Algorithmique - TD 1 - semaine du 24 septembre 2007

Université Paris 7 — Informatique — L3

1 Arbres binaires de recherche

Exercice 1 Combien y a-t-il d'abres binaires de recherche dont les éléments sont $\{3, 5, 8, 12\}$?

Exercice 2 On considère tous les nombres compris entre 1 et 1000. Donnez deux ordres d'insertion de ces nombres dans un ABR :

- Un qui va donner un arbre completement déséquilibré, c'est-à-dire de hauteur maximale possible ;
- Un qui va donner un arbre équilibré, c'est-à-dire le moins haut possible.

Exercice 3

1. Calculer le nombre maximal de nœuds d'un arbre binaire de profondeur p.
2. En déduire qu'un arbre binaire à n nœuds a une profondeur d'au moins $\lceil \log_2(n+1) \rceil$.
3. Calculer la profondeur moyenne d'un nœud de l'arbre binaire complet de profondeur p (et donc à $2^p - 1$ nœuds). On pourra utiliser la formule suivante (que l'on admettra et qui se prouve aisément par récurrence) :

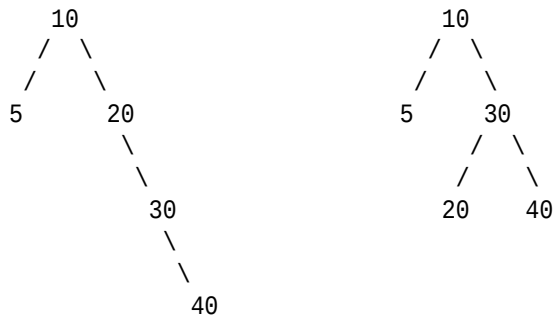
$$\sum_{k=0}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

Exercice 4 Un arbre binaire de profondeur p est *équilibré* si tout nœud ayant moins de deux descendants est à la profondeur p ou $p-1$.

Écrire un algorithme qui dit si un arbre binaire donné est équilibré ou non.

Exercice 5 On souhaite améliorer l'équilibre d'un arbre binaire de recherche possédant de longues branches de nœuds de degré 1, en les transformant en des branches plus courtes.

Par exemple, dans l'arbre de gauche, la branche 20,30,40 de longueur 3 peut être racourcie à 2 (comme ci-dessous)



1. Donner des configurations où l'on peut le faire
2. Écrire un algorithme récursif permettant de réaliser une telle amélioration de l'équilibre d'un ABR.

2 Analyse de complexité

Exercice 6 Que fait le programme `devinette` ? Quelle sont les complexités des deux programmes dans le pire, le meilleur, des cas ? En moyenne ?

```
devinette (T[]: tableau, n : entier) {
   pour i=n à 2 par pas de -1
      Pour j=1 à i-1
         Si T[j]>T[j+1]
            échanger T[j] et T[j+1]
         FinSi
      FinPour
   FinPour
}
```

```
boucle (n : entier) {
   pour i=1 à n
      Pour j=1 à i
         Pour k=1 à j
            instruction en O(1)
         FinPour
      FinPour
   FinPour
}
```

Exercice 7 Que calculent les deux fonctions suivantes ? Quelle est leur complexité dans le pire, le meilleur, des cas ? En moyenne ?

```
inconnue1 (a : entier) {
   p <- 0;
   Tant que (a modulo 2 = 0) Faire {
      a <- a div 2;
      p <- p + 1;
   }
   Si (a = 1) Alors
      retourner p;
   Sinon
      retourner -1;
}
```

```
inconnue2 (a, b : entiers) {
   p <- 1;
   r <- 0;
   Tant que (a > 0) Faire {
      r <- r + (a modulo 10) * p;
      a <- a div 10;
      p <- p * b;
   }
   retourner r;
}
```

Exercice 8 Soit n un entier strictement positif et soit T un tableau de n nombres distincts. On appelle *maximum provisoire* de T tout indice i dans $[1, n]$ tel que, pour tout j dans $[1, i-1]$, $T[i]$ est plus grand que $T[j]$.

On veut calculer le nombre moyen de maxima provisoires, sur tous les tableaux T qui sont des permutations de $[1, n]$ (*i.e.*, des bijections de $[1, n]$ dans $[1, n]$). C'est le nombre moyen d'affectations à faire dans l'algorithme classique de recherche du maximum.

On appelle $P_{n,k}$ le nombre de permutations de $[1, n]$ qui ont k maxima provisoires. Montrer que l'on a les relations :

- $P_{1,1} = 1$, et $P_{1,k} = 0$ pour tout $k \neq 1$;
- $P_{n,k} = P_{n-1,k-1} + (n-1)P_{n-1,k}$.

Soit S_n le nombre moyen de maxima provisoires d'une permutation de $[1, n]$. Montrer que :

$$S_n = H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Exprimer S_n en Θ d'une fonction en n.