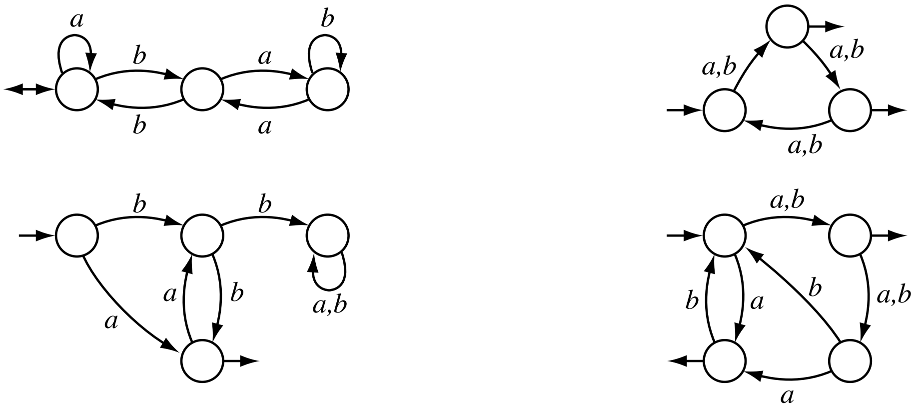
1 Utiliser le lemme d'Arden pour trouver le langage reconnu par les automates suivants :



2 Les expressions françaises suivantes décrivent des langages rationnels sur $\{\ .\ \}^*$. Pour chacun, trouver une expression rationnelle qui le caractérise et une grammaire linéaire droite qui l'engendre.

1. Le langage de tous les mots qui contiennent au moins deux ;
2. Le langage de tous les mots qui ne se terminent pas avec ;
3. Le langage de tous les mots qui ne contiennent pas le mot ;
4. Le langage de tous les mots qui contiennent le mot et le mot .

3 (Examen AF4 2004) Soit le langage $_3$ sur l'alphabet $\{0.\ 1.\ 2\}$ contenant exactement tous les mots correspondant à la représentation des nombres écrits en base 3 et qui sont multiples de 4 (un nombre quelconqque de 0 en tête est autorisé).

1. Construire un automate fini déterministe reconnaissant $_3$.
2. Montrer que $\widetilde{\ }_3 = \ _3$ ($\widetilde{\ }_3$ est le miroir de $_3$).
   Autrement dit, si on lit à l'envers un multiple de 4 écrit en base 3, le nombre correspondant est encore un multiple de 4.

On se propose de généraliser ce résultat à une base quelconque.
Pour cela on considère le langage $_b$ sur un alphabet de chiffres formé de tous les multiples de $+1$ écrits dans cette base.

3. Décrire un automate fini déterministe reconnaissant $_b$.
4. Montrer que $\widetilde{\ }_b = \ _b$.
   Ainsi, par exemple, si on lit à l'envers un multiple de 11 écrit en base 10, le nombre obtenu est encore un multiple de 11.

4 Montrer que les langages suivants sont algébriques :

1. le langage $_0 = \{\ ^n\ ^n \mid n \geq 0\}$;
2. le langage $_1 = \{\ ^n\ ^m \mid m \geq n \geq 0\}$;
3. le langage $_2 = \{\ ^n\ ^* c^n \mid n \geq 0\}$;
4. le langage $_3 = \{\ ^n\ ^m c^k \mid n = m + \ \}$;
5. le langage $_4 = \{\ ^n\ ^m c^m\ ^n \mid n, m \geq 1\}$;
6. le langage $_5$ des mots qui ne sont pas palindromes.

À l'aide du lemme de l'étoile, montrer que $_0$ et $_1$ ne sont pas rationnels, en déduire que les autres non plus.

5 On considère les grammaires algébriques suivantes sur l'alphabet $\{\ ,\ \}$. Pour chacune, décrire les langages engendrés.

1. $\to \ \varepsilon \mid \quad \mid$
2. $\to \quad \mid \ \mid \quad \mid$
3. $\left\{ \begin{array}{lll} {}_0 & \to & {}_0 \mid \ {}_0 \mid \ {}_1 \\ {}_1 & \to & {}_2 \mid \ {}_2 \\ {}_2 & \to & {}_2 \mid \ {}_2 \mid \ \mid \ \mid \varepsilon \end{array} \right.$

6 Dessiner un arbre de dérivation du mot $u =$ pour la grammaire 3. de l'exercice **5**.

7 Considérons la grammaire suivante :

$$\to \ \mid \ \mid \ \mid \ \mid \ \mid$$

Par induction sur la longueur de la dérivation, prouver que tout mot du langage engendré contient strictement plus de que de .
Le mot est-il ambigu ?

8 Considérons la grammaire suivante :

$$G \ : \left\{ \begin{array}{lll} & \to & B \mid \ A \\ A & \to & AA \mid \quad \mid \\ B & \to & BB \mid \quad \mid \end{array} \right.$$

1. Montrer que $(G) = \{u \in \{\ ,\ \}^* \ : \ |u|_a = |u|_b\}$.
2. Donner une grammaire plus simple engendrant le même langage.
3. Donner la grammaire du langage de Dyck à une paire de parenthèses (avec correspondant à [et à])
$$D_1^* = \{u \in \{\ ,\ \}^* \ : \ |u|_a = |u|_b, \forall v \text{ préfixe de } u, |v|_a \geq |v|_b\}.$$

9 Le langage de Łukasiewicz est engendré par la grammaire $(\{\ ,\ \}, \{\ \}, \{\ \to \quad + \ \})$.

1. Montrer que tout mot u de vérifie la propriété (1) : $|u|_b = |u|_a + 1$.
2. Montrer que tout mot u de vérifie la propriété (2) : $\forall v$ préfixe strict de u : $|v|_a \geq |v|_b$.
3. Montrer que si un mot u de $\{\ ,\ \}^*$ vérifie (1) et (2), alors soit on a $u =$, soit u commence par et il existe un plus petit mot u_1 vérifiant $u = \ u_1 u_2$ et $|\ u_1|_a = |\ u_1|_b$; montrer qu'alors u_1 et u_2 vérifient également (1) et (2). En déduire $= \{u \in \{\ ,\ \}^* : u \text{ vérifie } (1) \text{ et } (2)\}$.
4. On considère le langage de Dyck D_1^* à une paire de parenthèses. Montrer $= D_1^*$.

10 Pour chacune des grammaires suivantes, montrer qu'elle est ambiguë, puis construire une grammaire non-ambiguë équivalente.

1. $\to \quad \mid \ \mid$
2. $\to \varepsilon \mid \quad \mid$
3. $\to \varepsilon \mid \quad \mid$
4. $\to c \quad \mid c \quad \mid$
5. $\left\{ \begin{array}{lll} {}_0 & \to & {}_1 \ {}_2 \ {}_1 \\ {}_1 & \to & \varepsilon \mid \ {}_1 \\ {}_2 & \to & \varepsilon \mid \ {}_2 \end{array} \right.$

11 Pour chacune des grammaires suivantes, préciser si elle est ambiguë.

1. $\to \quad \mid$
2. $\to \ \mid \ \mid \ \mid \ \mid$
3. $\to \quad \mid$
4. $\to \quad \mid$