Examen de Mathématiques Discrètes - Session 2

Mardi 18 juin 2013

Durée : 3 heures

Les téléphones portables et autres appareils éléctroniques ne sont pas autorisés.
Seuls les documents de cours et tds sont autorisés.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : (3 points)

Montrez que le langage $L = \{w \ / \ w \in \{a,b\}^*, |w|_a = |w|_b\}$ est algébrique.

Exercice 2 : (4 points)

Soit la grammaire $G = (A, V, P)$ suivante : $A = \{a, b\}$, $V = \{T, X, Y\}$, d'axiome T et avec

$$P = \begin{cases} T & \rightarrow \quad XY \\ X & \rightarrow \quad YYT \mid b \mid \epsilon \\ Y & \rightarrow \quad XT \mid a \end{cases}$$

1. Montrez que G est ambiguë.
2. Rendez propre la grammaire G. On note G' cette grammaire.
3. Mettez la grammaire G' en forme normale de Greibach. On note G'' cette grammaire.
4. A-t-on $L(G) = L(G'')$? Justifiez.
5. Montrez que le mot $bbbaabaa$ appartient à $L(G)$.

Exercice 3 : (3 points)

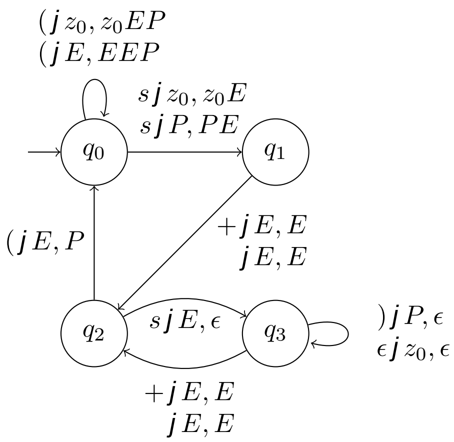
Soit la grammaire $G = (A, V, P)$ suivante : $A = \{a, b\}$, $V = \{U, W, X, Y, Z\}$,

$$P = \begin{cases} U & \rightarrow \quad aUa \mid bUb \mid X \\ W & \rightarrow \quad aW \mid dW \\ X & \rightarrow \quad cZd \mid UWU \\ Y & \rightarrow \quad cY \mid \epsilon \\ Z & \rightarrow \quad cZd \mid d \end{cases}$$

1. Réduisez G vis-à-vis de U. Soit G' la grammaire obtenue.
2. Déterminez le langage L_1 des mots engendrés par G à partir de U et prouvez-le (montrez que $L_1 \subseteq L_U(G)$, puis que $L_U(G) \subseteq L_1$).
3. Montrez que la grammaire G' n'est pas ambiguë.

Exercice 4 : (4 points)

Soit A l'alphabet $\{a, b, c, +, -, (,)\}$. Soit l'automate $\mathcal{A} = (Q, A, Z, E, q_0, z_0)$ suivant qui accepte par pile vide pour tout $s \in \{a, b, c\}$:



1. Les cinq mots suivants sont-ils acceptés par l'automate *A* : $(a+b)\quad c$, $((a+b)\quad c)$, $a+b\quad c$, $a+(b\quad c)$, $a+)b\quad c($?
   Lorsque le mot est accepté, vous devez donner un chemin acceptant de l'automate permettant de l'obtenir. Lorsque le mot n'est pas accepté, vous devez expliquer où cela bloque dans l'automate.
2. Décrivez le langage reconnu lorsqu'on s'interdit de suivre les transitions de *A* qui lisent le symbole « (» ou «) » ? Justifiez.
3. Décrivez le langage reconnu par l'automate *A* ? Justifiez.

Exercice 5 : (6 points)

Le but de cet exercice est de calculer la complexité en nombre d'affectations (=) de la fonction suivante :

```
def f(tab):
  Si longueur(tab) < 2 : retourner tab
  r1 = alea([0,longueur(tab)[)
  r2 = alea([0,longueur(tab)[)
  Si longueur(tab) > 3 :
    tab[-r1,-r2] = f(tab[-r1,-r2])
  Pour i dans [0,longueur(tab)[:
    tab[i] = g(tab[i])
  retourner tab
```

On suppose que `longueur`, qui retourne la longueur d'un tableau, `alea` et `g` s'exécutent en temps constant. Par ailleurs `tab[-r]` signifie « le tableau `tab` privé de l'élément d'indice `r` ».
On note c_n la complexité en nombre d'affectations de la fonction f appelée avec un tableau de longueur n et $C(z)$ la série génératrice des c_n.

1. Justifiez que c_n vérifie la récurrence suivante :
$$c_n = c_{n-2} + n + 3 \text{ si } n \geqslant 3,\ c_2 = 4 \ \text{ et } \ c_0 = c_1 = 0.$$
2. Calculez l'équation fonctionnelle vérifiée par C et déduisez-en une fraction rationnelle dépendant de z pour C.
3. Déterminer les coefficients a, b, c, d vérifiant
$$C(z) = 1 + \frac{a}{1+z} + \frac{b}{1-z} + \frac{c}{(1-z)^2} + \frac{d}{(1-z)^3}.$$
4. Calculez la dérivée seconde de $\frac{1}{1-z}$ et en déduire le développement en série entière de $\frac{1}{(1-z)^3}$.
5. Calculez alors l'expression de c_n en fonction de n. Vérifiez votre résultat pour $n = 0, 1, 2, 3$ et 4.