Université Paris 7-Denis Diderot
L3
d'Informatique

Examen du 7 janvier 2009
— Durée 3 h —
tous documents autorisés

Avertissement : Il est demandé de faire des preuves rigoureuses. Une explication en français correct, claire et précise de ce qui est à faire et de comment le faire pour mener à bien une preuve sera appréciée. On peut évidemment sauter une question en indiquant qu'on admet le résultat.

Partie préliminaire

Dans tout le problème, le mot vide est noté 1. Sur l'alphabet $A = \{a, b, c\}$, on considère une machine à pile $\mathcal{M}_0 = (Q, Z, \lambda)$ où $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$ et λ est l'ensemble des règles :

$$
\begin{array}{lcr}
a, q_1, z_1 & \longrightarrow & z_1z_2, q_2 \\
a, q_2, z_2 & \longrightarrow & z_2z_1, q_2 \\
a, q_2, z_1 & \longrightarrow & z_1z_2, q_2 \\
b, q_2, z_2 & \longrightarrow & z_2z_3, q_2 \\
b, q_2, z_3 & \longrightarrow & z_3z_3, q_2 \\
1, q_2, z_3 & \longrightarrow & z_3, q_3 \\
a, q_3, z_3 & \longrightarrow & 1, q_3 \\
1, q_3, z_3 & \longrightarrow & 1, q_4 \\
c, q_4, z_2 & \longrightarrow & 1, q_4 \\
c, q_4, z_1 & \longrightarrow & 1, q_4
\end{array}
$$

et on considère des automates à pile (Q, Z, λ, i, K) sur A composés de cette machine à pile et ayant $i = (q_1, z_1)$ pour configuration interne de départ, en faisant varier l'ensemble K des configurations internes de reconnaissance.

Question 1 : Si $\mathcal{A}_0$ est l'automate à pile pour lequel $f = (q_4, 1)$ est l'unique configuration interne de reconnaissance ($K = \{f\}$), quel est le langage reconnu par cet automate à pile ?

Question 2 : Si $\mathcal{A}_1$ est l'automate à pile pour lequel $K = Q \times \{uz_1\}$ est l'ensemble des configurations internes

Partie principale

On considère dans ce problème une machine à pile $\mathcal{M} = (Q, Z, \lambda)$ sur A, qui est telle que toute règle $(y, q, z \longrightarrow h, q')$ vérifie $|h| \leq 2$ (autrement dit, les règles qui font croître la hauteur de pile ne l'augmentent que de 1). On notera que l'exemple de machine à pile de la partie préliminaire vérifie bien cette condition.

Soit q_a un état particulier de Q, et f la configuration interne $f = (q_a, 1)$, et soit $i = (q_1, z_1)$. Pour tout état $q \in Q$, on définit alors les ensembles de mots de pile :

$$R_i(q) = \{u \in Z^* \mid \exists w \in A^* : (w, q_1, z_1) \ \vdash^* (1, q, u)\}$$
$$S_f(q) = \{\tilde{u} \in Z^* \mid \exists w \in A^* : (w, q, u) \ \vdash^* (1, q_a, 1)\}$$

($\tilde{u}$ désigne le mot miroir du mot u).

Question 5 : Pour l'automate à pile $\mathcal{A}_0$, que valent : $R_i(q_2)$, $R_i(q_3)$, $S_f(q_2)$ et $S_f(q_3)$?

On définit une grammaire algébrique $G =< Z, Q, P >$ où P est l'ensemble de règles : $\{q \longrightarrow zq' \mid \exists w \in A^* \ : (w, q, z) \ \vdash^* (1, q', 1)\}$ auquel on ajoute la règle $q_a \longrightarrow 1$.

Question 6 : Calculer la grammaire ainsi associée à l'automate à pile $\mathcal{A}_0$. Que valent : $L_G(q_2)$, $L_G(q_3)$?

Question 7 : Démontrer que pour tout $q \in Q$, on a $L_G(q) = S_f(q)$. En déduire que le langage $S_f(q)$ est rationnel.

On définit un ensemble V de variables en bijection avec $Q \times Z$, et on note $< q, z >$ l'élément de V en bijection avec $(q, z) \in Q \times Z$. On définit alors un système d'équations algébrique $\mathcal{S}$ par

$$< q, z >= \{u < q', z' > \ \mid \exists y : (y, q, z \longrightarrow uz', q') \in \lambda\} \cup$$
$$\{< q', z' > \ \mid \exists w : (w, q, z) \ \vdash^* (1, q', z')\}$$

Question 8 : Calculer le système d'équations algébrique $\mathcal{S}$ ainsi associé à l'automate à pile $\mathcal{A}_0$.

On définit pour tout $q \in Q$ un système $\mathcal{S}_q$ en ajoutant dans le système $\mathcal{S}$ aux membres droits des équations ayant $< q, z >$ pour membre gauche le monôme z.

Question 9 : Calculer $\mathcal{S}_{q_2}$, $\mathcal{S}_{q_3}$ pour l'automate à pile $\mathcal{A}_0$.

Question 10 : Démontrer que pour tout $q \in Q$, la composante de la solution du système $\mathcal{S}_q$ correspondant à la variable $< q_1, z_1 >$ est $R_i(q)$. En déduire que le langage $R_i(q)$ est rationnel.

Question 11 : Démontrer que pour tout $q \in Q$, le langage

$$L_q = \{u \in Z^* \mid \exists w, w' \in A^* : (ww', q_1, z_1) \ \vdash^* (w', q, u) \ \vdash^* (1, q_a, 1)\}$$

est rationnel, et que le langage

$$L = \{u \in Z^* \mid \exists q \in Q, \exists w, w' \in A^* : (ww', q_1, z_1) \ \vdash^* (w', q, u) \ \vdash^* (1, q_a, 1)\}$$

est rationnel.