Université Paris 7-Denis Diderot
L3
d'Informatique

Examen du 9 janvier 2008
— Durée 3 h —
tous documents autorisés

Avertissement : Il est demandé de faire des preuves rigoureuses. Une explication en français correct, claire et précise de ce qui est à faire et de comment le faire pour mener à bien une preuve sera appréciée. On peut évidemment sauter une question en indiquant qu'on admet le résultat.

1 Exercice 1

On considère le système d'équations :

$$\begin{array}{rcl} x & = & aybx + \varepsilon \\ y & = & axb + bxa \end{array}$$

Question 1 : Combien ce système admet-il de solutions ? (justifiez votre réponse)

Question 2 : Calculer les approximants d'ordre 0, 1, 2 et 3 de la plus petite solution à ce système d'équations.

2 Exercice 2

On considère l'alphabet $A = \{a, c\}$ et les langages sur A suivants :
$L = \{a^n ca^p c \mid p = n + 1\}$, $\bar{L} = \{a^n ca^p c \mid p \neq n + 1\}$, $M = acL^* \cup acL^*a^*c$, $N = L^* \cup L^*a^*c$.

Question 1 : Construire un automate à pile qui reconnaît L par pile vide.

Question 2 : Construire un automate à pile qui reconnaît L^* par états d'acceptation.

Question 3 : Construire un automate à pile qui reconnaît $\bar{L}$ par pile vide et états d'acceptation.

Question 4 : Donner une grammaire engendrant M et une grammaire engendrant N. Que vaut $M \cap N$?

On définit les langages sur A :
$X = \{aca^2ca^3c \dots a^n c \mid n > 0\}$ et $\bar{X} = \{a^{i_1}ca^{i_2}ca^{i_3}c \dots a^{i_n}c \mid n \geq 0 \text{ et } \exists j \neq i_j\}$.

Question 5 : Construire un automate à pile reconnaissant $\bar{X}$ par un mode au choix que l'on précisera.

3 Problème

On considère la grammaire algébrique $G =< A, V, P >$ où $A = \{a, b, [,], +, \times\}$, $V = \{S\}$ et P est défini par :

$$\begin{array}{lcl} S & \longrightarrow & S + S \\ S & \longrightarrow & S \times S \\ S & \longrightarrow & [S] \\ S & \longrightarrow & a \\ S & \longrightarrow & b \end{array}$$

Question 1 : Donner un arbre de dérivation selon G de S en le mot $a \times [b + a]$.

Question 2 : Montrer que cette grammaire est ambiguë.

On considère la grammaire algébrique $H =< A, W, Q >$ où $V = \{S, T, F\}$ et Q est défini par :

$$\begin{array}{lcl} S & \longrightarrow & S + T \\ S & \longrightarrow & T \\ T & \longrightarrow & T \times F \\ T & \longrightarrow & F \\ F & \longrightarrow & [S] \\ F & \longrightarrow & a \\ F & \longrightarrow & b \end{array}$$

Question 3 : Quels sont tous les mots de $L_H(S)$ que l'on peut obtenir par une dérivation d'ordre inférieur ou égal à 6 ?

On définit l'homomorphisme $\delta : (A \cup W)^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ par :
$\delta([) = 1$, $\delta(]) = -1$, $\delta(a) = \delta(b) = \delta(+) = \delta(\times) = \delta(S) = \delta(T) = \delta(F) = 0$

Question 4 : Montrer que pour tout mot w de $\hat{L}_H(S)$, on a :
(a) $\delta(w) = 0$
(b) si $w = uv$ (*i.e.* u est facteur gauche de w), alors $\delta(u) \geq 0$

On définit l'homomorphisme $\mu : (A \cup W)^* \longrightarrow (A \cup V)^*$ par :
$\mu(y) = y$ si $y \in A$ et $\mu(y) = S$ si $y \in W$

Question 5 : Montrer que si $w_1, w_2, \ldots, w_n$ est une suite de mots de $(A \cup W)^*$ qui constitue une dérivation selon H, alors $\mu(w_1), \mu(w_2), \ldots, \mu(w_n)$ est une suite de mots de $(A \cup V)^*$ telle que pout tout i : $\mu(w_i) \longrightarrow \mu(w_{i+1})$ ou bien $\mu(w_i) = \mu(w_{i+1})$. En déduire que $L_H(S) \subseteq L_G(S)$.

Question 6 : On suppose que l'on a montré que $L_H(S) = L_G(S)$ et que H est une grammaire non-ambiguë. Ecrire tous les arbres de dérivation de S en $a \times [b + a]$ selon G et selon H. Quel est le choix effectué dans la grammaire H ? Comment se justifie-t-il ?

Questions subsidiaires (plus difficiles) :
Montrer que H est une grammaire non-ambiguë.
Montrer que $L_H(S) = L_G(S)$.