Université Paris Diderot – Paris 7 — Algorithmique
L3 Informatique — semaine du 10 oct 2011

TD n°3

Tas

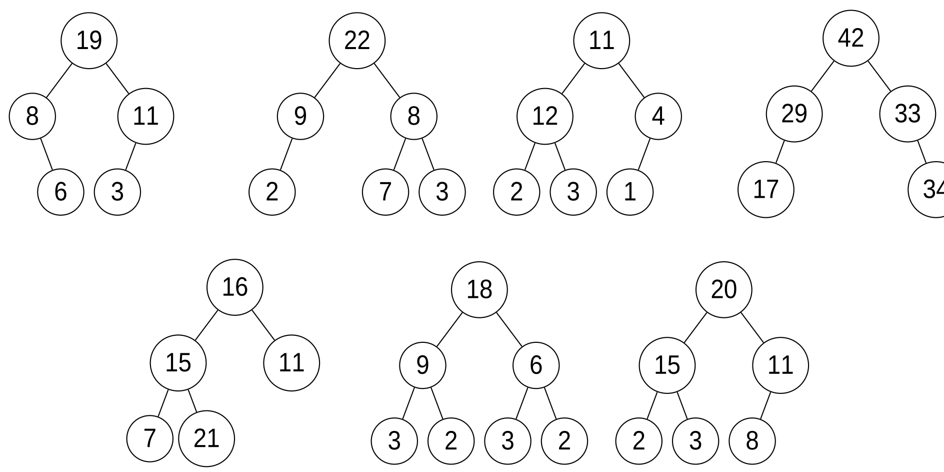
Un tas (*heap* en anglais) est un arbre binaire complètement rempli à tous les niveaux sauf éventuellement au niveau le plus bas qui est rempli en partant de la gauche et qui possède en plus la propriété que la clef de tout nœud est supérieure ou égale à celle de ses descendants.

L'insertion dans un tas se fait en 2 étapes. La première consiste à insérer le nouvel élément en gardant la propriété d'arbre complet du tas, c'est-à-dire en créant un nouveau nœud dans le niveau de profondeur le plus élevé de l'arbre, et le plus à gauche possible.
Ensuite, il faut effectuer une opération d'ascension dans l'arbre pour placer le nouveau nœud au bon endroit. Cela se fait en remontant la branche entre le nœud et la racine : on compare le nœud et son nœud père et si le père est plus petit, on échange les nœuds et on continue à remonter. On s'arrête dès que le père est plus grand, ou à la racine.

Comme pour l'insertion, la suppression se fait en 2 étapes. La première est de supprimer le nœud et de le remplacer par le nœud de profondeur le plus élevé de l'arbre, et le plus à droite possible, pour garder la propriété d'arbre complet.
Ensuite, à partir de la position du nœud supprimé, on effectue un parcours descendant dans l'arbre. Si le nœud est plus petit qu'un de ses deux fils, on le permute avec le plus grand des deux, et on s'arrête dès qu'il est plus grand que ses deux fils, ou lorsqu'on est dans une feuille.

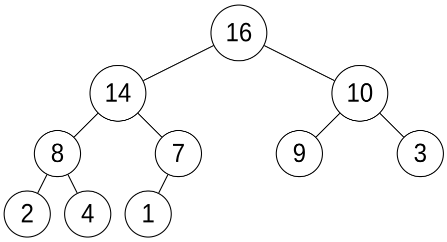
1 Exemples

Exercice 1 [Exemples de tas]
Question 1. Parmi les arbres suivants, lesquels ne sont pas des tas ? Pourquoi ?



Question 2. Dessiner tous les tas possibles avec les éléments suivants : 1, 4, 7, 9.

Question 3. Entasser l'élément 11 dans le tas suivant :



Question 4. Supprimer l'élément 14 du tas de la question précédente.

Exercice 2 [Propriétés classiques des tas]

Question 1. Quels sont les nombres minimal et maximal de nœuds d'un tas de hauteur h ?

Question 2. Quelle est la hauteur d'un tas à n nœuds ?

Question 3. Montrer que pour un sous-arbre quelconque d'un tas, la racine du sous-arbre contient la plus grande valeur parmi les nœuds de ce sous-arbre.

Question 4. Dans un tas où tous les éléments sont distincts, quelles sont les positions possibles pour le plus petit élément ?

Exercice 3 [Complexité sur les tas]

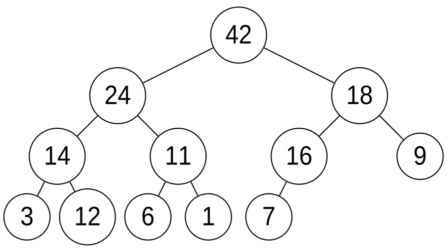
Question 1. Quelle est la complexité des algorithmes d'insertion et de suppression d'un élément dans un tas, en fonction de la hauteur du tas, puis de son nombre de nœuds ?

Une des utilisations classique des tas est le tri par tas. Son algorithme est le suivant : soit n entiers à trier, on les insère dans un tas initialement vide, puis on répète n fois l'opération de suppression de la racine. On a alors les entiers triés dans l'ordre décroissant.

Question 2. Quelle est la complexité de ce tri en moyenne et dans le pire des cas, en nombre d'appels aux opérations de base, puis en fonction de n ?

Exercice 4 [Représentation des tas en tableaux]

Un tas peut être efficacement représenté en utilisant un tableau, car c'est un arbre complet. On remplit le tableau de gauche à droite avec les clefs des nœuds de profondeur 0, 1, . . . , h pris de gauche à droite.



42	24	18	14	11	16	9	3	12	6	1	7			

Question 1. Soit un tas représenté sous forme de tableau. Si i est la position d'un nœud ayant un fils droit et un fils gauche, quels sont les indices de ses fils ?
Inversement, soit i l'indice d'un nœud autre que la racine. Quel est l'indice de son père ?

Question 2. Le tableau

23	17	14	6	13	10	1	5	7	12

représente-t-il un tas ?

Question 3. Comment se traduit la propriété de l'ordre sur les clefs des tas dans le cas des tableaux ?

Question 4. Montrer qu'avec cette représentation, les feuilles sont les nœuds indexés par $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \ldots, n$.