1 Donner les séries génératrices exponentielles associées aux suites a et b définies par $a_n = 2^{n+1}$ et $b_n = n^2$ pour $n \geq 2$.

2 Résoudre $g_0 = 0$, $g_1 = 1$ et $g_n = -2ng_{n-1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_k g_{n-k} + [n = 1]$ en utilisant les séries génératrices exponentielles.

3 Une permutation *montante-descendante*, up-down en anglais (resp. : descendante-montante, down-up) d'ordre n est un arrangement $a_1 a_2 \dots a_n$ des entiers $\{1, 2, \dots, n\}$ qui descend et monte alternativement :

$$a_1 < a_2 > a_3 < a_4 > \dots, \qquad \text{(resp. : } a_1 > a_2 < a_3 > a_4 < \dots).$$

On appelle p_n le nombre de permutation montante-descendante d'ordre n. Il est pratique de faire la convention que $p_0 = 1$. Le but de cet exercice est de montrer que la série génératrice exponentielle des permutation montante-descendante s'écrit de manière simple sous la forme

$$P(z) = \sum_{n \geq 0} p_n \frac{z^n}{n!} = \frac{1 + \sin z}{\cos z}.$$

1. Calculer les premier cas.
2. Montrer qu'il y a autant de permutation montante-descendante que de descendantes-montantes (pour un ordre n fixé).
3. Montrer que le nombre de permutation montante-descendante dont le plus grand nombre n est en position $2k$ est $\binom{n-1}{2k-1} p_{2k-1} p_{n-2k}$. Montrer de même que le nombre de permutations dont le plus petit élément 1 est en position $2k+1$ est $\binom{n-1}{2k} p_{2k} p_{n-2k-1}$.
4. En déduire que la suite p_n vérifie la récurence

$$p_0 = 1, \quad p_1 = 1, \qquad \text{et pour n>1, } 2p_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p_k p_{n-1-k}.$$

5. montrer que $P(z)$ vérifie l'équation différentielle

$$2P'(z) = P(z)^2 + 1.$$

6. Conclure.

4 Permutations de cycles pairs et involutions sans points fixes

1. Établir la série génératrice exponentielle des permutations sur [2n] dont tous les cycles sont de longueur paire. En déduire le nombre de telles permutations.
2. Établir la série génératrice exponentielle des involutions sans point fixe. En déduire le nombre de telles involutions.
3. Exhiber une bijection entre les permutations sur [2n] ayant tout leurs cycles de longueur paire et les couples d'involutions sans point fixe, chacune sur [2n].

◇◇◇◇◇