

## TD n°1 - Correction

### Syntaxe et raisonnement par induction sur les formules

**Exercice 1** [Prmière induction] Soit  $\phi$  une formule de la logique propositionnelle. On désigne par  $n(\phi)$  le nombre de variables de  $\phi$ , ne tenant compte des éventuelles répétitions. Par exemple :

$$n((x_1 \vee x_2)) = n((x_1 \wedge x_1)) = 2$$

Autrement dit,  $n(\phi)$  désigne le nombre d'*occurrences de variables* dans la formule  $\phi$ . Par ailleurs, on désigne par  $p(\phi)$  le nombre de parenthèses dans  $\phi$ . Par exemple :

$$p(x_1) = 0 \quad \text{et} \quad p((x_1 \wedge x_1)) = 2$$

Montrer par induction la propriété suivante :

*Propriété* : toute formule propositionnelle  $\phi \in \text{Form}$  vérifie  $n(\phi) - p(\phi) \leq 1$ .

#### Correction :

Par induction. On rappelle que pour prouver par induction que une propriété  $P$  est vraie pour toute formule, on doit montrer que :

1. tout élément de l'ensemble de variables  $\mathcal{V}$  a la propriété  $P$ ,
2. si on suppose que  $\psi$  satisfait  $P$  alors  $\neg\psi$  satisfait  $P$ ,
3. si on suppose que  $\psi$  et  $\chi$  satisfont  $P$  alors  $(\psi \wedge \chi)$  satisfait  $P$ ,
4. si on suppose que  $\psi$  et  $\chi$  satisfont  $P$  alors  $(\psi \vee \chi)$  satisfait  $P$ ,

Dans cet exercice la propriété  $P$  est «  $n(\phi) - p(\phi) \leq 1$  ». On suit donc le schéma présenté ci-dessus.

- soit  $w \in \mathcal{V}$ . Alors  $n(w) = 1$  et  $p(w) = 0$ . Donc  $w$  a la propriété  $P$ .
- soit  $\psi$  une formule qui vérifie  $P$ . Il s'agit d'une **hypothèse d'induction**, à partir de laquelle nous souhaitons démontrer que  $\neg\psi$  vérifie  $P$ . On a  $n(\neg\psi) = n(\psi)$  et  $p(\neg\psi) = p(\psi) + 1$ .  
Par hypothèse d'induction,  $\psi$  vérifie  $P$ , donc  $n(\psi) - p(\psi) \leq 1$ , soit en remplaçant,  $n(\neg\psi) - p(\neg\psi) \leq 1 + 1 = 2$ . On en déduit que  $\neg\psi$  vérifie  $P$ .
- soient  $\psi, \chi$  deux formules qui vérifient  $P$ . On a  $n(\psi \wedge \chi) = n(\psi) + n(\chi)$  et  $p(\psi \wedge \chi) = p(\psi) + p(\chi) + 2$ .  
Par ailleurs, comme  $\psi, \chi$  vérifient  $P$ ,  $n(\psi) - p(\psi) \leq 1$  et  $n(\chi) - p(\chi) \leq 1$ .  
En sommant ces 2 inégalités, on obtient :

$$n(\psi) + n(\chi) - (p(\psi) + p(\chi)) \leq 2$$

puis

$$n(\psi \wedge \chi) - (p(\psi \wedge \chi) - 2) \leq 2$$

$$n(\psi \wedge \chi) - p(\psi \wedge \chi) \leq 0$$

qui implique  $n(\psi \wedge \chi) - p(\psi \wedge \chi) \leq 1$ . Donc,  $(\psi \wedge \chi)$  vérifie  $P$ .

- On obtient que  $(\psi \vee \chi)$  vérifie  $P$  exactement de la même façon.

**Exercice 2**  $\mathcal{V}$  est un ensemble fini de variables propositionnelles. On désigne par  $|M|_+$  le nombre de parenthèses ouvrantes, par  $|M|_-$  le nombre de parenthèses fermantes et par  $|M|_\neg$  le nombre de négations figurant dans une suite de symboles  $M$  (cf.cours). On appellera également  $|M|$  la longueur de  $M$ .

Montrer par induction la propriété suivante :

**Propriété :** tout formule propositionnelle  $M \in Form$  vérifie  $|M| = |M|_{\neg} + 2|M|_{\wedge} + 2|M|_{\vee} + 1$

**Correction :**

Par induction. On rappelle que pour prouver par induction que une propriété  $P$  est vraie pour toute formule, on doit montrer que :

1. tout élément de  $\mathcal{V}$  a la propriété  $P$ ,
2. si on suppose que  $\psi$  satisfait  $P$  alors  $\neg\psi$  satisfait  $P$ ,
3. si on suppose que  $\psi$  et  $\chi$  satisfont  $P$  alors  $(\psi \wedge \chi)$  satisfait  $P$ ,
4. si on suppose que  $\psi$  et  $\chi$  satisfont  $P$  alors  $(\psi \vee \chi)$  satisfait  $P$ ,

Dans cet exercice la propriété  $P$  est «  $|M| = |M|_{\neg} + 2|M|_{\wedge} + 2|M|_{\vee} + 1$  ». On suit donc le schéma présenté ci-dessus.

- soit  $w \in \mathcal{V}$ . Alors  $|w|_{\neg} = |w|_{\wedge} = |w|_{\vee} = 0$  et  $|w| = 1$ . Donc  $w$  a la propriété  $P$ .
- soit  $p$  une formule qui vérifie  $P$ . Il s'agit d'une **hypothèse d'induction**, à partir de laquelle nous souhaitons démontrer que  $\neg p$  vérifie  $P$ . On a  $|\neg p|_{\neg} = |p|_{\neg} + 1$ ,  $|\neg p|_{\wedge} = |p|_{\wedge}$  et  $|\neg p|_{\vee} = |p|_{\vee}$ . Par ailleurs,  $|\neg p| = |p| + 1$ .

Par hypothèse d'induction,  $p$  vérifie  $P$ , donc  $|p| = |p|_{\neg} + 2|p|_{\wedge} + 2|p|_{\vee} + 1$ , soit en remplaçant,  $|\neg p| - 1 = |\neg p|_{\neg} - 1 + 2|\neg p|_{\wedge} + 2|\neg p|_{\vee} + 1$ .

On en déduit que  $|\neg p| = |\neg p|_{\neg} + 2|\neg p|_{\wedge} + 2|\neg p|_{\vee} + 1$ , c'est à dire  $\neg p$  vérifie  $P$ .

- soient  $p, q$  deux formule qui vérifient  $P$ . On a  $|(p \wedge q)|_{\neg} = |p|_{\neg} + |q|_{\neg}$ ,  $|(p \wedge q)|_{\wedge} = |p|_{\wedge} + |q|_{\wedge} + 1$ ,  $|(p \wedge q)|_{\vee} = |p|_{\vee} + |q|_{\vee}$  et  $|(p \wedge q)| = |p| + |q| + 3$

Par ailleurs, comme  $p, q$  vérifient  $P$ ,  $|p| = |p|_{\neg} + 2|p|_{\wedge} + 2|p|_{\vee} + 1$  et  $|q| = |q|_{\neg} + 2|q|_{\wedge} + 2|q|_{\vee} + 1$

En sommant ces 2 égalités, on obtient :

$$|p| + |q| = |p|_{\neg} + |q|_{\neg} + 2|p|_{\wedge} + 2|q|_{\wedge} + 2|p|_{\vee} + 2|q|_{\vee} + 2$$

puis

$$\begin{aligned} |(p \wedge q)| &= 3 + |p|_{\neg} + |q|_{\neg} + 2|p|_{\wedge} + 2|q|_{\wedge} + 2|p|_{\vee} + 2|q|_{\vee} + 2 \\ &= 3 + |(p + q)|_{\neg} + 2|(p + q)|_{\wedge} - 2 + 2|(p + q)|_{\vee} - 2 + 2 \\ &= |(p + q)|_{\neg} + 2|(p + q)|_{\wedge} + 2|(p + q)|_{\vee} + 1 \end{aligned}$$

donc  $(p \wedge q)$  vérifie  $P$ .

- On obtient que  $(p \vee q)$  vérifie  $P$  exactement de la même façon.

**Exercice 3** Apprions  $X$  l'ensemble des mots comportant le même nombre de parenthèses ouvrantes qu'il y a de parenthèses fermantes (cf. cours :  $X = \{w \mid |w|_{\wedge} = |w|_{\vee}\}$ ). Montrer que l'ensemble  $X$  satisfait les quatre propriétés de clôture des formules propositionnelles. Est-ce que  $X = Form$ ? Justifier.

**Correction :**

- Propriété 1 :  $\mathcal{V} \subseteq X$ . Tout élément  $w$  de  $\mathcal{V}$  se trouve dans  $X$ , car  $|w|_{\wedge} = |w|_{\vee} = 0$ .
- Propriété 2 : Soit  $x$  un mot de  $X$ .  $x$  a le même nombre de parenthèses ouvrantes que de parenthèses fermantes. Il en est donc de même pour  $\neg x$ .
- Propriétés 3 et 4 : Soit  $\alpha \in \{\wedge, \vee\}$ . Soient  $w_1$  et  $w_2$  des mots de  $X$ .  $|(w_1 \alpha w_2)|_{\wedge} = |w_1|_{\wedge} + |w_2|_{\wedge} + 1$ .

Comme  $|w_1|_{\wedge} = |w_1|_{\vee}$ ,  $|w_2|_{\wedge} = |w_2|_{\vee}$ ,  $|w_1|_{\wedge} + |w_2|_{\wedge} + 1 = |w_1|_{\vee} + |w_2|_{\vee} + 1$  donc  $(w_1 \alpha w_2) \in X$

Exemples de mots dans  $X$  et pas dans  $Form$  :  $()$ ,  $((\wedge p))$ .

**Exercice 4** On définit l'ensemble  $E$  comme l'ensemble des chaînes de caractères telles que

- la chaîne vide  $\epsilon$  appartient à  $E$  (1)
- si  $m \in E$ ,  $(m) \in E$  (2)

On suppose que c t ns mbl exist t st bi n uniqu .  
Par aill urs, on définit égal m nt l' ns mbl  $F$  :

$$F = \{(^n)^n | n \in \mathbf{N}\}$$

où  $a^n$  st l caractèr  $a$  répété  $n$  fois.

- Montr r qu  $F$  satisfait (1) t (2). En déduir qu  $E \subseteq F$
- Montr r qu  $F \subseteq E$  (pour chaque élém nt d  $F$ , on montr ra qu'il apparti nt à  $E$  n l construisant xplicit m nt à partir d (1) t (2))
- Conclur

**Correction :**

- Si on prend  $n = 0$  dans la définition de  $F$ , on obtient le mot vide. Donc  $F$  vérifie (1).
- Soit  $m \in F$ . Il existe  $n \in \mathbf{N}$  tel que  $m = (^n)^n$ . Donc on peut écrire  $(m) = ((^n)^n) = (^{n+1})^{n+1} \in F$ . Donc  $F$  vérifie (2).
- $E$  étant le plus petit ensemble vérifiant (1) et (2), on a donc bien  $E \subset F$ .
- Soit  $m \in F$ .  $m = (^n)^n$  pour un certain  $n$ . La règle (1) nous dit que le mot vide appartient à  $E$ . La règle (2) appliquée  $n$  fois nous dit que le mot  $(^n)^n = m$  appartient à  $E$ . Donc  $F \subset E$ .
- On déduit des deux points précédents que  $F = E$ .

**Exercice 5** Donn r la définition par récurrence d la fonction qui r nvoi l nombre d conjonctions d'un formul . Montr r par induction qu pour tout formul propositionnell , l nombre d par nthèss ouvrant st plus grand qu l nombre d conjonctions.

**Correction :** La fonction  $\text{nbconj}$  est définie comme suit :

1.  $\text{nbconj}(x) = 0$  si  $x \in V$
2.  $\text{nbconj}(\neg p) = \text{nbconj}(p)$
3.  $\text{nbconj}((p \wedge q)) = 1 + \text{nbconj}(p) + \text{nbconj}(q)$
4.  $\text{nbconj}((p \vee q)) = \text{nbconj}(p) + \text{nbconj}(q)$

La propriété  $P$  qu'on doit prouver est  $\text{nbconj}(p) \leq |p|_{\zeta}$ , pour toute formule propositionnelle  $p$  :

- soit  $x \in V$ . Alors  $\text{nbconj}(x) = 0 = |x|_{\zeta}$ . Donc  $x$  a la propriété  $P$ .
- soit  $p$  une formule qui vérifie  $P$ . On a que  $\text{nbconj}(\neg p) = \text{nbconj}(p)$  et  $|\neg p|_{\zeta} = |p|_{\zeta}$ . L'hypothèse d'induction dit que  $\text{nbconj}(p) \leq |p|_{\zeta}$ . Donc,  $\text{nbconj}(\neg p) \leq |\neg p|_{\zeta}$ , c'est à dire  $\neg p$  vérifie  $P$ .
- soit  $p$  et  $q$  deux formules qui vérifient  $P$ . Par définition,  $\text{nbconj}((p \wedge q)) = 1 + \text{nbconj}(p) + \text{nbconj}(q)$  et  $|(p \wedge q)|_{\zeta} = 1 + |p|_{\zeta} + |q|_{\zeta}$ . Par l'hypothèse d'induction, on a que  $\text{nbconj}(p) \leq |p|_{\zeta}$  et  $\text{nbconj}(q) \leq |q|_{\zeta}$ . En sommant ces 2 inégalités, on obtient  $\text{nbconj}(p) + \text{nbconj}(q) \leq |p|_{\zeta} + |q|_{\zeta}$  qui implique  $\text{nbconj}((p \wedge q)) \leq |(p \wedge q)|_{\zeta}$ . Donc,  $(p \wedge q)$  vérifie  $P$ .
- soit  $p$  et  $q$  deux formules qui vérifient  $P$ . Par définition,  $\text{nbconj}((p \vee q)) = \text{nbconj}(p) + \text{nbconj}(q)$  et  $|(p \vee q)|_{\zeta} = 1 + |p|_{\zeta} + |q|_{\zeta}$ . Par l'hypothèse d'induction, on a que  $\text{nbconj}(p) \leq |p|_{\zeta}$  et  $\text{nbconj}(q) \leq |q|_{\zeta}$ . En sommant ces 2 inégalités, on obtient  $\text{nbconj}(p) + \text{nbconj}(q) \leq |p|_{\zeta} + |q|_{\zeta}$  qui implique  $\text{nbconj}((p \vee q)) \leq |(p \vee q)|_{\zeta}$ . Donc,  $(p \vee q)$  vérifie  $P$ .

**Exercice 6** [Facultatif] Pour tout  $i \in \mathbf{N}$ , on construit l' ns mbl d mots  $F_i$  d la façon suivant :

- Si  $i = 0$ , on pos  $F_0 = \mathcal{V}$
- Si  $i > 0$ , on pos  $F_i = \neg F_{i-1} \cup (F_{i-1} \wedge F_{i-1}) \cup (F_{i-1} \vee F_{i-1}) \cup F_{i-1}$

où

$$\neg F_{i-1} = \{\neg f | f \in F_{i-1}\}$$

$$(F_{i-1} \wedge F_{i-1}) = \{(f_1 \wedge f_2) | f_1 \in F_{i-1}, f_2 \in F_{i-1}\}$$

$$(F_{i-1} \vee F_{i-1}) = \{(f_1 \vee f_2) | f_1 \in F_{i-1}, f_2 \in F_{i-1}\}$$

puis

$$F = \bigcup_{i \geq 0} F_i \quad (1)$$

Donnez qu'il y a des exemples de formules dans  $F_1$  et  $F_2$ .

Montrer que  $F$  vérifie les propriétés de clôture des formules propositionnelles :

- si  $f \in V$ , alors  $f \in F$
- si  $f \in F$ , alors  $\neg f \in F$
- si  $f_1 \in F$  et  $f_2 \in F$ , alors  $(f_1 \wedge f_2) \in F$
- si  $f_1 \in F$  et  $f_2 \in F$ , alors  $(f_1 \vee f_2) \in F$

En déduire que  $Form \subseteq F$ .

Montrer également que  $F \subseteq Form$ .

**Correction :** Il faut commencer par une observation : pour tout  $i, j$ , si  $i \leq j$  alors  $F_i \subseteq F_j$ . On prouve cela par induction sur  $i - j$ . Si  $j = i$  alors  $F_i = F_j$  et donc  $F_i \subseteq F_j$ . Supposons que  $F_i \subseteq F_{i+n}$ . Par définition  $F_{i+n+1} = \neg F_{i+n} \cup (F_{i+n} \wedge F_{i+n}) \cup (F_{i+n} \vee F_{i+n}) \cup F_{i+n}$ . En particulier  $F_{i+n} \subseteq F_{i+n+1}$ . Donc  $F_i \subseteq F_{i+n} \subseteq F_{i+n+1}$ .

Maintenant on montre que  $Form \subseteq F$  :

- si  $f \in V$ , alors  $f \in F_0$  et donc  $f \in F$ .
- si  $f \in F$ , alors il existe  $i$  tel que  $f \in F_i$  donc  $\neg f \in F_{i+1}$  et donc  $\neg f \in F$ .
- si  $f_1 \in F$  et  $f_2 \in F$ , alors ils existent  $i_1$  et  $i_2$  tels que  $f_1 \in F_{i_1}$  et  $f_2 \in F_{i_2}$ . *Sans perte de généralité* on suppose que  $i_1 \leq i_2$ . Par l'observation précédente on a  $F_{i_1} \subseteq F_{i_2}$ . Donc  $f_1, f_2 \in F_{i_2}$ . Par définition  $(f_1 \wedge f_2), (f_1 \vee f_2) \in F_{i_2+1}$  et donc  $(f_1 \wedge f_2), (f_1 \vee f_2) \in F$ .

Du fait que  $Form$  est le plus petit ensemble qui satisfait ces propriétés de clôture, on conclut  $Form \subseteq F$ . Pour prouver que  $F \subseteq Form$ , on prouve par induction sur  $i$  que pour tout  $i$ ,  $F_i \subseteq Form$ . On laisse les détails au lecteur.