

TD n 3

Systèmes de connecteurs

Rappel sur la notion de complétude d'un ensemble de connecteurs introduite en cours. On peut formaliser cette notion comme suit : Un ensemble de connecteurs est complet si pour tout nombre naturel n , et pour toute fonction f

$$f: \underbrace{\{0,1\} \times \dots \times \{0,1\}}_{n \text{ fois}} \rightarrow \{0,1\}$$

on peut trouver une formule propositionnelle p , avec $V(p) = \{x_1, \dots, x_n\}$ qui « réalise » f , c'est-à-dire telle que

$$\llbracket p \rrbracket[x_1 \mapsto b_1, \dots, x_n \mapsto b_n] = f(b_1, \dots, b_n)$$

pour tous les valuations booléennes $b_1, \dots, b_n \in \{0,1\}^n$.

Exercice 1 1. Montrer que \neg, \wedge, \vee sont fonctionnellement complets.

2. Montrer que $\neg, \rightarrow, \wedge$ sont fonctionnellement complets.

Exercice 2 Montrer que l'ensemble de connecteurs \neg, \wedge, \vee n'est pas complet. Pour cela vous devez trouver un entier n et une fonction f de $\{0,1\}^n$ dans $\{0,1\}$, telle qu'il n'y a pas de formule p construite avec \neg, \wedge, \vee , telle que

$$\llbracket p \rrbracket[x_1 \mapsto b_1, \dots, x_n \mapsto b_n] = f(b_1, \dots, b_n)$$

pour toutes les valuations booléennes $b_1, \dots, b_n \in \{0,1\}^n$. Pour prouver qu'une telle formule n'existe pas, on raisonnera par induction sur l'ensemble des formules construites uniquement avec \neg, \wedge, \vee .

Exercice 3 Montrer que \neg, \rightarrow n'est pas fonctionnellement complet. Pour cela il s'agira de montrer par induction sur l'ensemble des formules construites uniquement grâce à \neg, \rightarrow , que pour toute formule comportant deux variables propositionnelles, le nombre d'attributions qui la satisfont est toujours pair.

Exercice 4 Montrer que l'opérateur \leftrightarrow est fonctionnellement complet.