \parallel \quad (\text{par hypothèse d'induction}) \\ \llbracket (q \wedge r) \rrbracket_{v_2} &= ET(\llbracket q \rrbracket_{v_2}; \llbracket r \rrbracket_{v_2}) \end{aligned}$$

4. le cas de la disjonction est complètement analogue.

Cela prouve par induction que pour ces deux affectations fixées v_1, v_2 telles que $v_1(x) = v_2(x)$ pour tout $x \in \mathcal{V}(p)$ et pour toute formule p , $\llbracket p \rrbracket_{v_1} = \llbracket p \rrbracket_{v_2}$. Mais les deux affectations sont deux affectations quelconques, donc cette propriété est vraie pour toute paire d'affectations v_1, v_2 telles que v_2 étend v_1 . Cela conclut notre preuve.

Exercice 2 [Pr uv du théorème 4.2 du cours] Montr z qu'un formul p st valid si t s ul - m nt si $v \models p$ pour tout affectation v av c $\text{supp}(v) \subseteq \mathcal{V}(p)$.

Correction : Deux méthodes :

1. – Le théorème 4.1 du cours appliqué à $\neg p$ nous donne l'équivalence suivante : la formule $\neg p$ est satisfiable si et seulement si il existe une affectation v avec $\text{supp}(v) \subseteq \mathcal{V}(\neg p) = \mathcal{V}(p)$ telle que $v \models \neg p$ (qui équivaut à $v \not\models p$).
 – Mais $\neg p$ est satisfiable si et seulement p n'est pas valide (Proposition 1).
 – Donc on a l'équivalence : p n'est pas valide si et seulement si il existe une affectation v avec $\text{supp}(v) \subseteq \mathcal{V}(p)$ telle que $v \not\models p$.
 – On prend la négation de l'équivalence au dessus : p est valide si et seulement si pour toute affectation v avec $\text{supp}(v) \subseteq \mathcal{V}(p)$, on a $v \models p$.
2. Preuve directe. Si p est valide, par définition, pour toute affectation v on a $v \models p$. En particulier, c'est vrai pour toute affectation v telle que $\text{supp}(v) \subseteq \mathcal{V}(p)$.
 Réciproquement, supposons que pour tout v telle que $\text{supp}(v) \subseteq \mathcal{V}(p)$ on a $v \models p$. Soit w une affectation quelconque. On définit une affectation v comme suit :

$$v(x) = \begin{cases} w(x) & \text{si } x \in \mathcal{V}(p) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Mais d'après la Proposition 2 (Exercice 1), puisque $v \models p$ et $v(x) = w(x)$ pour tout $x \in \mathcal{V}(p)$, on a aussi $w \models p$ ce qui conclut la preuve.

Definition 1 Soient p et q des formules propositionnelles.

- On dit qu q st une *conséquence* de p , t on écrit $p \models q$, si pour toute affectation v t ll qu $v \models p$ on a aussi qu $v \models q$.
- On dit qu p et q sont *équivalentes*, t on écrit $p \models q$, si $p \models q$ et $q \models p$.

Parfois on s'intéresse aussi à la notion de conséquence de tout un ns mbl de formules :

Definition 2 Soient $p \in \text{Form}$ un formul et $T \subseteq \text{Form}$ un ns mbl de formules. On dit qu p st une *conséquence* de T , noté $T \models p$, si pour toute affectation v t ll qu $v \models q$ pour tout $q \in T$ on a aussi qu $v \models p$.

- Exercice 3**
1. Montr r qu $\{q\} \models p$ ssi $q \models p$
 2. Montr r qu si $T \models p$ et $T \subseteq S$ alors $S \models p$
 3. Qu' st-c qu ça v ut dir qu $\emptyset \models p$?

Correction : Les deux premiers sont une facile conséquence des définitions. Si $\emptyset \models p$, par définition on a que pour toute affectation v , si v satisfait toutes les formules de \emptyset , alors v satisfait p . Mais il n'y a pas de formules dans \emptyset , donc n'importe quelle v satisfait toutes les formules de \emptyset . Et donc n'importe quelle v satisfait p . Cela signifie que p est valide.

Exercice 4 Soient q_1, q_2 des formules t ll s qu $q_1 \models q_2$, x_1, \dots, x_n des variables propositionnelles diffèrent s, et p_1, \dots, p_n des formules propositionnelles. Alors

$$q_1[x_1=p_1, \dots, x_n=p_n] \models q_2[x_1=p_1, \dots, x_n=p_n]$$

Correction :