1 Montrer que la série formelle U définie par

$$U(z) = z + z^2 + z^4 + z^8 + z^{16} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$$

vérifie l'équation

$$U(z) = U(z^2) + z\ .$$

2 Multiplier les deux séries formelles suivantes $S(z) = \sum_{n\geq 0} z^n$ et $T(z) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n z^n$. Donner une autre méthode permettant de retrouver ce résultat.

3 Soit a_n une suite vérifiant une récurrence linéaire à coefficients constants. Soit $A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ sa fonction génératrice.

1. Quelles sont les fonctions génératrices des suites $p_n = a_{n+3}$, $q_n = 3a_n$ et $r_n = a_n + 3$?
2. Quelle est la série génératrice de la suite $s_n = a_0 + \cdots + a_n$?

4 Pour un entier positif n, on note $v(n)$ le nombre de 1 dans l'écriture binaire de n. Par exemple, on a $v(0) = 0$, $v(4) = 1$ et $v(13) = 3$.

1. Exprimer $v(2n)$ et $v(2n+1)$ en fonction de $v(n)$.
2. Montrer que la fonction génératrice $V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v(n)z^n$ vérifie l'équation suivante

$$V(z) = (1+z)V(z^2) + \frac{z}{1-z^2}\ .$$

5 Montrer que la suite $u_n = n^2$ vérifie une récurrence linéaire finie à coefficients constants sans second membre. En déduire $\sum_{n\geq 0} n^2 z^n = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$, puis une forme close de $\sum_{k=1}^{k=n} k^2$.

6 Résoudre les récurrences suivantes :

1. $u_0 = u_1 = 2$ et $u_n = u_{n-2} + 2\cdot 3^{n-2}$ pour $n > 1$;
2. $u_0 = 2$, $u_n = 2u_{n-1} + n^2 - 2n$ pour $n > 0$;
3. $u_0 = 14$, $u_1 = 24$, $u_n = 8u_{n-1} - 15u_{n-2}$ pour $n > 1$;
4. $u_0 = 1$, $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + \cdots + nu_0$ pour $n > 0$.

7 On recherche des formes closes pour les séries génératrices des fonctions $\min$ et $\max$ qui à un couple d'entiers associent respectivement le plus petit et le plus grand des deux ($\min(5,3) = 3$, $\max(5,3) = 5$, $\min(4,4) = \max(4,4) = 4$).

1. Calculer $\sum_{m\geq 0} mx^m$.
2. En déduire $\sum_{m,n\geq 0} (m+n)x^m y^n$.
3. Montrer

$$\sum_{m,n\geq 0} \min(m,n)x^m y^n = \frac{xy}{(1-x)(1-y)(1-xy)}\ .$$

4. Des points 2. et 3. précédents déduire

$$\sum_{m,n\geq 0} \max(m,n)x^m y^n = \frac{x + x^2y^2 - 3xy + y}{(1-x)^2(1-y)^2(1-xy)}\ .$$

8 On appelle f_n le n-ième nombre de Fibonacci : $f_0 = f_1 = 1$ et $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. On rappelle :

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k = \frac{1}{1 - z - z^2} \ .$$

1. On définit la suite g_n par

$$\forall n \geq 0 \qquad g_n = f_{2n} \ .$$