Université Paris Diderot - L3 — Année universitaire 2012–2013

Partiel de Mathématiques Discrètes

Mercredi 7 novembre 2012

Durée : 1 heure

Les téléphones portables ne sont pas autorisés.
Seuls les documents de cours sont autorisés.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : (2 points)

On considère l'ensemble $\mathcal{BS}$ des mots binaires dont certains bits peuvent être soulignés. Par exemple les mots 0111001 et $0\underline{1}\underline{1}1\underline{0}01$ appartiennent à $\mathcal{BS}$.

Les ensembles suivants forment-ils des classes combinatoires et pourquoi ?

1. Ensemble $\mathcal{BS}$ dont les éléments sont comptés suivant le nombre de bits soulignés.
2. Ensemble $\mathcal{BS}$ dont les éléments sont comptés suivant leur nombre de 0 et 1.

Exercice 2 : (4 points)

Exprimez les séries formelles suivantes sous forme d'une fraction rationnelle dépendant de z :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} 2^n z^n$,
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}3^n z^n}{n}$.

Exercice 3 : (14 points)

Le but de cet exercice est de résoudre la récurrence vérifiée par la suite $(g_n)_{n\geqslant 0}$ suivante :

$$\begin{cases} g_n &= 6g_{n-1} - 5g_{n-2} + 1 \text{ si } n \geqslant 2, \\ g_0 &= 0, \\ g_1 &= 1. \end{cases}$$

On note $G(z)$ la série génératrice de la suite $(g_n)_{n\geqslant 0}$.

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. Exprimez sous forme d'une fraction rationnelle la série formelle suivante :

$$\sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=0}^{n} k5^{n-k}z^n.$$

2. Calculez une expression de $\sum_{k=0}^{n} kz^{n-k}$ en fonction de n et z.

   rappel : si $a \neq 0, 1$, $\sum_{k=0}^{n} a^n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

3. (a) Calculez l'équation fonctionnelle vérifiée par G.

   (b) Déduisez-en une fraction rationnelle dépendant de z pour G.

4. En utilisant 1, puis 2, déduisez de 3b une expression de g_n en fonction de n. Vérifiez votre résultat pour $n = 0, 1$ et 2.