

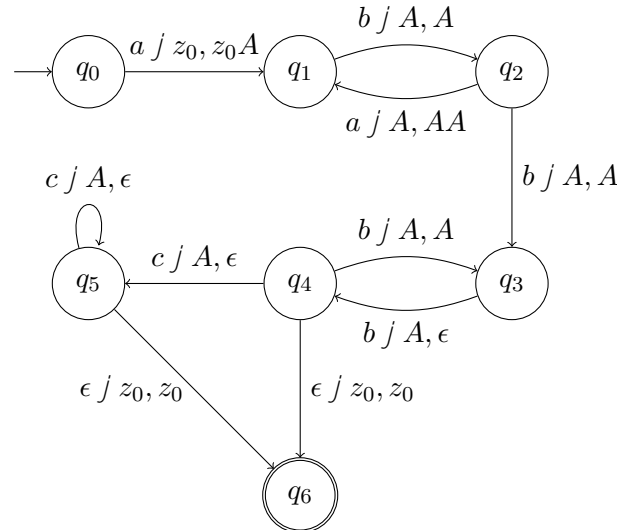
## Examen de Mathématiques Discrètes - Session 2

Mardi 19 juin 2012

Durée : 3 heure

**Seules les notes de cours et de td sont autorisées.****Les téléphones portables et autres appareils électroniques de communication ne sont pas autorisés.**

Le barème est donné à titre indicatif.

**Exercice 1 :** Langage algébrique (3 points)Soit le langage  $L = fc^p a^n b^q / p > q \geq 0$  et  $n > 0$ .**Question 1 :** Explicitez une grammaire qui engendre  $L$ . Justifiez.**Question 2 :** Donnez un automate à pile qui engendre  $L$ . Justifiez.**Question 3 :** En déduire que  $L$  est un langage algébrique.**Exercice 2 :** Automate et langage (4 points)Soit l'automate  $A = (Q, A, Z, E, q_0, z_0)$  qui accepte par l'état final  $q_6$  :**Question 1 :** L'automate  $A$  est-il déterministe ? Justifiez.**Question 2 :** Donnez les mots, de longueur inférieure ou égale à 10, acceptés par  $A$ .**Question 3 :** Quel est le langage  $L_A$  des mots acceptés par  $A$  ? Justifiez votre réponse.

**Exercice 3 : Grammaire et langage (5 points)**

Soit la grammaire algébrique  $G = (A, V, P)$  où  $A = fa, bg$ ,  $V = fS, Tg$  et

$$P : \begin{cases} S & \rightarrow & SaSb + Tb \\ T & \rightarrow & abT + a + b \end{cases}$$

**Question 1 :** Donnez les mots de longueur inférieure ou égale à 6 de  $L_G(S)$ , en explicitant pour chacun la suite de dérivations effectuées à partir de  $S$  pour l'obtenir.

**Question 2 :** Montrez que la grammaire  $G$  est ambiguë.

**Question 3 :** Décrivez le langage  $L_G(T)$ , puis le langage  $L_G(S)$ . Justifiez vos réponses.

**Question 4 :**  $G$  est-elle une grammaire propre ? Justifiez.

**Question 5 :** Donnez une grammaire  $G'$  en forme normale de Greibach équivalente à  $G$ .

**Exercice 4 : Complexité (5 points)**

Soit la complexité  $c_n$ ,  $n \geq 0$ , en nombre d'appels à la fonction `al` et `ea` dans la fonction `f(n)` définie de la façon suivante :

```
f(n){
  m = al(ea(1, 10));
  if(n>=1)
    m = m * f(n-1)
  if(n>=2)
    m = m + f(n-2) + f(n-2)
  return m;
}
```

**Question 1 :** Que valent  $c_0$  et  $c_1$  ? Montrez que la suite  $(c_n)_{n \geq 2}$  vérifie la récurrence linéaire suivante :

$$c_n = 1 + c_{n-1} + 2c_{n-2}, \forall n \geq 2.$$

**Question 2 :** Soit  $C(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ , la série génératrice de la suite  $(c_n)_{n \geq 0}$ . Déduisez de la question précédente une équation fonctionnelle vérifiée par la série génératrice  $C(z)$ . Exprimez ensuite la série  $C(z)$  en fonction de  $z$ .

**Question 3 :** Déduisez une expression en fonction de  $n$  pour la suite  $(c_n)_{n \geq 0}$ .

*Note : Il ne vous est pas demandé de prouver que l'expression de  $c_n$  donne bien une valeur entière pour tout  $n \geq 0$ . Néanmoins, il est conseillé de le vérifier sur les premières valeurs de  $n$ .*

**Exercice 5 : Série génératrice (3 points)**

Soit la série génératrice  $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ , vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :

$$A(z) = 2z + 4zA(z) + 2zA^2(z),$$

avec  $a_0 = 0$ .

**Question 1 :** Exprimez la série  $A(z)$  en fonction de  $z$ .

**Question 2 :** Déduisez une expression en fonction de  $n$  pour la suite  $(a_n)_{n \geq 0}$ .