1 Multiplier les deux séries formelles suivantes $S(z) = \sum_{n\geq 0} z^n$ et $T(z) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n z^n$. Donner une autre méthode permettant de retrouver ce résultat.

2 Montrer que la série formelle U définie par

$$U(z) = z + z^2 + z^4 + z^8 + z^{16} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$$

vérifie l'équation

$$U(z) = U(z^2) + z \ .$$

3 Soit a_n une suite vérifiant une récurrence linéaire à coefficients constants. Soit $A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z$

8 On appelle f_n le n-ième nombre de Fibonacci : $f_0 = f_1 = 1$ et $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. On rappelle :

$$F(z) = \sum_{k=0} f_k z^k = \frac{1}{1 - z - z^2} \ .$$

1. On définit la suite g_n par
$$\forall n \geq 0 \qquad g_n = f_{2n} \ .$$
Établir une relation de récurrence vérifiée par les g_n.
2. En déduire :
$$G(z) = \sum_{k=0} g_k z^k = \frac{1 - z}{1 - 3z + z^2} \ .$$
3. Retrouver ce résultat en utilisant $F(z)$.
4. Montrer que pour tout entier $n > 0$, il existe une suite croissante finie $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ d'indices vérifiant
$$n = f_{i_k} + \ldots + f_{i_2} + f_{i_1}.$$
5. Montrer qu'il y a unicité de la suite si l'on impose
   (a) $i_1 \geq 1$;
   (b) $i_k - i_{k-1} \geq 2$;

9 Soient $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, $B(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ et $C(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$.

1. Pour $c_n = \sum_{j+2k \leq n} a_j b_k$, exprimer C en fonction de A et B.
2. Pour $n b_n = \sum_{k=0} \frac{2^k a_k}{(n-k)!}$, exprimer A en fonction de B.
3. Pour r un réel et $a_n = \sum_{k=0} \binom{r+k}{k} b_{n-k}$, exprimer A en fonction de B