Université Paris 7-Denis Diderot
L3 d'Informatique
mathématiques discrètes

Examen du 17 juin 2009
— Durée 3 h —
tous documents autorisés

Avertissement : Il est demandé de faire des preuves rigoureuses. Une explication en français correct, claire et précise de ce qui est à faire et de comment le faire pour mener à bien une preuve sera appréciée. On peut évidemment sauter une question en indiquant qu'on admet le résultat.

Exercice 1

Soit A l'alphabet $\{a, b, c, d\}$. On considère le système composé de l'unique équation :

$$x = axxx + bxx + cx + d$$

Question 1 : Combien ce système admet-il de solutions ? (justifiez votre réponse)

Question 2 : Calculer les approximants d'ordre 0, 1, 2 et 3 de la plus petite solution L à ce système d'équations.

Question 3 : Ecrire une grammaire algébrique sous forme normale de Greibach qui engendre L et en déduire un automate à pile sans états et sans ε-transition qui reconnaît L par pile vide.

Exercice 2

On considère l'automate à pile $\mathcal{A}$ constitué par la machine à pile $\mathcal{M} =< A, Q, Z, \lambda >$ où $A = \{a, b, c, d\}$, $Q = \{q_1, q_2\}$, $Z = \{z\}$ et λ est défini par :

$$\begin{array}{llllll} a, & q_1, & z & \longrightarrow & zzz, & q_1 \\ b, & q_1, & z & \longrightarrow & zz, & q_1 \\ c, & q_1, & z & \longrightarrow & z, & q_2 \\ d, & q_2, & z & \longrightarrow & \varepsilon, & q_2 \end{array}$$

(q_1, z) étant la configuration interne de départ et (q_2, ε) l'unique configuration interne de reconnaissance.

Question 1 : Vérifier que tout mot reconnu par $\mathcal{A}$ appartient à $R = \{a, b\}^*cd^*$. Quel est le langage reconnu par $\mathcal{A}$?

Soit $\vartheta : A^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ l'homomorphisme défini par $\vartheta(a) = 2$, $\vartheta(b) = 1$, $\vartheta(c) = 0$, et $\vartheta(d) = -1$, et soit L le langage constitué de l'ensemble des mots w de A^* qui vérifient les deux conditions :

(1) $\vartheta(w) = -1$

(2) si f est un préfixe strict de w ($i.e.$ $w = fg$ avec $g \neq \varepsilon$), alors $\vartheta(f) \geq 0$.

Question 2 : Montrer que le langage reconnu par $\mathcal{A}$ est inclus dans L.

Question 3 : Montrer que le langage reconnu par $\mathcal{A}$ est égal à $L \cap R$.

Problème

On considère dans ce problème des machines à pile qui ne possèdent qu'un seul symbole de pile.

Exemple :
$\mathcal{M} =< A, Q, Z, \lambda >$ où $A = \{a, b\}$, $Q = \{q_1, q_2\}$, $Z = \{z\}$ et λ est défini par :

$$\begin{array}{llllll} a, & q_1, & z & \longrightarrow & zzz, & q_1 \\ a, & q_1, & z & \longrightarrow & zz, & q_1 \\ \varepsilon, & q_1, & z & \longrightarrow & z, & q_2 \\ b, & q_2, & z & \longrightarrow & \varepsilon, & q_2 \end{array}$$

Si $\mathcal{M} =< A, Q, Z, \lambda >$ possède r règles, on définit un nouvel alphabet $B = \{y_i \mid 1 \leq i \leq r\}$, une application $\pi : B \longrightarrow A \cup \{\varepsilon\}$ par $\pi(y_i)$ est la première composante de la i-ème règle (que l'on étend en un homomorphisme $\pi : B^* \longrightarrow (A \cup \{\varepsilon\})^*$), et une nouvelle machine à pile $\mathcal{M}' =< B, Q, Z, \lambda' >$ possèdant les r règles :

$$a, \quad q, \quad z \quad \longrightarrow \quad z^l, \quad q' \quad \in \lambda' \quad \Longleftrightarrow \quad \pi(a), \quad q, \quad z \quad \longrightarrow \quad z^l, \quad q' \quad \in \lambda$$

Question 1 : Appliquer cette construction à l'exemple, et vérifier dans le cas général que $\mathcal{M}'$ est une machine à pile qui ne possède qu'un seul symbole de pile, sans ε-transition, et que si $\mathcal{A}$ est un automate à pile utilisant la machine à pile $\mathcal{M}$ qui reconnaît un langage P, alors les mêmes configurations internes de départ et d'acceptation appliquées à $\mathcal{M}'$ permettent de reconnaitre un langage M tel que $\pi(M) = P$.

On construit maintenant à partir de $\mathcal{M}'$ un automate fini dont la fonction de transition δ est définie par :

$$q, \quad a \quad \longrightarrow \quad q' \quad \in \delta \quad \Longleftrightarrow \quad a, \quad q, \quad z \quad \longrightarrow \quad z^l, \quad q' \quad \in \lambda'$$

Question 2 : Appliquer cette construction à l'exemple, et calculer le langage reconnu par l'automate fini obtenu si q_1 est l'unique état de départ et q_2 est l'unique état d'acceptation. Vérifier dans le cas général que si M est le langage reconnu par pile vide par un automate à pile $\mathcal{A}$ utilisant la machine à pile $\mathcal{M}$, et R le langage reconnu par l'automate fini obtenu par cette construction en prenant comme états de départ et d'acceptation ceux des configurations internes de départ et d'acceptation de $\mathcal{A}$, alors $M \subset R$.

On construit également à partir de $\mathcal{M}'$ un système composé de l'unique équation :
$x \quad = \quad D$ où D est défini par :

$$ax^l \in D \quad \Longleftrightarrow \quad a, \quad q, \quad z \quad \longrightarrow \quad z^l, \quad q' \quad \in \lambda'$$

Question 3 : Appliquer cette construction à l'exemple, et calculer les approximants d'ordre 0, 1, 2 et 3 de la plus petite solution à ce système d'équations. Vérifier dans le cas général que le système déquations ainsi obtenu admet une unique solution L, et que $M \subset L$.

Question 4 : Démontrer que $M = L \cap R$.

Soit B un alphabet valué, *i.e.* tel qu'on a associé à chaque lettre b de B un entier $v(b) \in I\!N$. On appelle langage de Lukaziewicz généralisé sur l'alphabet valué B la solution de l'équation $x \quad = \quad \{bx^{v(b)} \mid b \in B\}$.

Question 5 : Démontrer que tout langage reconnu par pile vide par un automate à pile n'utilisant qu'un seul symbole de pile est l'image dans un homomorphisme de l'intersection d'un langage de Lukaziewicz généralisé et d'un langage rationnel.