Université Paris Diderot - L3 Année universitaire 2010–2011

Examen de Mathématiques Discrètes

Jeudi 6 janvier 2011

Durée : 3h

Le barème est donné à titre indicatif et peut être modifié. La notation est sur 28 et sera ramenée à 20.

Pensez à bien justifier vos réponses et à poser les étapes intermédiaires d'un calcul.

Documents autorisés : notes de cours et une feuille de notes manuscrites.
Les exercices sont tous indépendants.

Exercice 1 grammaire et langage (5 points)

Soit la grammaire algébrique $G = (A, V, P)$ où $A = \{a, b\}$, $V = \{S, T, U, V, W, Z\}$ et

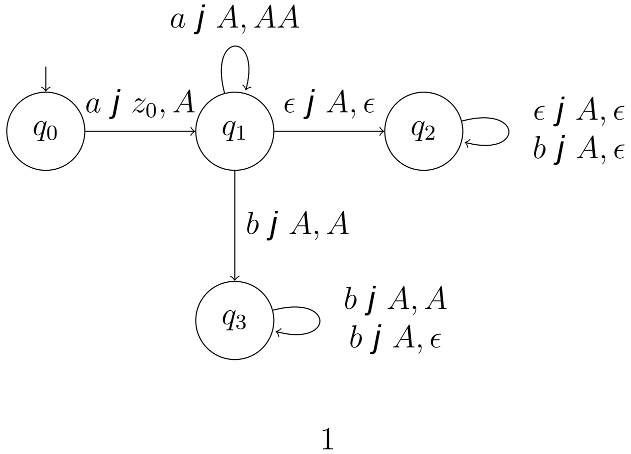
$$P : \left\{ \begin{array}{ccc} S & \rightarrow & SVa + SZa + SZb + UU \\ T & \rightarrow & aTT + bT \\ U & \rightarrow & TbT + cZ + c \\ V & \rightarrow & aV + Z + aa + \epsilon \\ W & \rightarrow & aSU + TV + b \\ Z & \rightarrow & bV + V + bb + \epsilon \end{array} \right.$$

Vous devez justifier chaque réponse.

1. Donnez une grammaire G' réduite vis-à-vis de S et équivalente à G.
2. Donnez une grammaire propre G'' équivalente à G.
3. Décrivez les langages $L_G(V)$ et $L_G(U)$.
4. Montrez alors que $L_G(S) = c(a+b)^*c(a+b)^*$.

Exercice 2 : Automate à pile et langage (4 points)

Soit l'automate $\mathcal{A} = (Q, A, Z, E, q_0, z_0)$ qui accepte par pile vide :



1. L'automate $\mathcal{A}$ est-il déterministe ?
2. Donnez les mots, de longueur inférieure ou égale à 3, acceptés par $\mathcal{A}$.
3. Quel est le langage $L_{\mathcal{A}}$ des mots acceptés par $\mathcal{A}$? Justifiez.

Exercice 3 Grammaire et langage (7 points)

Soit la grammaire algébrique $G = (A, V, P)$ où $A = \{a, b\}$, $V = \{S\}$ et

$$P : \left\{ \; S \;\; \rightarrow \;\; aSb + bSa + SS + ab + ba \right.$$

1. Montrez que G est ambiguë.
2. Donnez une grammaire G' en forme normale de Greibach équivalente à G. Pourquoi G' est-elle équivalente à G ?
3. Les mots suivants appartiennent-ils à $L_G(S)$: $babaab$, $abaaba$, $abaababb$, $aabb$?
4. Décrivez $L_G(S)$.

Exercice 4 Langage algébrique (6 points)

Soit l'alphabet $A = \{a, b, c\}$ et soit le langage sur A^* :

$$L = \{a^i b^j c^k \;/\; i, j, k \geqslant 1 \text{ et } i + k \leqslant j \leqslant 2i + k\}.$$

1. Donnez une grammaire algébrique qui engendre L.
2. Donnez un automate à pile qui accepte L par pile vide.
3. Donnez un automate à pile qui accepte L par états finaux.

Exercice 5 : Série génératrice (6 points)

1. Calculez une formule close pour la série formelle $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} n 2^n z^n$.
2. Soit $U(z)$ la série génératrice de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2^k k u_{n-1-k}$. Calculez une formule close pour $U(z)$.
3. Déduisez-en une formule pour u_n en fonction de n.