Algorithmique — L3
TD 7 : Parcours de Graphes

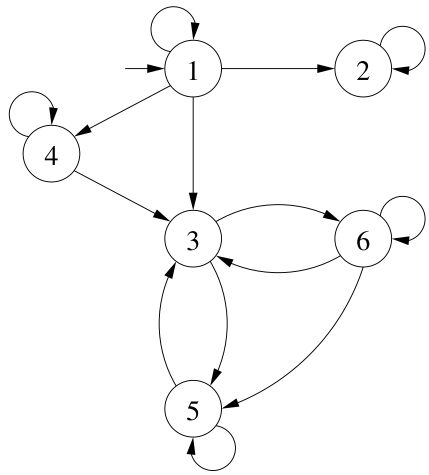

Fig. 1 – Un graphe orienté

Exercice 1 : Appliquer à ce graphe l'algorithme de parcours en largeur (le sommet origine est indiqué par une simple flèche entrante). L'arbre de parcours en largeur résultant sera présenté par un schéma dans lequel les sommets de profondeur égale seront mis à la même hauteur, le sommet origine étant mis en haut.

Exercice 2 : Soit un graphe orienté $G = (S, A)$ et soit $s \in S$. Soit une arborescence $T = (S_T, A_T)$ telle que $A_T \subseteq A$ et S_T est l'ensemble des sommets de G accessibles depuis s (y compris s lui-même), et telle que pour tout sommet $x \in S_T$, le chemin de s à x dans T soit un plus court chemin de s à x dans G. Est-il toujours possible d'obtenir T par un certain parcours en largeur de G depuis s ?

Bien sûr si oui il faut le prouver et si non exhiber un contre-exemple !

Exercice 3 : Appliquer au graphe de la figure 1 l'algorithme de parcours en profondeur. Le résultat sera présenté sous la forme d'une arborescence en profondeur, en distinguant les arcs de liaisons des autres types d'arcs.

Exercice 4 : Modifier l'algorithme de parcours en profondeur donné en cours de telle sorte qu'il affiche pour chaque arc du graphe son type (arc de l'arbre de parcours, arc de retour, arc transversal, arc en avant).

Exercice 5 : [Fil d'ariane]

On ne peut parler de l'histoire du Minotaure sans parler du roi Minos qui fut à l'origine de son enfermement dans un labyrinthe réputé inviolable.

Minos était le fils de Zeus et d'Europe. Il demanda à Poséidon une offrande pour un sacrifice digne de lui, et le dieu fit sortir de la mer un magnifique taureau. L'animal était d'une telle beauté qu'il décida de ne pas le sacrifier. Malheureusement pour lui, sa femme, Pasiphaé, fille d'Hélios, tomba amoureuse du taureau et l'ingénieux Dédale, construisit un simulacre de vache sur sa demande dans lequel elle se cacha ; ainsi elle fut montée par le taureau.

Toujours est-il, que Pasiphaé eut tout de même de nombreux enfants de Minos dont une fille du nom d'Ariane. Puis elle donna naissance à un monstre, fils du taureau, qui avait le corps d'un homme et la tête d'un taureau. Il fut nommé "le Minotaure" c'est à dire le taureau de Minos.

Minos, très contrarié demanda à Dédale de construire un labyrinthe pour pouvoir enfermer le monstre. Tous les neuf ans il faisait donner en sacrifice au Minotaure 7 jeunes garçons et 7 jeunes filles destinés à le nourrir. L'oracle de Delphes avait déclaré que seul le paiement de ce tribut pourrait délivrer de la peste la ville d'Athènes.

Plus tard, Thésée vint en Crète, faisant partie des victimes destinées au Minotaure. Il tua le monstre et enleva Ariane, la fille de Minos qui l'avait aidé. Dédale prit d'ailleurs part à cet exploit car c'est lui qui eut l'idée du peloton de fil grâce auquel Thésée put s'échapper du labyrinthe. Pour le punir, Minos l'y enferma avec son fils Icare. Dédale trouva un moyen pour s'en échapper en fabriquant des ailes avec de la cire et des plumes, tous deux s'envolèrent, mais Icare mourut en tombant.

Bref ... Voici l'exo.

On représente un labyrinthe sous la forme d'une matrice (n, m), où les cases sont remplies par des espaces ou des murs.

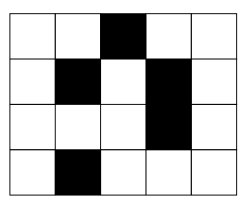

Fig. 2 – Un labyrinthe

1. On veut transformer cette matrice en un graphe. Pour cela on donne un numéro à chaque case de la matrice, ce qui définit les sommets du graphe. Il y aura un arc entre deux états si l'on peut passer d'une case à l'autre.
   Construire le graphe associé au labyrinthe de la figure 2.
2. Écrire en pseudo langage un algorithme qui effectue cette transformation.
3. Ariane a oublié de donner sa pelote á Thésée. Est-ce que Dédale peut la lui apporter sans rencontrer le Minotaure ?
4. Résoudre cette question directement sur la matrice représentant le labyrinthe, sans passer par la construction du graphe.

Exercice 6 : Un étudiant doit écrire un algorithme pour trouver un **circuit** dans un graphe orienté. C'est-à-dire, étant donné $G = (S, A)$, soit exhiber un circuit $(x_1, ...x_{k-1}, x_k = x_1)$ soit dire qu'il ny a pas de circuit. Ayant lu sur Internet que le parcours en profondeur est l'algorithme qui convient, il propose l'algorithme suivant.

Saurez-vous débusquer et corriger les quelques erreurs de votre collègue ? En effet, l'algorithme suivant ne trouve pas toujours un circuit et parfois il trouve un circuit qui n'en est pas un...

```
  Variables Globales:
    booleen marquage[V] initialisé à faux
    sommet père[V] initialisé à null

    Variable locale sommet v
    Prendre un sommet v
    si( !cherche_circuit(v) )
        afficher ''pas de circuit''


*****************************************
//retourne vrai si un circuit trouvé
boolean cherche_circuit(sommet v){

  Variable locale sommet x,y

    marquage[v] = vrai
    pour chaque sommet x tel que (v,x) est un arc de G faire{
      si( marquage[x] == faux) faire{
         père[x] = v
         si( cherche_circuit(x) ) \\ si trouvé alors terminer
            retourner vrai
      }
      sinon{
         \\afficher le circuit trouvé
         afficher x
         y = père[x]
         tant que (y != x) faire{
            afficher(y)
            y = père[y]
         }
         returner vrai
      }
    } //fin pour
    retourner faux
}
```

Exercice 7 : On recherche maintenant un circuit de longueur minimale passant par le sommet x donné. Comment faire ?

Exercice 8 : Donner un algorithme qui vérifie si un graphe *non orienté* possède un cycle. k