

TD n°4

Induction sur les listes et Logique de Hoare

1 Induction sur les listes

Exercice 1 Soit les fonctions

$$\text{Inv} : \text{Seq}[\mathbb{Z}] \rightarrow \text{Seq}[\mathbb{Z}] \text{ et } \text{Concat} : \text{Seq}[\mathbb{Z}] \times \text{Seq}[\mathbb{Z}] \rightarrow \text{Seq}[\mathbb{Z}],$$

ou **Inv** inverse une séquence donnée et **Concat** fait la concaténation de deux séquences données.

Question 1 : Ecrire une spécification formelle de la Fonction **Concat** en logique de premier ordre reliant ses données et son résultat. Donner une implémentation récursive de cette fonction et prouver qu'elle satisfait la spécification.

Question 2 : Ecrire une spécification formelle de la Fonction **Inv** en logique de premier ordre reliant ses données et son résultat. Donner une implémentation récursive de cette fonction et prouver qu'elle satisfait la spécification.

Question 3 : Montrer que

$$\forall s_1, s_2. \text{Inv}(\text{Concat}(s_1, s_2)) = \text{Concat}(\text{Inv}(s_2), \text{Inv}(s_1)).$$

2 Logique de Hoare

1. Règle de l'affectation : $\frac{}{\{P[E/x]\} x := E \{P\}}$
2. Règle de composition : $\frac{\{P\} S \{Q\}, \{Q\} T \{R\}}{\{P\} S; T \{R\}}$
3. Règle de la conditionnelle : $\frac{\{B \wedge P\} S \{Q\}, \{\neg B \wedge P\} T \{Q\}}{\{P\} \text{ if } B \text{ then } S \text{ else } T \{Q\}}$
4. Règle de la consequence : $\frac{P' \rightarrow P, \{P\} S \{Q\}, Q \rightarrow Q'}{\{P'\} S \{Q'\}}$
5. Règle de l'itération : $\frac{\{P \wedge B\} S \{P\}}{\{P\} \text{ while } B \text{ do } S \{\neg B \wedge P\}}$

Exercice 2 Dire si les triplets de Hoare sont corrects ou pas :

1. $\{j = a\} j := j + 1 \{a = j + 1\}$
2. $\{i = j\} i := j + i \{i > j\}$
3. $\{i > j\} j := i + 1; i := j + 1 \{i > j\}$
4. $\{i \neq j\} \text{if } i > j \text{ then } m := i - j \text{ else } m := j - i \{m > 0\}$
5. $\{i = 3 * j\} \text{if } i > j \text{ then } m := i - j \text{ else } m := j - i \{m - 2 * j = 0\}$
6. $\{a = 0\} \text{while } x > a \text{ do } x := x - 1 \{x = 0\}$

Exercice 3 Démontrer :

1. $\{i = 5\} a := i + 2 \{(a = 7) \wedge (i = 5)\}$
2. $\{i = 5\} a := i + 2 \{(a = 7) \wedge (i > 0)\}$
3. $\{(i = 5) \wedge (a = 3)\} a := i + 2 \{a = 7\}$
4. $\{a = 7\} i := i + 2 \{a = 7\}$
5. $\{i = a - 1\} i := i + 2 \{i = a + 1\}$
6. $\{\text{true}\} a := i + 2 \{a = i + 2\}$

Exercice 4 Démontrer :

1. $\{a > b\} m := 1; n := a - b \{m * n > 0\}$
2. $\{s = 2^i\} i := i + 1; s := s * 2 \{s = 2^i\}$
3. $\{\text{true}\} \text{if } i < j \text{ then } \min := i \text{ else } \min := j \{(\min \leq i) \wedge (\min \leq j)\}$
4. $\{i > 0 \wedge j > 0\} \text{if } i < j \text{ then } \min := i \text{ else } \min := j \{\min > 0\}$
5. $\{s = 2^i\} \text{while } i < n \text{ do } i := i + 1; s := s * 2 \{s = 2^i\}$
6. $\{(s = 2^i) \wedge (i \leq n)\} \text{while } i < n \text{ do } i := i + 1; s := s * 2 \{s = 2^n\}$