Université Paris 7- Denis Diderot
L3 d'Informatique
Mathématiques Discrètes

Examen de janvier 2010
durée 3 heures
tous documents autorisés

Le but de ce problème est de montrer sur un exemple que l'intersection d'un langage algébrique et d'un langage reconnaissable est un langage algébrique.

Nota : les parties 1 et 2 sont indépendantes, mais sont toutes deux nécessaires à la résolution des parties 3 et 4, elles-mêmes indépendantes.

Partie 1

On note $Q = \{1,2,3,4\}$, et on considère les deux applications de Q dans Q, notées $\overline{a}$ et $\overline{b}$, définies comme suit :

$$\overline{a} : \begin{array}{cc} \text{i} & \overline{a}(\text{i}) \\ \hline 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{array} \qquad \overline{b} : \begin{array}{cc} \text{i} & \overline{b}(\text{i}) \\ \hline 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{array}$$

Question 1 : Dans le monoïde des applications de Q dans Q, on définit le produit de f par g, noté $f.g$, comme la composition de g par f (dans cet ordre), soit $f.g = g \circ f$. Calculer les deux applications $\overline{a}.\overline{a}$ et $\overline{b}.\overline{b}$.

Question 2 : Calculer avec soin le monoïde M engendré par $\overline{a}$ et $\overline{b}$ (ce monoïde se compose de 5 applications, y compris l'application identité notée 1_M).
Ecrire la table de multiplication de ce monoïde.

Question 3 : Dans toute la suite, A désigne l'alphabet $A = \{a, b\}$. Soit φ le morphisme de A^* dans M défini par : $\varphi(a) = \overline{a}$ et $\varphi(b) = \overline{b}$. Que valent $\varphi^{-1}(1_M)$, $\varphi^{-1}(\overline{a})$, $\varphi^{-1}(\overline{b})$, $\varphi^{-1}(\overline{a}\overline{b})$, $\varphi^{-1}(\overline{b}\overline{a})$?
En déduire que le langage $R = a^+b^+$ est un langage reconnaissable.

Partie 2

Question 4 : On considère le système $\mathcal{S}$ composé d'une unique équation :

$$\left\{ \; S \;=\; aSbS + bSaS + 1 \right.$$

Combien de solutions admet ce système ? Calculer les approximants d'ordre $0, 1, 2$ et 3 de la plus petite solution L de ce système. Que vaut L ? (sans donner une preuve formelle, on donnera une idée de comment la mener à bien).

Question 5 : Donner une grammaire algébrique propre qui engendre $L\backslash\{1\}$.

Question 6 : Cette grammaire est-elle ambiguë ? (Justifiez votre réponse)

Question 7 : Donner une grammaire sous forme normale de Greibach pour $L\backslash\{1\}$. En déduire un automate à pile simple qui reconnaît $L\backslash\{1\}$ (par pile vide).

Partie 3

Si $\mathcal{A}$ est un automate à pile simple d'alphabet de pile Z, et de fonction de transition λ, et M un monoïde fini d'élément neutre 1_M, on définit l'automate à pile $\mathcal{A}_M$ par la machine à pile $< A, M, Z, \lambda' >$ où $\lambda' = \{(x, m, z, h, m') \mid (x, z, h) \in \lambda, m.\varphi(x) = m'\}$, Autrement dit, si $m \neq \varphi(1)$, l'équation ayant S_m pour membre gauche est :

$$S_m = \Sigma_{m=\varphi(a)m_1\varphi(b)m_2} aS_{m_1}bS_{m_2} + \Sigma_{m=\varphi(b)m_1\varphi(a)m_2} bS_{m_1}aS_{m_2}$$

Si $m = \varphi(1)$, l'équation ayant S_m pour membre gauche est :

$$S_m = \Sigma_{m=\varphi(a)m_1\varphi(b)m_2} aS_{m_1}bS_{m_2} + \Sigma_{m=\varphi(b)m_1\varphi(a)m_2} bS_{m_1}aS_{m_2} + 1$$

Question 11 : Construire $\mathcal{S}'$ en calculant explicitement les équations issues de S_m pour tous les m de M. (Certains de ces ensembles peuvent éventuellement être vides).

Question 12 : Ecrire la grammaire algébrique correspondante. La réduire vis-à-vis de $S_{\bar{a}\bar{b}}$

Question 13 : Si v est une variable du système $\mathcal{S}'$, on notera $L_{\mathcal{S}'}(v)$ la composante correspondant à cette variable de la plus petite solution de ce système. Montrer par récurrence que, si $f \in L_{\mathcal{S}'}(S_{\varphi(u)})$, alors $f \in [u]$.

Considérant le rationnel R de la question 3 qui s'écrit $\varphi^{-1}(P)$ pour $P \subset M$, on construit $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$ à partir de $\mathcal{S}'$ en ajoutant une nouvelle variable s et l'équation : $s = \Sigma_{m \in P} S_m$. Si v est une variable du système $\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$, on notera $L_{\mathcal{S}_{\mathcal{R}}}(v)$ la composante correspondant à cette variable de la plus petite solution de ce système.

Question 14 : Déduire de ce qui précède que $L_{\mathcal{S}_{\mathcal{R}}}(s) = L \cap R$.

Question subsidiaire : Au vu de ce qui a été fait sur cet exemple, expliquer comment faire pour établir le théorème annoncé :
L'intersection d'un langage algébrique et d'un langage reconnaissable est un langage algébrique.
Comment peut-on établir le théorème :
L'intersection d'un langage algébrique non-ambigu et d'un langage reconnaissable est un langage algébrique non-ambigu.
Comment peut-on établir le théorème :
L'intersection d'un langage algébrique déterministe et d'un langage reconnaissable est un langage algébrique déterministe.