

## Partiel

Samedi 13 Novembre 2010

Motivez bien vos reponses. On recommande de *bien lire* l'enonce d'un exercice avant de commencer a le resoudre. A cote de chaque exercice on donne, a titre indicatif, un bareme.

Tout document est autorise. Les telephones portables, comme tout autre moyen de communication vers l'exterieur, doivent être eteints. Le temps a disposition est de 2 heures.

### Exercice 1 [5 points]

{ Montrer que l'ensemble de connecteurs  $\{\rightarrow\}$  n'est pas fonctionnellement complet. Une maniere de prouver cela, est de de montrer par induction *sur l'ensemble des formules construites uniquement à l'aide des variables propositionnelles et de  $\rightarrow$*  que chacune de ces formules est satisfaite par l'attribution qui vaut constamment 1, et conclure.

{ Montrer que l'ensemble de connecteurs  $\{\rightarrow, \text{false}\}$ , ou **false** est la constante dont la valeur est 0 relativement a toute attribution, est complet.

**Correction** : Idee :  $\neg p \models p \rightarrow \text{false}$ , puis  $p \vee q \models \neg p \rightarrow q$  et on conclut car  $\{\neg, \vee\}$  est complet.

{ L'ensemble de connecteurs  $\{\rightarrow, \text{vrai}\}$  est-il complet ?

**Correction** : non, même preuve que le premier point.

### Exercice 2 [5 points]

1. Soit la fonction  $\phi: Form \rightarrow \mathbb{N}$  definie par recurrence :

$$\begin{aligned}\phi(x) &= 1 && \text{si } x \in V \\ \phi(\neg p) &= 0 \\ \phi((p \wedge q)) &= \phi(p) * \phi(q) \\ \phi((p \vee q)) &= \phi(p) + \phi(q)\end{aligned}$$

Quelle est la valeur de  $\phi(((\neg x \vee y) \wedge \neg z))$  ?

2. Montrer par induction que  $\phi(p) \geq 0$  pour tout  $p \in Form$ .

3. Soit  $f: Form \rightarrow Form$  la fonction qui enleve toutes les negations. Par exemple,

$$f(\neg(x \wedge \neg(y \vee \neg\neg x))) = (x \wedge (y \vee x))$$

Donner une definition recursive de la fonction  $f$ .

**Correction** :

$$\begin{aligned}f(x) &= x \\ f(\neg p) &= f(p) \\ f(p \wedge q) &= (f(p) \vee f(q)) \\ f(p \vee q) &= (f(p) \wedge f(q))\end{aligned}$$

4. Montrer par induction que  $\phi(f(p)) \geq \phi(p)$  pour tout  $p \in Form$ .

### Exercice 3 [5 points]

1. Montrer que  $((x \rightarrow y) \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y) \models ((x \rightarrow y) \vee z)$
2. Est-ce qu'on a que  $((x \rightarrow y) \vee z) \models (((x \rightarrow y) \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y))$  ?
3. Ecrire une formule equivalente a  $((x \rightarrow y) \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y)$  en utilisant seulement negation et conjonction.

**Exercice 4** [5 points] Ahmed, Barbara, Claudine, David, Esmahene, Frederic, Georg, Hugo, Ivanovitch, et Jian veulent partir en vacances. Ils ont trois voitures a leur disposition. Malheureusement, Jian n'aime pas Hugo, et Claudine n'aime pas Ivanovitch. On cherche une bonne repartition de toutes les personnes dans les trois voitures, c.-a-d. une repartition telle que quand quelqu'un n'aime pas une personne alors les deux ne se trouvent pas ensemble dans la même voiture.

1. Donner une modelisation de ce probleme comme formule propositionnelle en forme conjonctive normale telle qu'une solution de la formule correspond a une bonne repartition des personnes dans des voitures.
2. En plus, chaque voiture peut transporter quatre personnes au maximum. Donner une modelisation avec cette contrainte supplementaire. Il faut que la formule soit en forme conjonctive normale. Il s'agit de dire qu'est-ce qui change par rapport a la reponse a la question precedente.
3. Ahmed aime bien Georg et Jian, et Esmahene aime bien Frederic. Quand quelqu'un aime bien une personne alors il faut en plus que les deux personnes se trouvent dans la même voiture. Donner la modelisation en forme conjonctive normale avec cette contrainte supplementaire. Il s'agit de dire qu'est-ce qui change par rapport a la reponse a la question precedente. (ou par rapport a la question (1) dans le cas ou vous n'avez pas repondu a la question (2))

Pour les questions (2) et (3) utiliser imperativement la forme generale comme a la fin de la section 6.1 du poly (page 60). Pour la question (1) la forme generale est seulement conseillée. On note

{ L'ensemble des personnes :

$$P = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$$

{ L'ensemble des voitures :

$$V = \{1, 2, 3\}$$

{ Les paires de personnes qui ne s'aiment pas :

$$D = \{(J, H), (C, I)\}$$

{ Les paires de personnes qui s'aiment bien :

$$A = \{(A, G), (A, J), (E, F)\}$$

**Correction** : Variables :  $\{[p, v] | p \in P, v \in V\}$

1.

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{p \in P} \bigwedge_{v \in V} \neg [p, v] \\ & \bigwedge_{p \in P} \bigwedge_{v_1 \in V} \bigwedge_{v_2 \in V} (\neg [p, v_1] \vee \neg [p, v_2]) \\ & \bigwedge_{(x, y) \in D} \bigwedge_{v \in V} ([x, v] \vee [y, v]) \end{aligned}$$

2. Ajouter :

$$\bigwedge_{p_1 \in P} \bigwedge_{p_2 \in P} \bigwedge_{p_3 \in P} \bigwedge_{p_4 \in P} \bigwedge_{p_5 \in P} \bigwedge_{v \in V} (\neg[p_1, v] \vee \neg[p_2, v] \vee \neg[p_3, v] \vee \neg[p_4, v] \vee \neg[p_5, v])$$

3. L'astuce consiste en exclure que deux personnes qui s'aiment se trouvent dans deux voitures différentes. Ajouter :

$$\bigwedge_{(x,y) \in A} \bigwedge_{v_1 \in V} \bigwedge_{\substack{v_2 \in V \\ v_1 \neq v_2}} (\neg[x, v_1] \vee \neg[y, v_2])$$