

TD n°4 - Correction

Modélisation et formes normales

Exercice 1 [Modélisation]

1. On v ut pr ndr un photo d group av c Mari , Sofin , Paw l, t Kim. Pour pr ndr la photo, l s p rsonn s sont à plac r sur un lign , un à côté d l'autr . Mari v ut absolument être placé à côté d Paw l t à côté d Kim, t Kim v ut absolument être placé à côté d Sofin . Sofin t Paw l n'ont pas xprimé un préférenc .

Construire un formul propositionnel qui st vrai si t s ul m nt si un t l plac m nt xist . Vous av z l droit d'écrire un formul qui n' st pas n form conjonctiv normal . Procéder nd ux t mps : construire d'abord un formul qui correspond à un plac m nt d s quatr p rsonn s sur un lign , puis un d uxièm formul qui xprim qui doit être placé à côté d qui.

2. On généralis maint nant l problèm d la qu stion (1) : On a donné un group G d n p rsonn s, t un fonction v qui donn pour chaque p rsonn du group un ns mbl d voisins d mandés (qui p ut être vid). Pour l' x mpl d la qu stion (1) on aurait

$$\begin{aligned} n &= 4 \\ G &= \{\text{Mari}, \text{Sofin}, \text{Paw l}, \text{Kim}\} \\ v(\text{Mari}) &= \{\text{Paw l}, \text{Kim}\} \\ v(\text{Kim}) &= \{\text{Sofin}\} \\ v(\text{Sofin}) = v(\text{Paw l}) &= \emptyset \end{aligned}$$

Donner la construction général d la formul propositionnel qui st vrai si t s ul m nt un plac m nt d s p rsonn s xist qui satisfait tous l s souhaits.

Correction : Pour l'exemple : Une variable est une paire d'un nom et d'une place. On a donc 16 variables. La formule qui décrit un placement :

$$\begin{aligned} &([M, 1] \vee [M, 2] \vee [M, 3] \vee [M, 4]) \\ \wedge &([C, 1] \vee [C, 2] \vee [C, 3] \vee [C, 4]) \\ \wedge &([P, 1] \vee [P, 2] \vee [P, 3] \vee [P, 4]) \\ \wedge &([J, 1] \vee [J, 2] \vee [J, 3] \vee [J, 4]) \\ \wedge &(\neg[M, 1] \vee \neg[M, 2]) \wedge (\neg[M, 1] \vee \neg[M, 3]) \wedge (\neg[M, 1] \vee \neg[M, 4]) \wedge (\neg[M, 2] \vee \neg[M, 3]) \wedge (\neg[M, 2] \vee \neg[M, 4]) \wedge (\neg[M, 3] \vee \neg[M, 4]) \\ \wedge &(\neg[C, 1] \vee \neg[C, 2]) \wedge (\neg[C, 1] \vee \neg[C, 3]) \wedge (\neg[C, 1] \vee \neg[C, 4]) \wedge (\neg[C, 2] \vee \neg[C, 3]) \wedge (\neg[C, 2] \vee \neg[C, 4]) \wedge (\neg[C, 3] \vee \neg[C, 4]) \\ \wedge &(\neg[P, 1] \vee \neg[P, 2]) \wedge (\neg[P, 1] \vee \neg[P, 3]) \wedge (\neg[P, 1] \vee \neg[P, 4]) \wedge (\neg[P, 2] \vee \neg[P, 3]) \wedge (\neg[P, 2] \vee \neg[P, 4]) \wedge (\neg[P, 3] \vee \neg[P, 4]) \\ \wedge &(\neg[J, 1] \vee \neg[J, 2]) \wedge (\neg[J, 1] \vee \neg[J, 3]) \wedge (\neg[J, 1] \vee \neg[J, 4]) \wedge (\neg[J, 2] \vee \neg[J, 3]) \wedge (\neg[J, 2] \vee \neg[J, 4]) \wedge (\neg[J, 3] \vee \neg[J, 4]) \end{aligned}$$

Puis pour les contraintes :

$$\begin{aligned} &([(P, 1] \wedge [M, 2] \wedge [J, 3]) \vee ([P, 3] \wedge [M, 2] \wedge [J, 1]) \vee ([P, 2] \wedge [M, 3] \wedge [J, 4]) \vee ([P, 4] \wedge [M, 3] \wedge [J, 2])] \\ \wedge &([(C, 1] \wedge [J, 2]) \vee ([C, 2] \wedge [J, 3]) \vee ([C, 3] \wedge [J, 4]) \vee ([J, 1] \wedge [C, 2]) \vee ([J, 2] \wedge [C, 3]) \vee ([J, 3] \wedge [C, 4])] \end{aligned}$$

Dans le cas général :

$$\begin{aligned}
& \bigwedge_{p \in G} \bigvee_{1 \leq i \leq n} [p, i] \wedge \bigwedge_{p \in G} \bigwedge_{1 \leq i < n} \bigwedge_{i < j \leq n} \neg([p, i] \wedge [p, j]) \\
& \wedge \bigwedge_{v(p)=\{q\}} \bigvee_{1 \leq i < n} ([p, i] \wedge [q, i+1]) \vee ([q, i] \wedge [p, i+1]) \\
& \wedge \bigwedge_{v(p)=\{q,r\}} \bigvee_{1 \leq i < n} ([q, i-1] \wedge [p, i] \wedge [r, i+1]) \vee ([r, i-1] \wedge [p, i] \wedge [q, i+1]) \\
& \wedge \bigwedge_{card(p) > 2} \mathbf{false}
\end{aligned}$$

Exercice 2 Ahmed, Bruno, Chen et Dimitri habitent le même bâtiment dans quatre étages différents. Tous ont un animal différent. Ahmed n'aime pas les chats, Chen habite juste au-dessous de Bruno. Celui qui a le poisson habite au rez-de-chaussée. Ahmed et Dimitri n'habitent pas un juste au-dessous de l'autre. Celui qui a le lapin habite à un étage plus haut que Bruno. Exprimez ces contraintes en logique propositionnelle et dites qui a le serin.

Correction : La variable $x_{A,2}$ signifie que Ahmed habite au deuxième étage. La variable $y_{B,l}$ signifie que Bruno a un lapin.

Toute personne habite quelque part :

$$H_X = \bigvee_{1 \leq i \leq 4} x_{X,i}$$

Toute personne habite dans un seul appartement :

$$H1_X = \bigwedge_{1 \leq i \leq 4} (x_{X,i} \rightarrow \bigwedge_{h \neq i} \neg x_{X,h})$$

Tout appartement a une personne :

$$App_i = \bigvee_{X=A,B,C,D} x_{X,i}$$

Toute personne a un animal :

$$A_X = \bigvee_{a=c,l,p,s} y_{X,a}$$

Toute personne a un seul animal :

$$AU_X = \bigwedge_{a=c,l,p,s} (y_{X,a} \rightarrow \bigwedge_{b \neq a} \neg y_{X,b})$$

Tout animal a une personne :

$$An_a = \bigvee_{X=A,B,C,D} y_{X,a}$$

Ahmed n'aime pas les chats : $\neg y_{A,c}$.

Chen habite juste au-dessous de Bruno :

$$\bigvee_{1 \leq i \leq 3} (x_{C,i} \wedge x_{B,i+1})$$

Celui qui a le poisson habite au rez-de-chaussée :

$$\bigwedge_{X=A,B,C,D} (y_{X,p} \rightarrow x_{X,1})$$

Ahmed et Dimitri n'habitent pas un juste au dessous de l'autre :

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq 3} (x_{D,i} \rightarrow \neg x_{A,i+1}) \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq 3} (x_{A,i} \rightarrow \neg x_{D,i+1})$$

Celui qui a le lapin habite à un étage plus haut que Bruno :

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq 3} \bigwedge_{X=A,B,C,D} ((y_{X,i} \wedge x_{B,i}) \rightarrow \bigvee_{j>i} x_{X,j})$$

Qui a le serin ? Chen et Bruno habitent juste en dessous de l'autre et Ahmed et Dimitri sont séparés par au moins une personne, donc Ahmed et Dimitri logent aux étages 1 et 4, Chen occupe le deuxième étage et Bruno le troisième. Celui qui occupe le quatrième a donc le lapin et celui qui occupe l'étage 1 a le poisson. C'est donc Bruno ou Chen qui ont le serin.

Exercice 3 [P tit problème d synthèse] Un coffre fort est muni de n serrures se peut être ouvert lorsqu'elles sont ouvertes simultanément. Cinq personnes : a, b, c, d, e doivent recevoir des clés correspondant à certaines des serrures. Chaque clé peut être disponible en autant d'exemplaires qu'on souhaite.

Choisissez pour n la plus petite valeur possible, et associez lui une répartition des clés entre les cinq personnes, de manière à ce que le coffre puisse être ouvert si et seulement si l'on se trouve dans au moins l'un des situations suivantes :

- présence simultanée de a et d ;
- présence simultanée de a, c et d ;
- présence simultanée de b, d et e.

Correction : On se donne P un ensemble de 5 variables propositionnelles $P = \{A, B, C, D, E\}$. On considérera qu'une variable propositionnelle A (resp B, C, D, E) est satisfaite si et seulement si a, (resp b, c, d, e), est présente. D'après ce qui est décrit dans l'énoncé (en exprimant cela sous forme de la satisfaction d'une formule), on veut que « le coffre puisse être ouvert » si et seulement si la formule $\phi = (A \wedge B) \vee (A \wedge C \wedge D) \vee (B \wedge D \wedge E)$ est satisfaite.

Par ailleurs, considérons l'ensemble $\{S_1 \dots S_n\}$ des serrures. Le coffre ne peut être ouvert que si pour tout indice i , l'un au moins des détenteurs est présent. En d'autres termes pour chaque serrures S_i le coffre ne peut être ouvert que si une au moins des variables propositionnelles de P est satisfaite. On peut donc exprimer cela par une disjonction. Par exemple si c et e ont la clef S_1 alors l'ouverture de S_1 équivaut à la satisfaction de $C \vee E$ c'est à dire à la présence d'au moins l'une des deux personnes c ou e. Puisque pour ouvrir le coffre, il faut que toutes les serrures soient ouvertes, on peut donc exprimer cette ouverture par une conjonction de ces disjonctions (c'est à dire une formule en forme normale disjonctive). Le nombre de disjonctions nous indique le nombre de serrures.

On remarque ensuite que l'ouverture du coffre par la présence d'au moins un détenteur de clef par serrures doit être équivalent à la formule ϕ . Le problème est que ϕ n'est pas en FNC. Il faut donc la transformer en FNC.

Après avoir opéré cette transformation, on obtient la formule ψ équivalente à ϕ

$$\psi = (A \vee B) \wedge (A \vee D) \wedge (A \vee E) \wedge (B \vee C) \wedge (B \vee D)$$

. On en conclut qu'il faut au moins cinq serrures.

Cette formule indique en plus les possibilités pour répartir les clefs.

- a possède la clef de S_1, S_2, S_3
- b possède la clef de S_1, S_4, S_5
- c possède la clef de S_4
- d possède la clef de S_2, S_5
- e possède la clef de S_3

Exercice 4 [Echauffement 1] Mettre les formules suivantes en forme normale de négation.

- $\neg(\neg x \vee y)$
- $\neg(\neg(x \vee y) \wedge z)$

Correction : Pas trop dur...

Exercice 5 [Echauffement 2] Déterminer un forme normale conjonctive et disjonctive des formules suivantes :

- $\neg(p \leftrightarrow q)$
- $((p \rightarrow q) \rightarrow q) \rightarrow q$
- $(p \rightarrow (p \wedge \neg q)) \wedge (q \rightarrow (q \wedge \neg p))$

Correction : On donne ici une solution possible. On rappelle que la forme normale n'est pas unique en général.

- FND = $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$
- FNC = $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
- FNC et FND = $q \vee \neg p$
- FNC et FND = $\neg p \vee \neg q$

Exercice 6 [Preuve du théorème 15] Une formule en forme conjonctive normale

$$(d_1 \wedge d_2 \wedge \dots \wedge d_n)$$

est valide si et seulement si pour tout i il existe un variable x tel que la clause d_i contient à la fois le littéral x et aussi sa négation $\neg x$.

Correction : Notre formule $(d_1 \wedge d_2 \wedge \dots \wedge d_n)$ est valide si et seulement si la formule équivalente $\neg(\neg d_1 \vee \neg d_2 \vee \dots \vee \neg d_n)$ l'est aussi. Et par suite, elle est valide si et seulement si $(\neg d_1 \vee \neg d_2 \vee \dots \vee \neg d_n)$ est une formule en forme disjonctive normale, n'est pas satisfaisable. En appliquant le théorème 11, on peut conclure que toutes les clauses $c_i = \neg d_i$ contiennent à la fois la variable x et sa négation $\neg x$.