Soit $G = \langle A; V; P \rangle$ une grammaire algébrique avec A l'alphabet des symboles terminaux, V l'ensemble des variables (*i.e.* les symboles non-terminaux) et P les règles de production.

La grammaire G est *pré-réduite* si :

(1) aucun non-terminal n'engendre le langage vide : $\forall T \in V, L_G(T) \neq \emptyset$.

La grammaire G est *réduite vis-à-vis d'un non-terminal* $T \in V$ si elle est pré-réduite et si :

(2) tous les non-terminaux peuvent apparaître par dérivation à partir de T :

$$\forall S \in V, \exists u_1, u_2 \in (A \cup V)^* \text{ vérifiant } u_1 S u_2 \in \widehat{L}_G(T)$$

Pour réduire G, on peut définir :

(1) $U_0 = A$, $U_i = U_{i-1} \cup \{S \in V : \exists m \in U_{i-1}^*, S \to m \in P\}$ et $U = (\bigcup_{i \geq 0} U_i) \setminus A$ l'ensemble des variables *productives* ;

(2) $W_0 = \{T\}$, $W_i = W_{i-1} \cup \{S \in V : \exists S' \in W_{i-1}, \exists m_1, m_2 \in (A \cup V)^*, S' \to m_1 S m_2 \in P\}$ et $W = \bigcup_{i \geq 0} W_i$ l'ensemble des variables *accessibles* à partir de T.

On obtient une grammaire pré-réduite G' (*resp.* réduite G'') en supprimant dans G (*resp.* dans G') toutes les règles où apparaît une variable non productive (*resp.* non accessible).

1 Vérifier que les grammaires suivantes sont réduites (vis-à-vis de S) :

1. $\begin{cases} S \to ASB \mid \varepsilon \\ A \to aAS \mid a \\ B \to SbS \mid A \mid bb \end{cases}$

2. $\begin{cases} S \to 0A0 \mid 1B1 \mid BB \\ A \to C \\ B \to S \mid A \\ C \to S \mid \varepsilon \end{cases}$

3. $\begin{cases} S \to AAA \mid B \\ A \to aA \mid B \\ B \to \varepsilon \end{cases}$

La grammaire $G = \langle A; V; P \rangle$ est *propre* si :

(3) G ne contient aucune règle de la forme $S \to \varepsilon$ (ε-règle) ;

(4) G ne contient aucune règle de la forme $S \to T$ (règle unitaire).

On peut définir :

(3) $N_0 = \{S \in V : S \to \varepsilon \in P\}$, $N_i = N_{i-1} \cup \{S \in V : \exists m \in U_{i-1}^*, S \to m \in P\}$ et $N = \bigcup_{i \geq 0} N_i$ l'ensemble des variables *annulables* ;

(4) la relation $\leq$ par $S \leq T \iff S \xrightarrow{*} T$ et l'équivalence $\equiv$ par $S \equiv T \iff S \leq T \,\&\, T \leq S$.

Pour obtenir une grammaire propre à partir d'une grammaire réduite :

(3) pour chaque variable annulable S, on remplace, dans les membres droits, chaque occurrence de S par $S + \varepsilon$, puis on élimine les règles $S \to \varepsilon$;

(4) pour chaque variable S maximale dans l'ordre quotient, on remplace chaque règle $T \to S$ par les règles $T \to m$ où m décrit les membres droits des règles issues de S, ce processus étant itéré avec les variables devenues maximales.

2 Réduire vis-à-vis de S_0, puis rendre propre les grammaires suivantes :

1. $\begin{cases} S_0 \to S_1S_2 \mid S_3S_4 \mid S_5 \\ S_1 \to S_1S_1 \mid S_1S_4 \\ S_2 \to aS_2 \mid S_3 \\ S_3 \to S_2 \mid S_4 \mid S_5aS_3 \\ S_4 \to cS_4 \mid \varepsilon \\ S_5 \to S_4 \mid b \end{cases}$

2. $\begin{cases} S_0 \to S_0S_1 \mid S_1 \mid S_2 \\ S_1 \to bS_1 \mid aS_3S_5 \mid \varepsilon \\ S_2 \to bS_2 \mid abS_4 \mid \varepsilon \\ S_3 \to bS_1 \mid S_2S_3 \\ S_4 \to aS_5S_2 \mid bS_1S_6S_7 \\ S_5 \to aS_5 \mid bS_5s_6 \\ S_6 \to aS_6b \mid aS_4 \\ S_7 \to S_5S_2 \mid aS_7S_6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} S_0 \to S_1 \mid S_0aS_2 \mid bS_2S_3 \mid \varepsilon \\ S_1 \to S_1bS_0 \mid S_3aS_1 \\ S_2 \to S_0bS_0 \mid S_2S_3a \mid aS_1S_3 \\ S_3 \to S_1S_2 \mid S_3bS_2 \mid aS_0bS_3 \end{cases}$

> La grammaire $G = \langle A, V, P \rangle$ est *sous forme normale de Chomsky* (ou *sous forme normale quadratique*) si on a $P \subseteq V \times VV \cup V \times A$.
> À partir d'une grammaire G propre, décomposer les règles de productions ayant strictement plus de deux symboles : remplacer les règles du type $A \to u_1u_2 \cdots u_k$ avec $u_i \in V \cup A$ et $k \geq 3$ par $A \to u_1A_1; A_1 \to u_2A_2; \ldots; A_{k-2} \to u_{k-1}u_k$ où les A_i sont de nouvelles variables.
> On obtient alors une grammaire sous forme normale de Chomsky en introduisant une nouvelle variable T_a avec la règle $T_a \to a$ pour chaque lettre terminale a et en remplaçant chaque occurrence de a par T_a.

3 Mettre les grammaires suivantes sous forme normale de Chomsky :

1. $\{ S \to aS \mid Sb \mid c$

2. $\begin{cases} S \to A \\ A \to b \mid c \end{cases}$

3. $\{ S \to abcdef$

4. $\begin{cases} S \to aS \mid Ab \\ A \to cB \\ B \to dA \mid e \end{cases}$

5. $\begin{cases} S \to aSAb \mid bSS \mid d \\ A \to cASaA \mid bcd \end{cases}$

6. $\{ S \to x \mid lSr \mid SpS \mid SmS$

> La grammaire $G = \langle A, V, P \rangle$ est *sous forme normale de Greibach* (*resp. presque-Greibach*) si on a $P \subseteq V \times AV^*$ (*resp.* $P \subseteq V \times A(A \cup V)^*$).
> Pour $V = \{S_1, \ldots, S_r\}$, on pose $V' = \{S'_1, \ldots, S'_r\}$. Pour G propre, on construit une suite $G = G_1, G_2, \ldots, G_{2r+1}$ de grammaires équivalentes (avec G_{2r+1} presque-Greibach) :
>
> G_{2i} s'obtient en remplaçant dans G_{2i-1} les règles $S_i \to S_im_1 \mid \cdots \mid S_im_k \mid w_1 \mid \cdots \mid w_p$ par
>
> $$\begin{cases} S_i \to w_1S'_i \mid \cdots \mid w_pS'_i \mid w_1 \mid \cdots \mid w_p \\ S'_i \to m_1S'_i \mid \cdots \mid m_kS'_i \mid m_1 \mid \cdots \mid m_k \end{cases}$$
>
> G_{2i+1} s'obtient en remplaçant dans toute règle de G_{2i} de la forme $S_j \to S_im$ avec $j \neq i$, cette occurrence de S_i par les membres droits issus de S_i dans G_{2i}.
>
> On obtient alors une grammaire sous forme normale de Greibach en introduisant une nouvelle variable T_a avec la règle $T_a \to a$ pour chaque lettre terminale a et en remplaçant chaque occurrence de a par T_a.

4 Mettre les grammaires suivantes sous forme normale de Greibach :

1. $\begin{cases} S_1 \to S_2S_3 \\ S_2 \to S_1S_2 \mid a \\ S_3 \to b \end{cases}$

2. $\begin{cases} S_1 \to S_2S_3 \\ S_2 \to S_1S_2 \mid a \\ S_3 \to S_3S_1 \mid b \end{cases}$

3. $\begin{cases} S \to ST \mid a \\ T \to TS \mid b \end{cases}$

4. $\begin{cases} S \to SaT \mid TT \mid b \\ T \to Td \mid TSa \mid aS \mid c \end{cases}$

5. $\begin{cases} S_1 \to S_1S_1 \mid S_1S_2 \mid S_3S_2 \mid S_2b \\ S_2 \to S_2S_1 \mid S_1S_2 \mid S_3S_3 \mid S_1a \\ S_3 \to S_1S_3 \mid S_2S_3 \mid S_3S_1 \mid a \end{cases}$