Université Paris 7-Denis Diderot
L3
d'Informatique

Examen du xx mai 2007
— Durée 3 h —
sans documents

Avertissement :
Questions de cours, notées sur 7 points : on demande d'être clair, précis et concis.
Exercice, noté sur 3 points : Il est demandé une brève explication de ce qui est à faire et de faire les calculs en les présentant de manière claire et commentée
Problème, noté sur 10 points : Il est demandé de faire des preuves rigoureuses. Une explication en français correct, claire et précise de ce qui est à faire et de comment le faire pour mener à bien une preuve sera appréciée. On peut évidemment sauter une question en indiquant qu'on admet le résultat.

1 Questions de cours

Qu'est-ce qu'une relation réflexive et transitive ?
Qu'est-ce que la fermeture réflexive et transitive d'une relation ?
Si S désigne la relation successeur sur $\mathbb{Z}$, que vaut la fermeture réflexive et transitive de S ?
Quand dit-on d'une relation qu'elle est une relation d'ordre ?
Qu'est-ce qu'un bon ordre ?
Expliquer pourquoi S^* est un ordre qui n'est pas un bon ordre.
Définir sur $\mathbb{Z}$ un bon ordre.

2 Exercice

On considère la grammaire algébrique $G = < A, V, P >$ où $A = \{a, b, c\}$, $V = \{x, y, z, t, u, v\}$ et P est défini par :

$$
\begin{array}{lcl}
x & \longrightarrow & auv + xy + ybz \\
y & \longrightarrow & zz + xt \\
z & \longrightarrow & tz + yt + atct + tt \\
t & \longrightarrow & att + \varepsilon \\
u & \longrightarrow & aubv \\
v & \longrightarrow & uct + \varepsilon
\end{array}
$$

Réduire cette grammaire vis à vis de x.
Rendre propre la grammaire obtenue.

3 Problème

Soit $G =< A, V, P >$ une grammaire algébrique dont on suppose qu'aucune variable n'engendre un langage vide. A toute variable $v \in V$ on associe les ensembles :

- $Prem(v) = \{a \in A \mid \exists w \in A^* \ : v \longrightarrow^* aw\}$
- $Dern(v) = \{a \in A \mid \exists w \in A^* \ : v \longrightarrow^* wa\}$

et à toute lettre $a \in A$ on associe l'ensemble :

- $Suiv(a) = \{b \in A \mid \exists w_1, w_2 \in A^*, \exists v \in V \ : v \longrightarrow^* w_1abw_2\}$

On suppose dans un premier temps (jusqu'à la question 8) que la grammaire G est pré-propre, *i.e.* qu'elle ne contient aucune règle de membre droit égal au mot vide ε (mais peut contenir un membre droit qui est une lettre de V).

Question 1 : Donner, en justifiant votre réponse, une valeur d'une borne *a priori* M telle que $Prem(v) = \{a \in A \mid \exists w \in A^*, \exists p \leq M \ : v \longrightarrow^p aw\}$.

Question 2 : En déduire un algorithme permettant de calculer les ensembles $Prem(v)$ et $Dern(v)$.

Question 3 : Démontrer que s'il existe un membre droit de règle m qui s'écrit $m = m_1avm_2$, alors $b \in Prem(v) \Longrightarrow b \in Suiv(a)$.
En admettant que pour tout $v \in V$, $Prem(v)$ et $Dern(v)$ sont effectivement calculables, démontrer que pour tout $a \in A$ $Suiv(a)$ l'est aussi.

Question 4 : Donner, en justifiant votre réponse, une valeur d'une borne *a priori* M' telle que $Suiv(a) = \{b \in A \mid \exists w_1, w_2 \in A^*, \exists v \in V, \exists p \leq .vjwabwauemenoueiterriaaiteprammairec$