Université Paris 7-Denis Diderot	Examen partiel du 17 novembre 2006
L3	— Durée 2 h —
d'Informatique	tous documents autorisés

Avertissement : Il est demandé de faire des preuves rigoureuses. Une explication en français correct, claire et précise de ce qui est à faire et de comment le faire pour mener à bien une preuve sera appréciée. On peut évidemment sauter une question en indiquant qu'on admet le résultat.

On désigne par $[n]$ l'ensemble des entiers de $-n$ à n, et par E_n la partie de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ constituée des couples d'éléments de $[n]$, soit $E_n = [n] \times [n]$. On notera $E_\infty = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. On utilisera dans toute la suite une représentation cartésienne des ensembles E_n, la première composante étant portée en abscisse, et la seconde en ordonnée.

On définit dans ce problème des relations sur E_∞, et on note de la même façon la relation sur E_∞ et sa restriction sur E_n.

Soit R la relation sur E_∞ suivante :

$$(x,y)R(x',y') \Longleftrightarrow Max\{|x|,|y|\} \leq Max\{|x'|,|y'|\}$$

Question 1 : Démontrer que R est une relation de préordre.
Exhiber deux couples $(x,y),(x',y') \in E_2$ composés d'entiers tous différents tels que $(x,y)R(x',y')$ et $(x',y')R(x,y)$.

Question 2 : Dessiner sur la représentation de E_2 les classes de l'équivalence $\equiv_R$ associée à R.

On définit sur E_∞ la relation suivante :

$$(x,y)R_1(x',y') \Longleftrightarrow \begin{cases} Max\{|x|,|y|\} < Max\{|x'|,|y'|\} \\ ou \\ Max\{|x|,|y|\} = Max\{|x'|,|y'|\} \ et \ x \leq x' \end{cases}$$

Question 3 : Démontrer que R_1 est une relation de préordre. Exhiber deux couples $(x,y),(x',y') \in E_2$ qui soient équivalents par rapport à la relation d'équivalence associée à R et non équivalents par rapport à la relation d'équivalence associée à R_1. Dessiner sur la représentation de E_2 les classes de l'équivalence associée.

On définit enfin sur E_∞ la relation suivante :

$$(x,y)R_2(x',y') \Longleftrightarrow \begin{cases} Max\{|x|,|y|\} < Max\{|x'|,|y'|\} \\ ou \\ Max\{|x|,|y|\} = Max\{|x'|,|y'|\} \; et \\ \quad (x+y \geq 0 \; et \; x'+y' < 0) \; ou \\ \quad (x+y \geq 0 \; et \; x'+y' \geq 0 \; et \; (x > x' \; ou \; (x = x' \; et \; y \leq y'))) \; ou \\ \quad (x+y < 0 \; et \; x'+y' < 0 \; et \; (x < x' \; ou \; (x = x' \; et \; y \geq y'))) \end{cases}$$

Question 4 : Montrer que R_2 est une relation d'ordre total. Donner une description en français, inruitive mais précise, de comment sont ordonnés les points du plan. Dessiner le diagramme de Hasse de R_2 sur E_2.

Question 5 : Démontrer que E_∞ est bien ordonné par R_2.

La relation R_2 définit une bijection de E_∞ dans $I\!N$, notée φ, qui associe à un couple le nombre de couples qui le précèdent dans l'ordre considéré.

Question 6 : Donner pour cette fonction φ une formule permettant le calcul de celle-ci. Démontrer, par récurrence, la validité de la formule trouvée. Que valent $\varphi((63,-29))$ et $\varphi((-53,38))$? (On explicitera les calculs).

Question 7 : Donner pour la fonction inverse φ^{-1} une formule permettant le calcul de celle-ci. Démontrer, par récurrence, la validité de la formule trouvée. Que valent $\varphi^{-1}(1000)$ et $\varphi^{-1}(10.000)$? (On explicitera les calculs).

On considère le programme récursif suivant :

```
F(x,y) = si x+y =0 alors
                si x =0 (et donc y = 0) alors 0 fin de si
                si x > 0 alors F(x-1,y+1)+1 fin de si
                si x < 0 alors F(x+1,y) fin de si
              fin de si
         si x+y >0  alors
                 si x<y alors F(x+1,y) sinon F(x,y-1)+1 fin de si
                 fin de si
         si x+y <0  alors
                si x<=y alors F(x,y+1)+1 sinon F(x-1,y) fin de si
                fin de si
```

Question 8 : Démontrer que ce programme se termine pour toute donnée (x,y) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Question 9 : Comment modifier ce programme pour qu'il calcule, pour tout couple (x,y), la valeur $\varphi((x,y))$?