

## TD n°5

### Modélisation et algorithme DPLL

#### Exercice 1 [Modélisation : Photo de groupe]

On veut prendre une photo de groupe avec Mari, Sofian, Pawl, et Kim. Pour prendre la photo, les personnes sont à placer sur une ligne, une à côté de l'autre. Mari veut absolument être placé à côté de Pawl et à côté de Kim, et Kim veut absolument être placé à côté de Sofian. Sofian et Pawl n'ont pas exprimé une préférence.

1. Construire une formule propositionnelle qui est vraie si et seulement si un tel placement existe. Vous avez le droit d'écrire une formule qui n'est pas en forme conjonctive normale. Procédure recommandée : construire d'abord une formule qui correspond à un placement des quatre personnes sur une ligne, puis une deuxième formule qui exprime qui doit être placé à côté de qui.
2. On généralise maintenant le problème de la question (1) : On a donné un groupe  $G$  de  $n$  personnes, et une fonction  $\nu$  qui donne pour chaque personne du groupe un ensemble de voisins demandés (qui peut être vide). Pour l'exemple de la question (1) on aurait

$$\begin{aligned} n &= 4 \\ G &= \{\text{Mari}; \text{Sofian}; \text{Pawl}; \text{Kim}\} \\ \nu(\text{Mari}) &= \{\text{Pawl}; \text{Kim}\} \\ \nu(\text{Kim}) &= \{\text{Sofian}\} \\ \nu(\text{Sofian}) &= \nu(\text{Pawl}) = \emptyset \end{aligned}$$

Donner la construction générale de la formule propositionnelle qui est vraie si et seulement si un placement des personnes existe qui satisfait tous les souhaits.

#### Exercice 2 [Modélisation : Sudoku]

Un jeu de sudoku de côté  $n$  est constitué d'un grill carré de dimension  $n \times n$ . Chaque case du grill peut contenir une valeur de 1 à  $n$ . L'affectation des cases doit satisfaire les contraintes suivantes :

1. Contrainte sur les *lignes* : chaque valeur de 1 à  $n$  doit apparaître exactement une fois sur chaque ligne.
2. Contrainte sur les *colonnes* : chaque valeur de 1 à  $n$  doit apparaître exactement une fois sur chaque colonne.
3. Contrainte de *grille partiellement remplie* : certaines cases doivent contenir une valeur prédéfinie.

Un grill de sudoku résolu se peut être encodé à l'aide d'une affectation  $\nu_s$  au sens de la logique propositionnelle. Pour chaque case du grill, de coordonnées  $(i;j)$ , et pour chaque valeur  $k$  on aura une variable propositionnelle  $x_{i,j,k}$ . La variable  $x_{i,j,k}$  appartenait au support de  $\nu_s$  si et seulement si la valeur  $k$  se trouve dans la case de coordonnées  $(i;j)$ .

Il faut encoder les trois contraintes (de ligne, de colonne, de grille partiellement remplie) sous forme de formules de la logique propositionnelle. Un tel encodage est correct si tous les solutions du grill correspondent précisément aux affectations qui satisfont les formules.

**Exercice 3** [Algorithm DPLL]

Appliquez l'algorithme DPLL sur la formule suivante :

$$f = (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg w) \\ \wedge (\neg q \vee \neg r \vee \neg w) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (u \vee x) \\ \wedge (u \vee \neg x) \wedge (q \vee \neg u) \wedge (\neg r \vee \neg u)$$

**Exercice 4** [Clauses de Horn, optionnel]

Une clause de Horn est une clause disjonctive d'une des formes :

1.  $x$
2.  $\neg x_1 \vee \dots \vee \neg x_n$
3.  $\neg x_1 \vee \dots \vee \neg x_n \vee x_{n+1}$

où  $n \geq 1$  et  $x_i \neq x_j$  si  $i \neq j$ .

1. Montrez qu'une formule de Horn est satisfaisable si et seulement si elle ne contient pas de clause de la forme (1) ou qui ne contient pas de clause de la forme (2) et satisfaisable.
2. Donnez une méthode efficace (temps polynomial par rapport à la taille de la formule) pour déterminer si une formule de Horn est satisfaisable.

**Exercice 5** [optionnel] On considère la formule  $E = ((y \wedge z) \rightarrow (x \leftrightarrow (\neg y \vee z)))$  où  $x, y$  et  $z$  sont des variables propositionnelles.

1. Déterminez une formule logique équivalente à  $E$ , écrite sans autres symboles de connecteurs que  $\rightarrow$  et  $\leftrightarrow$  (en particulier, pas de  $\neg$ ).
2. Donnez une DNF de  $E$ , aussi réduite que possible.
3. Montrez que les formules  $(z \rightarrow (y \rightarrow (x \leftrightarrow (y \rightarrow z))))$  et  $(z \rightarrow (y \rightarrow x))$  sont logiquement équivalentes.