Université Paris 7-Denis Diderot
L3 d'Informatique
Mathématiques discrètes

Examen partiel du 16 novembre 2009
— Durée 2 h —
tous documents autorisés

Avertissements :

Les copies sont anonymes ; ne pas mettre son nom sur les feuilles intercalaires. Le rouge est réservé au correcteur.

Il est demandé de traiter *deux* des trois exercices proposés. On écrira sur sa copie quels sont les deux exercices choisis, et on s'en tiendra à ceux-ci : s'il advenait que soient rédigées des solutions de questions des trois exercices, seules seraient corrigées les solutions aux questions des deux exercices dûment indiqués (faute d'une indication claire et précise, c'est le correcteur qui choisirait).

Pour chaque question, une explication en français correct, claire et précise de ce qui est à faire et de comment le faire sera appréciée, cette explication précédant la résolution effective de la question. Dans le cas où une démonstration est demandée, on fera une preuve rigoureuse. On peut évidemment sauter une question en indiquant qu'on admet le résultat.

Exercice 1

On note $Q = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{A}$ l'ensemble des applications de Q dans Q, et F l'ensemble des permutations de Q. On considère les deux applications particulières a et b dans $\mathcal{A}$ définies par :

$$\begin{array}{lll} a(1) = 1, & a(2) = 3, & a(3) = 2 \\ b(1) = 2, & b(2) = 1, & b(3) = 3 \end{array}$$

on remarque que ce sont des applications qui sont dans F, *i.e.* des permutations.

Si f et g sont deux applications quelconques de $\mathcal{A}$, on définit un produit dans $\mathcal{A}$, et on notera $f.g$ la composition de g par f (dans cet ordre), soit $g \circ f$.

Question 1 : Sachant que la composition des applications est associative, vérifier que $\mathcal{A}$ muni de la loi produit est un monoïde, et que F en est un sous-monoïde.

Question 2 : Calculer successivement les applications $a.a$, $a.b$, $b.a$, $b.b$, $a.b.a$, $b.a.b$, $a.b.a.b$ et $b.a.b.a$. Vérifiez que vous trouvez, en comptant a et b, six applications distinctes.

Question 3 : Démontrer qu'aucun produit de a et de b ne peut donner une autre application.

Question 4 : Calculer l'ensemble P des permutations x de F qui envoient 1 sur 2 (*i.e.* vérifiant $x(1) = 2$).

On considère par ailleurs l'ensemble $\mathcal{E}$ des suites finies de 0 et de 1, muni du produit de concaténation, dont on rappelle que c'est un monoïde ayant pour élément neutre la suite vide (), et on définit une application ϕ de $\mathcal{E}$ dans F comme le morphisme de monoïdes vérifiant $\phi((0)) = a$ et $\phi((1)) = b$.

Question 5 : Que valent $\phi((0, 0, 0))$, $\phi((1, 0, 0, 1))$, $\phi((0, 1, 0, 1, 0))$?

Question 6 : Que peut-on dire de la partie $\phi^{-1}(P)$?

On définit par récurrence sur la longueur des suites de $\mathcal{E}$ une application ν de $\mathcal{E}$ dans $I\!N$ par : $\nu(()) = 0$, $\nu(f.(0)) = 2 \times \nu(f)$ et $\nu(f.(1)) = 2 \times \nu(f) + 1$.

Question 7 : Que représente la fonction ν ?

Question 8 : Que vaut $\nu(\phi^{-1}(P))$?

Question 9 : Pouvez-vous donner une expression rationnelle de $\phi^{-1}(P)$?

Exercice 2

Soit l'ensemble $Q = I\!N \times I\!N_*$ (où $I\!N_* = I\!N \setminus \{0\}$).

On définit sur Q la relation R par :

$$(p,q)R(p',q') \Longleftrightarrow \begin{cases} p+q < p'+q' \\ ou \\ p+q = p'+q' = 2k+1 \; et \; p \leq p' \\ ou \\ p+q = p'+q' = 2k \; et \; p \geq p' \end{cases}$$

Question 1 : Démontrer que R est une relation d'ordre.

Question 2 : Montrer que R est localement finie.

Question 3 : Cet ordre est-il bien fondé ? (justifiez votre réponse)

Question 4 : Cet ordre est-il un bon ordre ? (justifiez votre réponse)

On appelle g la fonction de Q dans $I\!N$ calculée par le programme suivant :

```
g(p,q) := si p =0 alors 0
         sinon
              si pgcd(p,q)=1  alors 0
               sinon
                    si p+q pair alors g(p-1,q+1)+1  fin de si
                    si p+q impair alors g(p+1,q-1)+1 fin de si
              fin de si
         fin de si
```

Question 5 : Démontrer que ce programme se termine pour toute donnée (p,q) dans Q. Donner les valeurs de $g(p,q)$ pour tous p,q vérifiant $p+q \leq 6$.

On appelle f la fonction de Q dans $I\!N$ calculée par le programme suivant :

```
f(p,q) := si p =0 alors 0
   sinon si p=q=1 alors 1
        sinon k := pgcd(p,q)
          si k!=1 alors f(p/k,q/k)
          sinon
             si p+q pair alors
                si p=1 alors f(p,q-1)+1
                sinon f(p-1-g(p-1,q+1),q+1+g(p-1,q+1))+1 fin de si
              sinon (p+q impair)
                si q=1 alors f(p-1,q)+1
                sinon f(p+1+g(p+1,q-1),q-1-g(p+1,q-1))+1 fin de si
             fin de si
          fin de si
      fin de si
  fin de si
```

Question 6 : Démontrer que ce programme se termine pour toute donnée (p,q) dans Q.

Question 7 : Donner les valeurs de $f(p,q)$ pour tous p,q vérifiant $p+q \leq 6$. Que calcule la fonction f ?

Exercice 3

Soit $\mathbb{N}_\perp = \mathbb{N} \cup \{\perp\}$ où $\perp$ est un nouveau symbole, et on définit sur $\mathbb{N}_\perp$ la relation $\leq_\perp$ par : $x \leq_\perp y \Longleftrightarrow x = y$ ou $x = \perp$.

Question 1 : Montrer que $\leq_\perp$ est une relation d'ordre. On l'appelle l'*ordre plat*.

On considère dans cet exercice l'ensemble $\mathcal{E}$ des applications f de $\mathbb{N}_\perp$ dans lui-même qui vérifient $f(\perp) = \perp$.

Soit R la relation sur $\mathcal{E}$ définie par :

$$fRg \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}_\perp \ : f(x) \leq_\perp g(x)$$

Question 2 : Montrer que R est une relation d'ordre.

Question 3 : Cet ordre est-il total ? (justifiez votre réponse)

Question 4 : Cet ordre est-il bien fondé ? (justifiez votre réponse)

Question 5 : Vérifier que $\mathcal{E}$ admet un plus petit élément pour cet ordre en explicitant celui-ci.

Question 6 : Montrer que R confère à $\mathcal{E}$ une structure d'ordonné complet.

On considère maintenant l'application Θ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ définie, $\forall f \in \mathcal{E}$, par :
$\Theta(f)(\perp) = \perp$,
$\Theta(f)(0) = 1$,
$\Theta(f)(1) = 1$ et
pour $n > 0$, $\Theta(f)(n+1) = \begin{cases} \perp \text{ si } f(n) = \perp \text{ ou si } f(n-1) = \perp \\ f(n-1) + f(n) \text{ si } f(n) \neq \perp \text{ et } f(n-1) \neq \perp \end{cases}$

Question 7 : Montrer que Θ est croissante et continue. En déduire que Θ admet un plus petit point fixe.

On note f_i l'application qui est l'approximant d'ordre i de ce plus petit point fixe.

Question 8 : Calculer les premiers approximants : f_1, f_2 et f_3.

Question 9 : Démontrer que l'approximant d'ordre n est une application f_n qui prend une valeur différente de $\perp$ pour exactement $n+1$ valeurs de $\mathbb{N}_\perp$.

Question 10 : Donner les valeurs en tous points de f_{n+1} en fonction de f_n.

Question 11 : Que vaut le plus petit point fixe de Θ ?