

TD n°5

Satisfaisabilité des CNF et algorithme DPLL

Exercice 1 Montrer la Proposition 7 du chapitre 4 : Soit $\psi : Form \rightarrow N$ défini par récurrence :

- $\psi(x) = 2$ si $x \in V$
- $\psi((p_1 \wedge p_2)) = (\psi(p_1))^2 * \psi(p_2)$
- $\psi((p_1 \vee p_2)) = 2\psi(p_1) + \psi(p_2) + 1$
- $\psi(\neg p) = \psi(p)$

Alors pour tout formule $p \in Form$: Si p se transforme en q par une application d'une des règles ?? à ?? alors $\psi(p) > \psi(q)$.

$$X \wedge (Y \vee Z) \rightarrow (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \quad (1)$$

$$(X \vee Y) \wedge Z \rightarrow (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) \quad (2)$$

$$(X \wedge Y) \wedge Z \rightarrow X \wedge (Y \wedge Z) \quad (3)$$

$$(X \vee Y) \vee Z \rightarrow X \vee (Y \vee Z) \quad (4)$$

Exercice 2 Un clause de Horn est une clause (une disjonction de littéraux) qui contient au plus un littéral positif. Une formule de Horn est une formule en FNC dont les clauses sont des clauses de Horn.

1. Montrer que toute formule de Horn est équivalente à la conjonction éventuellement vide des clauses de Horn de la forme :

(a) x

(b) $\neg x_1 \vee \dots \vee \neg x_n$

(c) $\neg x_1 \vee \dots \vee \neg x_n \vee x_{n+1}$

où $n \geq 1$ et $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. On dit dans ce cas que la formule est réduite.

2. Montrer qu'une formule de Horn réduite qui ne contient pas de clauses de la forme (a) ou qui ne contient pas de clauses de la forme (b) est satisfaisable.
3. Donner une méthode efficace (temps polynomial par rapport à la taille de la formule) pour déterminer si une formule de Horn ϕ est satisfaisable.

Exercice 3 [Algorithme DPLL] Appliquer l'algorithme DPLL sur la formule suivante :

$$f = (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg w) \\ \wedge (\neg q \vee \neg r \vee \neg w) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (u \vee x) \\ \wedge (u \vee \neg x) \wedge (q \vee \neg u) \wedge (\neg r \vee \neg u)$$

Exercice 4 On considère la formule $E = ((y \wedge z) \rightarrow (x \leftrightarrow (\neg y \vee z)))$ où x, y et z sont des variables propositionnelles.

1. Déterminer une formule logique équivalente à E , écrite sans autres symboles de connecteur que \rightarrow et \leftrightarrow (en particulier, pas de \neg).
2. Donner un FND de E , aussi réduit que possible.
3. Montrer que les formules $(z \rightarrow (y \rightarrow (x \leftrightarrow (y \rightarrow z))))$ et $(z \rightarrow (y \rightarrow x))$ sont logiquement équivalentes.