Université Paris 7-Denis Diderot	Examen du 12 janvier 2007
L3	— Durée 3 h —
d'Informatique	tous documents autorisés

Avertissement : Il est demandé de faire des preuves rigoureuses. Une explication en français correct, claire et précise de ce qui est à faire et de comment le faire pour mener à bien une preuve sera appréciée. On peut évidemment sauter une question en indiquant qu'on admet le résultat.

Soit $A = \{a, b\}$ un alphabet. Si $w \in A^*$, $|w|$ désigne le nombre de lettres du mot w, et si $x \in A$, $|w|_x$ désigne le nombre de x dans ce mot. Le mot vide est noté ε. On note $u \leq w$ le fait que u est un facteur gauche de w, et $u < w$ le fait que c'est un facteur gauche strict de w.

On considère sur l'alphabet A les langages suivants :

$$\begin{array}{rcl} E & = & \{w \in A^* \mid |w|_a = |w|_b\} \\ L & = & \{w \in E \mid \forall u \leq w : |u|_a \geq |u|_b\} \\ D & = & \{w \in E \mid \forall u < w, u \neq \varepsilon : |u|_a > |u|_b\} \end{array}$$

Question 1 : Démontrer que le couple de langages (D, L) est une solution du système d'équations :

$$\begin{array}{rcl} x & = & ayb \\ y & = & x^* \end{array}$$

Question 2 : En utilisant l'identité $x^* = \varepsilon + xx^*$, vérifier que (D, L) est une solution du nouveau système d'équations :

$$\begin{array}{rcl} x & = & ayb \\ y & = & \varepsilon + ayby \end{array}$$

Dire pourquoi ce système d'équations admet une unique solution.
Si $(\emptyset, \emptyset)$ est l'approximant d'ordre 0 de cette solution, en donner les approximants d'ordre 1, 2 et 3.

Question 3 : En multipliant (à droite) par b les deux membres de la dernière équation, et en posant $z = yb$, en déduire que Lb est l'unique solution de l'équation

$$z = b + azz$$

Si $\not{L}$ désigne le langage de Luckaziewicz, démontrer que $\not{L} = Lb$.

Question 4 : Donner une grammaire algébrique non ambiguë permettant d'engendrer les langages L et D. Démontrer que cette grammaire est bien non ambiguë. Donner une grammaire algébrique non ambiguë permettant d'engendrer le langage $\widetilde{L}$, ensemble des mots miroir des mots de L. En déduire une grammaire algébrique engendrant le langage $L \bigcup \widetilde{L}$. Cette dernière est-elle ambiguë ? Le prouver.

Question 5 : Démontrer que $E = (L \bigcup \widetilde{L})^*$. En déduire une grammaire algébrique engendrant E. Mettre cette grammaire sous forme normale de Greibach. En déduire un automate à pile qui reconnaît E par pile vide. Cet automate est-il déterministe ? Le prouver.

Question 6 : Démontrer que $E = (D \bigcup \widetilde{D})^*$. Donner un automate à pile déterministe qui reconnaît D, un automate à pile déterministe qui reconnaît $D \bigcup \widetilde{D}$, et un automate à pile déterministe qui reconnaît E.

Question 7 : Appliquer la construction des triplets de Ginsburg à ce dernier automate à pile, pour obtenir une grammaire algébrique. Appliquer les méthodes du cours pour supprimer dans cette grammaire les variables inutiles, et pour la réduire. Cette grammaire est-elle ambiguë ? Justifiez votre réponse.