

# TD n 1

## Arbre Binaire de Recherche

### 1 Arbres binaires de recherche

**Exercice 1** Combien y a-t-il d'abres binaires de recherche dont les éléments sont  $\{3, 5, 8, 12\}$ ?

**Exercice 2** On considère tous les nombres compris entre 1 et 1000. Donnez deux ordres d'insertion de ces nombres dans un ABR :

- Un qui va donner un arbre complètement déséquilibré, c'est-à-dire de hauteur maximale possible ;
- Un qui va donner un arbre équilibré, c'est-à-dire le moins haut possible.

**Exercice 3** 1. Calculer le nombre maximal de nœuds d'un arbre binaire de profondeur  $p$ .

2. En déduire qu'un arbre binaire à  $n$  nœuds a une profondeur d'au moins  $\log_2(n + 1)$  .

3. Montrez par récurrence sur  $p$  que la profondeur **moyenne**

**Exercice 6** Que calculent les deux fonctions suivantes? Quelle est leur complexité dans le pire, le meilleur, des cas? En moyenne?

```

inconnue1 (a : entier) {
  p <- 0;
  Tant que (a modulo 2 = 0) Faire {
    a <- a div 2;
    p <- p + 1;
  }
  Si (a = 1) Alors
    retourner p;
  Sinon
    retourner -1;
}

inconnue2 (a, b : entiers) {
  p <- 1;
  r <- 0;
  Tant que (a > 0) Faire {
    r <- r + (a modulo 10) * p;
    a <- a div 10;
    p <- p * b;
  }
  retourner r;
}

```

**Exercice 7** Soit  $n$  un entier strictement positif et soit  $T$  un tableau de  $n$  nombres distincts. On appelle *maximum provisoire* de  $T$  tout indice  $i$  dans  $[1, n]$  tel que, pour tout  $j$  dans  $[1, i - 1]$ ,  $T[i]$  est plus grand que  $T[j]$ .

On veut calculer le nombre moyen de maxima provisoires, sur tous les tableaux  $T$  qui sont des permutations de  $[1, n]$  (*i.e.*, des bijections de  $[1, n]$  dans  $[1, n]$ ). C'est le nombre moyen d'affectations à faire dans l'algorithme classique de recherche du maximum.

On appelle  $P_{n,k}$  le nombre de permutations de  $[1, n]$  qui ont  $k$  maxima provisoires. Montrer que l'on a les relations :

- $P_{1,1} = 1$ , et  $P_{1,k} = 0$  pour tout  $k = 1$ ;
- $P_{n,k} = P_{n-1,k-1} + (n-1)P_{n-1,k}$ .

Soit  $S_n$  le nombre moyen de maxima provisoires d'une permutation de  $[1, n]$ . Montrer que :

$$S_n = H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Exprimer  $S_n$  en  $\Theta$  d'une fonction en  $n$ .