TD n°6

Encore des graphes

1 Graphes et amitié

Exercice 1 On lit dans un journal : *Au Conseil de Sécurité de l'ONU, réunissant 15 nations membre, les tensions politique sont telles que chaque ambassadeur présent (représentant sa nation) n'a serré la main qu'à 11 autres ambassadeurs.* Démontrez la fausseté de cet article de presse.

Exercice 2 On considère un groupe de n personnes qui sont amies, ou pas, entre elles.

Montrer qu'il existe deux personnes avec autant d'amis.

Exercice 3 On considère un tournois entre n personnes. Chaque personne rencontre une fois chacune des autres dans un duel, qui peut être soit gagné, soit perdu. Montrer que
- il existe une personne qui a vaincu tous les autres, OU
- il existe un triangle sans vainqueur où a a battu b ; b a battu c ; c a battu a.

Exercice 4 On considère un groupe de n personnes. Deux personnes ont toujours un, et un seul, ami en commun.

Montrer qu'il existe une personne amie avec tout le monde, et que n est impair.

2 Chemins plus ou moins longs

Un chemin est simple s'il ne passe pas deux fois par la même arête, et élémentaire s'il ne passe pas deux fois par le même sommet.

Exercice 5 Montrer que, dans un graphe à n sommets, il peut y avoir un nombre exponentiel en n de chemins élémentaires entre deux sommets (construire une famille de graphes).

Exercice 6 Peut-il y avoir un nombre infini de chemins
- simples
- élémentaires
- quelconques

entre deux sommets donnés ?

Exercice 7 On considère un graphe non-orienté où les arêtes ont des **longueurs**. La longueur est une fonction

$$lgr : E \to \mathbb{R}$$

La longueur d'un chemin est la somme des longueurs des arêtes qui le composent.

1. Montrer que si les longeurs sont positives alors il existe un chemin de longueur minimale entre deux sommets donnés
2. Et montrer que si les longueurs peuvent être négatives ce n'est plus le cas

Exercice 8 On considère un graphe (non-orienté) à n sommets, et un sommet donné r. Pour chaque sommet $x \neq r$ on a un plus court chemin C_x entre r et x.

1. Montrer que si C_x et C_y se croisent en un point p alors le sous-chemin de C_x allant de r à p ; et le sous-chemin de C_y allant de r à p ; ont la même longueur.
2. Montrer que l'on peut construire deux chemins C'_x et C'_y de même longueur mais qui ne se croisent pas (ils ont r et éventuellement un certain nombre de sommets en commun, puis divergent et n'ont plus de point commun).
3. En déduire l'existence d'un **arbre de plus courts chemins** partant de r : un arbre
   - enraciné en r
   - dont les sommets sont exactement les sommets du graphe
   - dont les arêtes de l'arbre sont des arêtes du graphe (conservant leur longueur)
   - et tel que le chemin dans cet arbre entre r et x est un plus court chemin du graphe entre r et x

3 Graphes bipartis

Un graphe est dit **biparti** si tous ses sommets peuvent être coloriés, chacun soit en vert soit en rouge, de sorte que chaque arête soit bicolore.

Exercice 9 Montrez qu'un graphe ayant un cycle de longueur impaire n'est pas biparti. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 10 On va maintenant faire un algorithme. On commence par colorier un sommet (disons, en vert). De quelle couleur doivent être tous ses voisins ? Et les voisins de ses voisins ? Déduisez-en un algorithme à base de parcours qui
- soit colorie le graphe
- soit dit "non, il n'est pas biparti"

Exercice 11 Et avec trois couleurs (disons, vert, bleu, rouge) ?