Université Paris 7-Denis Diderot | Examen du 15 novembre 2007
L3 | — Durée 2 h —
d'Informatique | tous documents autorisés

Avertissement : Il est demandé de faire des preuves rigoureuses. Une explication en français correct, claire et précise de ce qui est à faire et de comment le faire pour mener à bien une preuve sera appréciée. On peut évidemment sauter une question en indiquant qu'on admet le résultat.

Dans ce problème on note $I\!N_\infty$ l'ensemble $I\!N \cup \{\infty\}$ et on étend l'ordre naturel sur les entiers $\leq$ à $I\!N_\infty$ de façon usuelle, à savoir : $\forall x \in I\!N_\infty; \ x \leq \infty$. On considère sur l'ensemble $I\!N_\infty$ l'opération notée $\oplus$ définie par : $x \oplus y = Min\{x; y\}$.

Question 1 : Montrer que $\oplus$ confère à $I\!N_\infty$ une structure de monoïde commutatif.

On considère sur l'ensemble $I\!N_\infty$ l'opération notée $\otimes$ définie par :
$x \otimes y = x + y$ si $x \neq \infty$ et $y \neq \infty$ et $x \otimes y = \infty$ sinon.

Question 2 : Montrer que $\otimes$ confère à $I\!N_\infty$ une structure de monoïde.

Question 3 : Montrer que $\oplus$ et $\otimes$ confèrent à $I\!N_\infty$ une structure de demi-anneau.

Soit n un entier. On considère l'ensemble $\mathcal{M}_{n\times n}$<$I\!N_\infty$> des matrices carrées de dimension n à cœfficients dans $I\!N \cup \{\infty\}$, que l'on munit des deux lois de composition et issues de $\oplus$ et $\otimes$ de la façon usuelle, à savoir :
$\forall i; j \in \{1; : : : ; n\}; M \quad N[i; j] = M[i; j] \oplus N[i; j]$
$\forall i; j \in \{1; : : : ; n\}; M \quad N[i; j] = M[i; 1] \otimes N[1; j] \oplus : : : \oplus M[i; n] \otimes N[n; j]$.

Question 4 : Vérifier que et confèrent à $\mathcal{M}_{n\times n}$ < $I\!N_\infty$ > une structure de demi-anneau.

Soit E un ensemble fini de cardinal n dont les éléments sont assimilées aux entiers de 1 à n, R une relation sur E et une fonction de $E \times E$ dans $I\!N$ de domaine R, dite étiquette de R. On étend cette fonction en une application ˆ de $E \times E$ dans $I\!N_\infty$ en posant ˆ$((x; y)) = \infty$ pour tout $(x; y) \in R$ (et évidemment ˆ$((x; y)) = \ ((x; y))$ pour tout $(x; y) \in R$), et si < R; > est une relation sur E étiquetée dans $I\!N$, on lui associe la matrice #(< R; >) de $\mathcal{M}_{n\times n}$ < $I\!N_\infty$ > définie par : #(< R; >)$[i; j]$ = ˆ$((i; j))$.

Question 5 : Montrer que # est une bijection.

On définit sur l'ensemble $\mathcal{E}$ des relations sur E étiquetées dans $I\!N$ l'opération par : $<R;\ >\quad<R';\ '>=<R'';\ ''>$ où $R''=R\quad R'$ et $''((i;j)=\hat{}((i;j))\oplus\hat{}'((i;j))$ si $(i;j)\in R\quad R'$ et indéfini sinon, et l'opération par :
$<R;\ >\quad<R';\ '>=<R'';\ ''>$ où $R''=R\circ R'$ et $''((i;j)=\hat{}((i;1))\otimes\hat{}'((1;j))\oplus\ldots\oplus\hat{}((i;n))\otimes\hat{}'((n;j))$ si $(i;j)\in R\circ R'$ et indéfini sinon.

Question 6 : Montrer que et confèrent à $\mathcal{E}$ une structure de demi-anneau.

Question 7 : Montrer que # est un morphisme de demi-anneaux.

On note $M^{p+1}=M^p\quad M$ où M^0 est l'élément neutre de $\mathcal{M}_{n\times n}<I\!N_\infty>$ pour la loi , $M^{\leq p}=\ _{0\leq i\leq p}M^i$ et $M^*=\ _{0\leq i}M^i$.

Question 8 : Vérifier que le programme suivant :

```
donnée : une matrice carrée M de dimension n ;
N = élément_neutre();
S = Somme(N,M);
tant que (S != N)
    faire
          N = S;
          S = Somme(N,Produit(N,M));
   fin tant que
S est le résultat  ;
```

calcule, s'il s'arrête, $M^{\leq p}$ pour la plus petite valeur de p telle que $M^{\leq p}=M^{\leq p+1}$, en précisant ce que font les fonctions *élément_neutre*, *Somme* et *Produit*.

On considère sur $\mathcal{M}_{n\times n}<I\!N_\infty>$ la relation S définie par :
$(A;B)\in S\Longleftrightarrow\forall i;j\quad A[i;j]\leq B[i;j]$.

Question 9 : Vérifier que S est une relation d'ordre, que l'on notera $\leq_S$. Est-elle totale ? Est-elle nœthérienne (c'est-à-dire : bien fondée) ?

Question 10 : Vérifier que pour tous $<R;\ >$ et $<R';\ '>$, on a :
$\#(<R;\ >\quad<R';\ '>)\leq_S\#(<R;\ >)$.

Question 11 : Démontrer que ce programme se termine pour toute donnée M dans $\mathcal{M}_{n\times n}<I\!N_\infty>$.

Question 12 : Si $M=\#(<R;\ >)$, que vaut $\#^{-1}(M^*)$?