

TD n°1

Arbres binaires de recherche

Exercice 1 Combien y a-t-il d'arbres binaires de recherche dont les éléments sont $\{3, 5, 8, 12\}$?

Exercice 2 Insérer successivement les entiers 7, 2, 9, 0, 5, 6, 8 et 1 dans un arbre binaire de recherche initialement vide. Que devient cet arbre après suppression de 2 puis de 7 ?

Exercice 3 On suppose que les entiers compris entre 1 et 1000 sont disposés dans un arbre binaire de recherche, et on souhaite retrouver le nombre 363. Parmi les séquences suivantes, lesquelles ne pourraient pas être la séquence de nœuds parcourus ?

- a) 2, 252, 401, 398, 330, 344, 397, 363 ;
- b) 924, 220, 911, 244, 898, 258, 362, 363 ;
- c) 925, 202, 911, 240, 912, 245, 363 ;
- d) 2, 399, 387, 219, 266, 382, 381, 278, 363 ;
- e) 935, 278, 347, 621, 299, 392, 358, 363.

Est-il nécessaire de faire des schémas ? Écrire sous une forme minimale la propriété à vérifier.

Exercice 4 On considère tous les nombres compris entre 1 et 1000. Donnez deux ordres d'insertion de ces nombres dans un ABR :

- l'un qui va donner un arbre complètement déséquilibré, c'est-à-dire de hauteur maximale ;
- l'autre qui va donner un arbre équilibré, c'est-à-dire le moins haut possible.

Exercice 5

1. Calculer le nombre maximal de nœuds (internes et externes) d'un arbre binaire de hauteur h .
2. En déduire qu'un arbre binaire à n nœuds (internes et externes) a une hauteur d'au moins :

$$\lceil \log_2(n + 1) \rceil - 1$$

3. Montrez par récurrence sur h que la profondeur **moyenne** d'un nœud (interne ou externe) de l'arbre binaire **complet** de hauteur h est comprise entre $h - 1$ et h . (NB : la profondeur de la racine est 0)

Exercice 6 Décrivez un algorithme qui calcule la somme de toutes les clés d'un arbre binaire. Décrivez ensuite un algorithme qui calcule le maximum de ces clés.

Exercice 7 On peut trier un ensemble donné de n nombres en commençant par construire par insertions successives un arbre binaire de recherche contenant ces nombres puis en effectuant un parcours infixe de l'arbre. Quels sont les temps d'exécution de cet algorithme dans le pire et dans le meilleur des cas ?