Université Paris Diderot - L3 Année universitaire 2010–2011

Examen de Mathématiques Discrètes - 2ème session

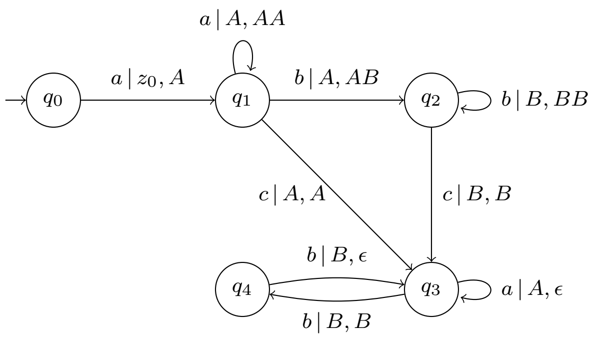
Mardi 14 juin 2011

Durée : 3h

Le barème est donné à titre indicatif et peut être modifié. La notation est sur 25 et sera ramenée à 20.
Documents autorisés : notes de cours et une feuille de notes manuscrites.
Les exercices sont tous indépendants.
Pensez à bien justifier vos réponses et à poser les étapes intermédiaires d'un calcul.

Exercice 1 : Automate à pile et langage (4 points)

Soit l'automate $\mathcal{A} = (Q, A, Z, E, q_0, z_0)$ qui accepte par pile vide :



1. L'automate $\mathcal{A}$ est-il déterministe ?
2. Donnez les mots, de longueur inférieure ou égale à 8, acceptés par $\mathcal{A}$.
3. Quel est le langage $L_{\mathcal{A}}$ des mots acceptés par $\mathcal{A}$?

Exercice 2 Grammaire et langage (7 points)

Soit la grammaire algébrique $G = (A, V, P)$ où $A = \{a, b\}$, $V = \{S_1, S_2, S_3\}$ et

$$P : \begin{cases} S_1 & \rightarrow & aS_2aS_3 + S_2S_3 \\ S_2 & \rightarrow & aS_2a + S_3 \\ S_3 & \rightarrow & S_3S_3 + b \end{cases}$$

1. Montrez que G est ambiguë.
2. Donnez une grammaire G' en forme normale de Greibach équivalente à G. Pourquoi G' est-elle équivalente à G ?
3. Donnez un automate à pile sans ϵ-transition qui accepte, par pile vide, les mots engendrés par G.
4. Décrivez les langages $L_G(S_3)$, $L_G(S_2)$ et $L_G(S_1)$.

Exercice 3 Langage algébrique (3 points)

Soit l'alphabet $A = \{a, b, c\}$ et soit le langage sur A^* :

$$L = \{w \in A^* /\ w\ _a =\ w\ _b \text{ ou } w\ _a =\ w\ _c\}.$$

1. Donnez une grammaire algébrique qui engendre L.
2. Donnez une chaîne de dérivations qui permet d'obtenir le mot $acbccbcbaac$.

Exercice 4 : Série génératrice (6 points)

1. Soit $U(z)$ la série génératrice de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ 2nu_n &= u_{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} \end{aligned}$$

   Calculez l'équation vérifiée par $U(z)$.
2. Montrez alors que $U(z) = C_1 e^z + C_2 e^{\frac{z}{2}}$ en précisant les valeurs des constantes C_1 et C_2.
3. Déduisez-en une formule pour u_n en fonction de n.

Exercice 5 : Série génératrice exponentielle (5 points)

1. Donnez une formule close pour la série formelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{n!} z^n$.
2. Calculez une formule close pour la série formelle $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sum_{p=0}^{n} \frac{p}{p!(n-p)!} z^n$.
3. Soit $\widehat{A}(z)$ la série génératrice exponentielle de la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $a_0 = 1$ et $a_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p}$. Déduisez de la question 2 une formule pour a_n en fonction de n.