Un *automate à pile* $\mathcal{A}$ est constitué d'un alphabet d'entrée A, d'un alphabet de pile Z dont un symbole initial $z_0 \in Z$, d'un ensemble fini d'états Q dont un état initial q_0 et de transitions de la forme $q, z \xrightarrow{y} q', h$ avec $q, q' \in Q$, $y \in A$

4 Les langages suivants sont-ils déterministes ?

1. $L_1 = \{u \in \{a,b\}^* : |u|_a = |u|_b\}$;
2. $L_2 = \{u \in \{a,b\}^* : |u|_a \neq |u|_b\}$;
3. $L_3 = \{a^n b^m c^k : m = n + k\}$;
4. $L_4 = \{a^n b^n a^p : n, p \geq 1\}$;
5. $L_5 = \{a^n b^p a^p : n, p \geq 1\}$;
6. $L_6 = L_4 \cup L_5$;
7. $L_7 = cL_4 \cup L_5$;
8. $L_8 = \{c\} \cup cL_4 \cup L_5$;
9. $L_9 = L_8^*$;
10. $L_{10} = \widetilde{L_7}$;
11. $L_{11} = \{c, c^2\} \cdot L_7$;
12. $L_{12} = \{a^n b^p : n \leq p \leq 2n\}$;
13. $L_{13} = \{w\tilde{w} : w \in \{a,b\}^*\}$;
14. $L_{14} = \{uv \in \{a,b\}^* : |u| = |v|, u \neq v\}$.

On peut associer à une grammaire $\mathcal{G}$ un automate à pile avec un seul état, avec $A \cup V$ pour alphabet de pile, S pour symbole de fond de pile et les transitions $(x/x, \varepsilon)$ pour $x \in A$ et $(\varepsilon/S, \widetilde{m})$ pour $S \longrightarrow m \in P$.

Si $\mathcal{G}$ est sous forme normale de Greibach, il suffit de prendre V pour alphabet de pile, S pour symbole de fond de pile, la transition $(\varepsilon/S, \varepsilon)$ pour $S \longrightarrow \varepsilon \in P$ et les transitions $(a/A, A_k \cdots A_1)$ pour $A \longrightarrow aA_1 \cdots A_k \in P$.

5 Convertir chacune des grammaires ci-dessous en un automate à pile reconnaissant le même langage par pile vide.

$$\mathcal{G}_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aSb \mid A \\ A & \rightarrow & bAa \mid S \mid \varepsilon \end{array} \right. \qquad \mathcal{G}_2 : \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aAA \\ A & \rightarrow & aS \mid bS \mid a \end{array} \right.$$

6 (Examen 2008) On considère l'alphabet $A = \{a, c\}$ et les langages sur A suivants :

$$L = \{a^n c a^p c \mid p = n+1\}, \quad \overline{L} = \{a^n c a^p c \mid p \neq n+1\}, \quad M = acL^* \cup acL^* a^* c \quad \text{et} \quad N = L^* \cup L^* a^* c.$$

1. Construire un automate à pile qui reconnaît L par pile vide.
2. Construire un automate à pile qui reconnaît L^* par états d'acceptation.
3. Construire un automate à pile qui reconnaît $\overline{L}$ par pile vide et états d'acceptation.
4. Donner une grammaire engendrant M et une grammaire engendrant N. Que vaut $M \cap N$?

On définit les langages sur A :

$$X = \{aca^2ca^3c \cdots a^n c \mid n > 0\} \quad \text{et} \quad \overline{X} = \{a^{i_1} c a^{i_2} c a^{i_3} c \cdots a^{i_n} c \mid n \geq 0 \text{ et } \exists j \neq i_j\}.$$

5. Construire un automate à pile reconnaissant $\overline{X}$ par un mode au choix que l'on précisera.

7 (Examen 2009) Sur l'alphabet $A = \{a, b, c\}$, on considère une machine à pile $\mathcal{M} = (Q, Z, \lambda)$ avec $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$ et λ l'ensemble des règles :

$$\begin{array}{ll} q_1, z_1 \xrightarrow{a} q_2, z_1 z_2 & \qquad q_2, z_3 \xrightarrow{\varepsilon} q_3, z_3 \\ q_2, z_2 \xrightarrow{a} q_2, z_2 z_1 & \qquad q_3, z_3 \xrightarrow{a} q_3, \varepsilon \\ q_2, z_1 \xrightarrow{a} q_2, z_1 z_2 & \qquad q_3, z_3 \xrightarrow{\varepsilon} q_4, \varepsilon \\ q_2, z_2 \xrightarrow{b} q_2, z_2 z_3 & \qquad q_4, z_2 \xrightarrow{c} q_4, \varepsilon \\ q_2, z_3 \xrightarrow{b} q_2, z_3 z_3 & \qquad q_4, z_1 \xrightarrow{c} q_4, \varepsilon \end{array}$$

et on considère des automates à pile (Q, Z, λ, i, K) sur A composés de cette machine à pile $\mathcal{M}$ et ayant $i = (q_1, z_1)$ pour configuration interne de départ, en faisant varier l'ensemble K des configurations internes de reconnaissance.

1. Si $\mathcal{A}_0$ est l'automate à pile pour lequel $f = (q_4, 1)$ est l'unique configuration interne de reconnaissance (*i.e.* $K = \{f\}$), quel est le langage reconnu par $\mathcal{A}_0$?
2. Si $\mathcal{A}_1$ est l'automate à pile pour lequel $K = Q \times \{uz_1\}$ est l'ensemble des configurations internes de reconnaissance, quel est le langage reconnu par $\mathcal{A}_1$?
3. Si $\mathcal{A}_2$ est l'automate à pile pour lequel $K = Q \times \{uz_2\}$ est l'ensemble des configurations internes de reconnaissance, quel est le langage reconnu par $\mathcal{A}_2$?