Université Paris 7-Denis Diderot
L3
d'Informatique

Examen partiel du 18 novembre 2008
— Durée 2 h —
tous documents autorisés

Avertissement : Il est demandé de faire des preuves rigoureuses. Une explication en français correct, claire et précise de ce qui est à faire et de comment le faire pour mener à bien une preuve sera appréciée. On peut évidemment sauter une question en indiquant qu'on admet le résultat.

Dans ce problème E désigne le produit cartésien $I\!N \times I\!N$.

Soit R_1 la relation sur E suivante :

$$(x, y)R_1(x', y') \Longleftrightarrow x + y \leq x' + y'$$

Question 1 : Démontrer que R_1 est une relation de préordre.
Exhiber deux couples $(x, y), (x', y') \in E$ composés d'entiers tous différents tels que $(x, y)R_1(x', y')$ et $(x', y')R_1(x, y)$.

Question 2 : Dessiner sur une partie de la représentation cartésienne de E les classes de l'équivalence $\equiv_{R_1}$ associée à R_1.

On définit sur E la relation suivante :

$$(x, y)R_2(x', y') \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y < x' + y' \\ ou \\ \exists p \in I\!N : \ x + y = x' + y' = 2p \ et \ x \leq x' \\ ou \\ \exists p \in I\!N : \ x + y = x' + y' = 2p + 1 \ et \ y \leq y' \end{cases}$$

Question 3 : Montrer que R_2 est une relation d'ordre total. Dessiner sur une partie de la représentation cartésienne de E les arcs du diagramme de Hasse de R_2 sur E.

Question 4 : Démontrer que E est bien ordonné par R_2.

On considère le programme récursif suivant :

```
F(x,y) = si x+y =0 alors 0
              sinon
                  si x+y  est pair  et y>0 alors F(x+1,y-1)+1 fin de si
                  si x  est pair  et y=0 alors F(x-1,0)+1 fin de si
                  si x+y  est impair et x>0 alors F(x-1,y+1)+1 fin de si
                  si x+y  est impair  et x=0 alors F(0,y-1)+1 fin de si
         fin de si
```

Question 5 : Démontrer que ce programme se termine pour toute donnée (x, y) dans $I\!N \times I\!N$.

Question 6 : Que calcule ce programme ?

On complète E avec un élément $\top$, on note $E_\top = E \cup \{\top\}$, et on prolonge R_2 sur $E_\top$ en posant $\top R_2 \top$ et $\forall (x, y) \in E \ : \ (x, y) R_2 \top$.

On définit sur $E_\top$ l'opération notée $\oplus$ par :

$$\forall (x, y), (x', y') \in E \ : \ (x, y) \oplus (x', y') = \begin{cases} (x, y) \ si \ (x, y) R_2 (x', y') \\ (x', y') \ si \ (x', y') R_2 (x, y) \end{cases}$$

$$\forall (x, y) \in E \ : \ \top \oplus (x, y) = (x, y) \oplus \top = (x, y)$$

Question 7 : Montrer que $\oplus$ confère à $E_\top$ une structure de monoïde commutatif.

On définit sur $E_\top$ l'opération notée $\otimes$ par :

$$\forall (x, y), (x', y') \in E \ : \ (x, y) \otimes (x', y') = \begin{cases} (x, y) \ si \ (x', y') R_2 (x, y) \\ (x', y') \ si \ (x, y) R_2 (x', y') \end{cases}$$

$$\forall (x, y) \in E \ : \ \top \otimes (x, y) = (x, y) \otimes \top = \top$$

Question 8 : Montrer que $\oplus$ et $\otimes$ confèrent à $E_\top$ une structure de demi-anneau.

Soit n un entier et $\mathcal{M}_{n \times n} < E_\top >$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à cœ□cients dans $E_\top$, que l'on munit des opérations $\bigoplus$ et $\bigotimes$ induites par les opérations $\oplus$ et $\otimes$ sur $E_\top$, et qui confèrent à $\mathcal{M}_{n \times n} < E_\top >$ une structure de demi-anneau. On note comme d'habitude $M^{i+1} = M^i \bigotimes M$ où M^0 est l'élément neutre de $\bigotimes$, et $M^{[0 \leq i \leq k]} = \bigoplus_{0 \leq i \leq k} M^i$.

On étend canoniquement R_2 en une relation sur $\mathcal{M}_{n \times n} < E_\top >$ par :
$M R_2 N \Longleftrightarrow \forall i, j : M[i, j] R_2 N[i, j]$.

Question 9 : Montrer : $\forall k \geq 0, M^{[0 \leq i \leq k+1]} R_2 M^{[0 \leq i \leq k]}$.

Question 10 : Déduire des questions précédentes une méthode pour calculer M^*.

Question 11 : Ecrire un programme qui met en œuvre cette méthode (on vérifiera que ce programme s'arrête sur toute donnée).