RÉSOLUTION DE RÉCURRENCES LINÉAIRES

1 Relation de récurrence linéaire homogène

Une séquence $\{a_n\}_{n\geq 0}$ satisfait une **relation de récurrence** s'il est possible d'exprimer le terme a_n comme une fonction des $a_0, \ldots, a_{n-1}$. Cette **relation de récurrence est de degré** k si a_n dépend des k termes de la séquence le précédant, c'est-à-dire

$$a_n = R(a_{n-1}, \ldots, a_{n-k}) \quad \forall n \geq k$$

pour une certaine fonction R. Une relation de récurrence est dite **linéaire** si celle-ci est de la forme

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$$

avec les coefficients c_i et la fonction $F(n)$ pouvant dépendre de n mais pas des différents a_i. Quand tous les multiplicateurs c_i sont constants, la récurrence est dite **à coefficients constants** et il est question de **récurrence homogène** lorsque la fonction $F(n)$ est nulle. Nous commencerons par la classe de récurrence la plus simple.

Définition 1: Récurrence linéaire homogène à coefficients constants
Une relation de récurrence est dite linéaire homogène d'ordre k à coefficients constants si elle est de la forme

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} \qquad (1)$$

où $c_1, c_2, \cdots c_k$ sont des nombres réels et c_k est non nul.

Notre objectif est de déterminer la forme du terme général (ou **solution générale**) de la séquence $\{a_n\}_{n\geq 0}$. Une relation de récurrence linéaire homogène définie seulement par une équation de la forme (1) admet en général une infinité de solutions. Supposons que la séquence de terme général $a_n = t^n$ soit solution de (1) pour une certaine constante t. En injectant cette solution dans l'équation qu'elle doit vérifier, nous obtenons

$$\begin{array}{rrcl} & t^n - c_1 t^{n-1} - \ldots - c_k t^{n-k} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & t^k - c_1 t^{k-1} - \ldots - c_k & = & 0 \end{array}$$

La séquence $\{t^n\}_{n\geq 0}$ est donc solution de la relation de récurrence si t est une racine de l'équation obtenue ci-dessus. Cette dernière est l'**équation caractéristique** de la relation de récurrence.

Définition 2: Polynôme caractéristique
Soit la relation de récurrence linéaire homogène d'ordre k à coefficients constants

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}.$$

Le **polynôme caractéristique** qui lui correspond est

$$\mathcal{P}(t) = t^k - c_1 t^{k-1} - \cdots - c_k.$$

L'**équation caractéristique** associée à la relation de récurrence est obtenue en annulant le polynôme caractéristique de cette dernière. Les racines du polynôme caractéristique sont appelées les **racines caractéristiques**.

La proposition suivante dégage une condition nécessaire et suffisante pour déterminer une des solutions d'une relation de récurrence linéaire homogène

Proposition 1: Soit t est un nombre complexe non nul. La séquence $\{a_n = t^n\}_{n\geq 0}$ satisfait la relation de récurrence $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ si et seulement si t est une de ses racines caractéristiques.

Étant donné le caractère linéaire des relations que nous traitons, il est évident que toute combinaison linéaire de solutions est encore une solution. Plus formellement, si $\{A_n\}_{n\geq 0}$ et $\{B_n\}_{n\geq 0}$ sont solutions d'une relation de récurrence linéaire homogène à coefficients constants, alors la séquence $\{\alpha A_n + \beta B_n\}_{n\geq 0}$ est aussi solution et ce quelles que soient les constantes α et β. Par analogie avec les espaces vectoriels et la notion de base, serait-il possible de déterminer un ensemble de séquences dites **solutions génératrices** qui nous permettraient de générer, par combinaison linéaire, toutes les solutions d'une relation de récurrence donnée et notamment sa solution générale ? Une telle "base" existe bel et bien et, toujours par analogie avec l'algèbre vectorielle, doit être de "dimension" k.

Par l'algèbre, une équation de degré k admet, en tenant compte des multiplicités, k racines. Si ces k racines sont toutes différentes, c'est-à-dire si toutes les racines caractéristiques ont une multiplicité unitaire, alors nous possédons immédiatement nos k solutions génératrices. Dans le cas contraire, la proposition suivante nous garantit un nombre suffisant de séquences solutions de la relation de récurrence.

Proposition 2: Si t est une racine de multiplicité m de l'équation caractéristique, alors chacune des séquences de terme général $t^n, nt^n, n^2t^n, \ldots, n^{m-1}t^n$ satisfait la relation de récurrence.

Nous pouvons donc à partir des racines caractéristiques d'une relation de récurrence linéaire homogène à coefficients constants déterminer la forme de sa solution générale. C'est ce qu'expriment les deux théorèmes suivants :

Théorème 1
Soient $c_1, c_2, \cdots, c_k$ des nombres réels tels que c_k est non nul. Supposons que le polynôme caractéristique

$$\mathcal{P}(t) = t^k - c_1 t^{k-1} - \cdots - c_k$$

admette k racines distinctes $t_1, \cdots, t_k$. Alors, une séquence $\{a_n\}$ est une solution de la relation de récurrence

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

si et seulement si

$$a_n = \alpha_1 t_1^n + \alpha_2 t_2^n + \cdots + \alpha_k t_k^n \quad \forall n$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ des constantes réelles.

Théorème 2
Soient $c_1, c_2, \cdots, c_k$ des nombres réels tels que c_k est non nul. Supposons que le polynôme caractéristique

$$\mathcal{P}(t) = t^k - c_1 t^{k-1} - \cdots c_k$$

admette r racines distinctes $t_1, \cdots, t_r$ de multiplicité respective $m_1, m_2, \cdots, m_r$ telles que $m_i \geq 1\ \forall i \in \underline{r}$ et $\sum_{i\in\underline{r}} m_i = k$. Alors, une séquence $\{a_n\}$ est une solution de la relation de récurrence

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

si et seulement si

$$
\begin{aligned}
a_n \quad = \quad & (\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1} n + \cdots + \alpha_{1,m_1-1} n^{m_1-1}) t_1^n \\
& + (\alpha_{2,0} + \alpha_{2,1} n + \cdots + \alpha_{2,m_2-1} n^{m_2-1}) t_2^n \\
& + \cdots + (\alpha_{r,0} + \alpha_{r,1} n + \cdots + \alpha_{r,m_r-1} n^{m_r-1}) t_r^n \quad \forall n
\end{aligned}
$$

avec $\alpha_{i,j}$ des constantes réelles $\forall i, j$ tels que $1 \leq i \leq r$ et $0 \leq j \leq m_{i-1},$.

Exemple 1. *Déterminer la forme générale des solutions de la relation de récurrence* $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$.

L'équation caractéristique pour cette relation de récurrence est $t^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$ *que nous pouvons factoriser en* $(t+1)^3 = 0$ *soit par les identités remarquables soit par la méthode de Horner. Cette équation admet une et une seule racine de valeur -1 et de multiplicité trois. Toutes les hypothèses du Théorème 2 étant satisfaites, les solutions seront de la forme*

$$a_n = (\alpha_{11} + \alpha_{12}\, n + \alpha_{13}\, n^2)(-1)^n.$$

□

Dans l'expression de la forme générale des solutions d'une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre k à coefficients constants, il reste k constantes réelles indéterminées. Dans la plupart des problèmes, à une relation de récurrence comme (1) est associé un ensemble de k conditions initiales

$$a_0 = C_0, a_1 = C_1, \cdots, a_{k-1} = C_{k-1} \tag{2}$$

qui vont justement permettre de déterminer de manière unique ces constantes.

Exemple 2. *Soient les conditions initiales* $a_0 = 1, a_1 = -2$ *et* $a_2 = -1$ *associées à la relation de récurrence présentée dans l'exemple 1. Quelle est la solution exacte de ce système ?*

Nous savons que la forme générale des solutions de la relation de récurrence est

$$a_n = (\alpha_{11} + \alpha_{12}\, n + \alpha_{13}\, n^2)(-1)^n$$

et il nous reste encore à déterminer les constantes α_{ij}*. Les trois conditions initiales injectées dans cette équation donnent le système de trois équations à trois inconnues suivant*

$$
\begin{aligned}
1 &= \alpha_{11} \\
1 &= \alpha_{12} + \alpha_{13} \\
-1 &= \alpha_{12} + 2\alpha_{13}
\end{aligned}
$$

dont les solutions sont $\alpha_{11} = 1, \alpha_{12} = 3$ *et* $\alpha_{13} = -2$*. L'unique solution de la relation de récurrence est dès lors*

$$a_n = (1 + 3\, n - 2\, n^2)(-1)^n.$$

□

Exemple 3. *Résoudre la relation de récurrence* $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ *sous les conditions initiales* $a_0 = 1$ *et* $a_1 = 6$.

L'équation caractéristique $t^2 - 6t + 9 = 0$ admet le nombre 3 comme racine de multiplicté deux. Conformément au théorème 2, la forme générale des solutions de la relation de récurrence est $a_n = \alpha_{1,0}3^n + \alpha_{1,1}n3^n$. Par les conditions initiales, nous déterminons que $\alpha_{1,0} = 1$ et $\alpha_{1,1} = 1$. En conclusion, la solution de la relation de récurrence sous ces conditions initiales est $a_n = 3^n + n3^n$.

□

2 Relation de récurrence linéaire non-homogène

Définition 3: Récurrence linéaire non-homogène à coefficients constants
Une relation de récurrence est dite linéaire non-homogène d'ordre k à coefficients constants si elle est de la forme

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n) \tag{3}$$

où $c_1, c_2, \cdots c_k$ sont des nombres réels, c_k est non nul et $F(n)$ est une fonction non nulle de n. La relation de récurrence

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

est appelée la **relation de récurrence homogène associée**.

Définition 4: Solution particulière
Une solution particulière d'une relation de récurrence non homogène est une séquence qui vérifie l'équation sans nécessairement vérifier les conditions initiales.

Théorème 3
Si $\{a_n^{(p)}\}$ est une solution particulière de la relation de récurrence linéaire non-homogène à coefficients constants

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$$

alors toute solution est de la forme $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ où $\{a_n^{(h)}\}$ est la solution de la relation de récurrence homogène associée

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}.$$

Pour résoudre une telle relation de récurrence il suffit, par le théorème 3, d'additionner une solution particulière de celle-ci et la solution générale de sa récurrence homogène associée (solution que nous savons facilement déterminer par les théorèmes 1 et 2 de la section précédente). Le théorème suivant nous indique comment calculer un solution particulière.

Théorème 4
Soit $F(n) = P(n)s^n$ le terme non-homogène d'une relation de récurrence où $P(n)$ est un polynôme non nul d'un certain degré et s un réel non nul

– Si le réel s est une racine de multiplicité m du polynôme caractéristique de la relation de récurrence homogène associée, alors il y a une solution particulière de la forme

$$a_n^{(p)} = n^m Q(n) s^n \tag{4}$$

– Si le réel s n'est pas une racine du polynôme caractéristique de la relation de récurrence homogène associée, alors il y a une solution particulière de la forme

$$a_n^{(p)} = Q(n)s^n \tag{5}$$

avec, dans les deux cas, $Q(n)$ un polynôme de même degré que $P(n)$

Comme pour les relations de récurrences homogènes, un ensemble de k conditions initiales peut-être associé à une relation de récurrence de la forme (3). Dès lors, il est possible de donner une valeur aux constantes réelles encore indéterminées dans la solution générale et donc de donner la solution unique du problème.

Exemple 4. *Résoudre la relation de récurrence linéaire non-homogène d'ordre deux à coefficients constants*

$$a_n = -4a_{n-1} + 21a_{n-2} + 5(4^n)$$

sous les conditions initiales $a_0 = 1$ *et* $a_1 = 2$.

La solution de cette récurence est $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ *où* $a_n^{(h)}$ *est la solution de l'équation de la récurrence homogène* $a_n = -4a_{n-1} + 21a_{n-2}$. *L'équation caractéristique de cette dernière,* $t^2 + 4t - 21$, *admet 3 et -7 comme racines de multiplicité une. Dès lors,*

$$a_n^{(h)} = \alpha_1(3^n) + \alpha_2(-7)^n.$$

Puisque 4 n'est pas une racine caractéristique de la relation de récurrence homogène associée nous obtenons par le théorème (4) que $a_n^{(p)} = \xi(4^n)$ *avec la constante réelle* ξ *restant à déterminer. En injectant* $a_n^{(p)}$ *dans la relation de récurrence non-homogène, nous avons*

$$\begin{array}{rrcl} & \xi(4^n) + 4\xi(4^{n-1}) - 21\xi(4^{n-2}) & = & 5(4^n) \\ \Leftrightarrow & 16\xi + 16\xi - 21\xi & = & 80 \end{array}$$

et donc $\xi = 80/11$. *Dès lors, nous obtenons*

$$a_n = \alpha_1(3^n) + \alpha_2(-7)^n + \frac{80}{11}(4^n)$$

et les conditions initiales permettent de calculer $\alpha_1 = -71/10$ *et* $\alpha_2 = 91/110$. *En conclusion, la solution finale est*

$$a_n = \frac{-71}{10}(3^n) + \frac{91}{110}(-7)^n + \frac{80}{11}(4^n)$$

□

Exemple 5. *Résoudre la relation de récurrence linéaire non-homogène d'ordre deux à coefficients constants*

$$a_n = -4a_{n-1} + 21a_{n-2} + 8(3^n)$$

sous les conditions initiales $a_0 = 1$ *et* $a_1 = 2$.

Puisque la partie homogène de cette relation est la même que pour l'exemple 4, nous trouvons

$$a_n^{(h)} = \alpha_1(3^n) + \alpha_2(-7)^n.$$

Étant donné que 3 est racine caractéristique de la relation homogène associée, par le théorème 4, nous savons que $a_n^{(p)} = \xi\, n\,(3^n)$. *Injecter cette forme dans la relation de récurrence amène*

$$\begin{array}{rrcl} & \xi\, n\,(3^n) + 4\xi\,(n-1)\,(3^{n-1}) - 21\xi\,(n-2)\,(3^{n-2}) & = & 8(3^n) \\ \Leftrightarrow & 9\xi\, n + 12\xi\,(n-1) - 21\xi\,(n-2) & = & 72 \\ \Leftrightarrow & \xi & = & 12 \end{array}$$

et donc

$$a_n = \alpha_1(3^n) + \alpha_2(-7)^n + \frac{12}{5}\, n\,(3^n).$$

Par les conditions initiales il vient $\alpha_1 = 9/51$ *et* $\alpha_2 = 41/50$ *et finalement nous obtenons comme unique solution*

$$a_n = \frac{9}{51}(3^n) + \frac{41}{50}(-7)^n + \frac{12}{5}\, n\,(3^n).$$

□

Exemple 6. *Résoudre la relation de récurrence linéaire non-homogène d'ordre un à coefficients constants*

$$a_n = 3a_{n-1} + 2n$$

sous la conditions initiales $a_1 = 3$.

L'équation caractéristique $t - 3 = 0$ *de la relation homogène associée nous permet de déterminer que* $a_n^{(h)} = \alpha_1(3^n)$. *Puisque le terme non-homogène* $F(n) = 2n = 2n(1^n)$ *est formé d'un polynôme de degré un en* n *et d'un réel qui n'est pas racine caractéristique, nous avons par le théorème 4 que* $a_n^{(p)} = (\xi_1 n + \xi_2)(1^n)$. *Injecter cette forme dans la relation de récurrence donne*

$$\begin{array}{rrcl} & (\xi_1 n + \xi_2) - 3(\xi_1(n-1) + \xi_2) & = & 2n \\ \Leftrightarrow & -2\xi_1 n + (3\xi_1 - 2\xi_2) & = & 2n \end{array}$$

qui est équivalent à $-2\xi = 2$ *et* $3\xi_1 - 2\xi_2 = 0$ *; finalement* $\xi_1 = -1$ *et* $\xi_2 = -3/2$ *ce qui conduit à la solution particulière* $a_n^{(p)} = -n - \frac{3}{2}$.
En conclusion, par la condition initiale et puisque $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$, *nous obtenons l'unique solution*

$$a_n = -n - \frac{3}{2} + \frac{11}{6}(3^n)$$

□

Exemple 7. *Résoudre la relation de récurrence linéaire non-homogène d'ordre un à coefficients constants*

$$a_n = a_{n-1} + n$$

sous la conditions initiales $a_0 = 0$.

L'équation caractéristique $t - 1 = 0$ *de la relation homogène associée nous permet de déterminer que* $a_n^{(h)} = \alpha_1(1^n)$. *Puisque le terme non-homogène* $F(n) = n = n(1^n)$ *est formé d'un polynôme de degré un en* n *et d'un réel qui est racine caractéristique, nous avons par le théorème 4 que* $a_n^{(p)} = n(\xi_1 n + \xi_2)(1^n)$. *Injecter cette forme dans la relation de récurrence donne*

$$\begin{array}{rrcl} & n(\xi_1 n + \xi_2) - (n-1)(\xi_1(n-1) + \xi_2) & = & n \\ \Leftrightarrow & 2\xi_1 n + (\xi_1 + \xi_2) & = & n \end{array}$$

qui est équivalent à $2\xi = 1$ *et* $\xi_1 + \xi_2 = 0$ *; finalement* $\xi_1 = 1/2$ *et* $\xi_2 = -1/2$ *ce qui conduit à la solution particulière* $a_n^{(p)} = n(\frac{n}{2} - \frac{1}{2})$.
En conclusion, par la condition initiale et puisque $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$, *nous obtenons l'unique solution*

$$a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

□

Institut d'Informatique - FUNDP
C [illegible]N [illegible]N Gabriel

R[illegible] [illegible]T[illegible] N D[illegible]R[illegible]