

## TD n°1

### Syntaxe et raisonnement par induction sur les formules

**Exercice 1** [Prémier induction] Soit  $\phi$  une formule de la logique propositionnelle. On désigne par  $n(\phi)$  le nombre de variables de  $\phi$ , c'est-à-dire le nombre de répétitions. Par exemple :

$$n((x_1 \vee x_2)) = n((x_1 \wedge x_1)) = 2$$

Autrement dit,  $n(\phi)$  désigne le nombre d'*occurrences de variables* dans la formule  $\phi$ . Par ailleurs, on désigne par  $p(\phi)$  le nombre de parenthèses dans  $\phi$ . Par exemple :

$$p(x_1) = 0 \quad \text{et} \quad p((x_1 \wedge x_1)) = 2$$

Montrer par induction la propriété suivante :

*Propriété* : toute formule propositionnelle  $\phi \in \text{Form}$  vérifie  $n(\phi) - p(\phi) \leq 1$ .

**Exercice 2**  $\mathcal{V}$  est un ensemble fini de variables propositionnelles. On désigne par  $|M|_{\neg}$  le nombre de parenthèses ouvrantes, par  $|M|_{\neg}$  le nombre de parenthèses fermantes et par  $|M|_{\neg}$  le nombre de négations figurant dans une suite de symboles  $M$  (cf. cours). On appellera également  $|M|$  la longueur de  $M$ .

Montrer par induction la propriété suivante :

*Propriété* : toute formule propositionnelle  $M \in \text{Form}$  vérifie  $|M| = |M|_{\neg} + 2|M|_{\neg} + 2|M|_{\neg} + 1$

**Exercice 3** Appelons  $X$  l'ensemble fini de mots comportant le même nombre de parenthèses ouvrantes que de parenthèses fermantes (cf. cours :  $X = \{w \mid |w|_{\neg} = |w|_{\neg}\}$ ). Montrez que l'ensemble  $X$  satisfait les quatre propriétés de clôture des formules propositionnelles. Est-ce que  $X = \text{Form}$  ? Justifiez.

**Exercice 4** On définit l'ensemble  $E$  comme le plus petit ensemble de chaînes de caractères tel que

- la chaîne vide  $\epsilon$  appartient à  $E$  (1)
- si  $m \in E$ ,  $(m) \in E$  (2)

On suppose que cet ensemble existe et est bien unique.

Par ailleurs, on définit également l'ensemble  $F$  :

$$F = \{(a^n)^n \mid n \in \mathbf{N}\}$$

où  $a^n$  est le caractère  $a$  répété  $n$  fois.

- Montrer que  $F$  satisfait (1) et (2). En déduire que  $E \subseteq F$
- Montrer que  $F \subseteq E$  (pour chaque élément de  $F$ , on montrera qu'il appartient à  $E$  en le construisant explicitement à partir de (1) et (2))
- Conclure

**Exercice 5** Donner la définition par récurrence de la fonction qui renvoie le nombre de conjonctions d'une formule. Montrer par induction que pour toute formule propositionnelle, le nombre de parenthèses ouvrantes est plus grand que le nombre de conjonctions.

**Exercice 6** [Facultatif] Pour tout  $i \in \mathbf{N}$ , on construit l'ensemble  $F_i$  de la façon suivante :

- Si  $i = 0$ , on pose  $F_0 = \mathcal{V}$
- Si  $i > 0$ , on pose  $F_i = \neg F_{i-1} \cup (F_{i-1} \wedge F_{i-1}) \cup (F_{i-1} \vee F_{i-1}) \cup F_{i-1}$

où

$$\neg F_{i-1} = \{\neg f \mid f \in F_{i-1}\}$$

$$(F_{i-1} \wedge F_{i-1}) = \{(f_1 \wedge f_2) \mid f_1 \in F_{i-1}, f_2 \in F_{i-1}\}$$

$$(F_{i-1} \vee F_{i-1}) = \{(f_1 \vee f_2) \mid f_1 \in F_{i-1}, f_2 \in F_{i-1}\}$$

puis

$$F = \bigcup_{i \geq 0} F_i \tag{1}$$

Donnez quelques exemples de formules dans  $F_1$  et  $F_2$ .

Montrer que  $F$  vérifie les propriétés de clôture des formules propositionnelles :

- si  $f \in \mathcal{V}$ , alors  $f \in F$
- si  $f \in F$ , alors  $\neg f \in F$
- si  $f_1 \in F$  et  $f_2 \in F$ , alors  $(f_1 \wedge f_2) \in F$
- si  $f_1 \in F$  et  $f_2 \in F$ , alors  $(f_1 \vee f_2) \in F$

En déduire que  $Form \subseteq F$ .

Montrer également que  $F \subseteq Form$ .