1 Montrer par récurrence les formules suivantes :

1. $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$,
2. $1+3+\cdots+(2n-1) = n^2$,
3. $2+4+\cdots+2n = n(n+1)$.

Trouver une interprétation combinatoire de la somme des entiers impairs.

2 Donner les complexités en nombre d'opérations des bouts de code suivants :

1.
```
for(i=1;i<=n;i++)
  for(j=1;j<=i;j++)
    operation(i,j);
```

2.
```
for(i=1;i<=n;i++)
  for(j=1;j<=n;j++)
    operation(i,j);
```

Comparer ces deux résultats.

3 Retrouver les résultats de l'exercice 1 en sachant que les solutions sont des polynômes de degré 2.

4 Montrer par récurrence les formules suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$;
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

Montrer directement (*i.e.* sans utiliser la formule ci-dessus) que $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est un entier.

5 Donner la complexité en nombre d'opérations du bout de code suivant :

```
for(i=1;i<=n;i++)
        for(j=1;j<=i;j++)
                for(k=1;k<=j;k++)
                        operation(i,j,k);
```

6 Déduire de l'exercice 4, la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i i^2$. Retrouver ce résultat par récurrence.

7 Retrouver les résultats de l'exercice 4 en sachant que les solutions sont des polynômes de degré 3.

8 Montrer par récurrence les formules suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i)^3 = 2n^2(n+1)^2$;
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3 = n^2(2n^2-1)$.

Retrouver la formule :

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 .$$

9 Calculer :

1. la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$;
   (a) en observant que c'est une somme géométrique ;
   (b) en écrivant ce nombre en base 2 ;

2. la somme $\sum_{k=0}^{n} (1+x)^k$ en s'inspirant de la question précédente ;

3. la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} k2^k$
   (a) en utilisant le résultat de la question précédente ;
   (b) par récurrence ;
   (c) en écrivant de deux façons différentes S_{n+1} en fonction de S_n.

10 On cherche à calculer itérativement les valeurs prises par le polynôme

$$P(X) = X^3 + 2X^2 + X + 2$$

en chacun des entiers.

1. Pour ceci, calculer le polynôme $Q(X) = P(X+1) - P(X)$. Quel est son degré ? Mêmes questions pour les polynômes $R(X) = Q(X+1) - Q(X)$ et $S(X) = R(X+1) - R(X)$. Quel remarque peut-on faire ?
2. Supposons maintenant connues les valeurs de P, Q, R au point x, comment peut-on calculer les valeurs de P, Q, R au point $x+1$, sans faire de multiplications ?
3. Écrire un algorithme qui calcule les valeurs de P sur chacun des entiers.

11 Considérons le problème des tours de Hanoï : déplacer des disques de diamètres différents d'une tour de départ à une tour d'arrivée en passant par une tour intermédiaire et ceci en un minimum de coups, tout en respectant les règles suivantes :
– on ne peut déplacer plus d'un disque à la fois ;
– on ne peut placer un disque que sur un autre disque plus grand que lui ou sur un emplacement vide (on suppose que cette règle est également respectée dans la configuration de départ).

```
Hanoi(nombre, A, B, I)
        si nombre > 0 alors
                Hanoi(nombre - 1, A, I, B);
                Déplacer un disque de A vers B;
                Hanoi(nombre - 1, I, B, A);
        finSi
```

Étudier la complexité en temps de cet algorithme.

12 Utilisons le principe de décomposition en éléments simples.

1. Trouver les coefficients a et b vérifiant $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.
2. En déduire la somme $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$.
3. Trouver les coefficients a et b vérifiant $\frac{1}{(x+k)(x+n)} = \frac{a}{x+k} + \frac{b}{x+n}$.
4. Trouver les coefficients a, b et c vérifiant $\frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$.
5. En déduire la somme $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)(i+2)}$.
6. Démontrer par récurrence $\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{x+k}$.

◇ ◇ ◇ ◇ ◇