Université Paris Diderot
Licence

Génie Logiciel
Année 2012-2013

TD n°3

Induction sur les listes

1 Exercice 1

On considère le type des séquences d'entiers $\mathsf{Seq}[\mathbb{Z}]$ dont les constructeurs sont
– la séquence vide $\varepsilon : \mathsf{Seq}[\mathbb{Z}]$,
– l'opération d'ajout en tête (à gauche) d'un élément (entier) à une séquence $\bullet : \mathbb{Z} \times \mathsf{Seq}[\mathbb{Z}] \rightarrow \mathsf{Seq}[\mathbb{Z}]$.

Etant donnée une séquence s, on désigne par $|s|$ la longueur de la séquence s. On considère que $|\varepsilon| = 0$. Pour tout entier naturel $i \leq |s|$, on désigne par $s[i]$ l'élément se trouvant à la position i dans s. (On considère que les positions sont indexées de 1 à $|s|$ de gauche à droite.)

Soit la fonction

$$\mathsf{Fusion} : \mathsf{Seq}[\mathbb{Z}] \times \mathsf{Seq}[\mathbb{Z}] \rightarrow \mathsf{Seq}[\mathbb{Z}]$$

qui, étant données deux séquences triées s et s', fusionne ces séquences pour former une seule séquence triée dont les éléments sont tous ceux qui se trouvent dans s et s'.

NB : On suppose qu'il est possible d'avoir plusieurs occurrences d'un même entier dans une séquence. Lors de la fusion de deux séquences, toutes les occurrences d'un même entier dans l'une ou l'autre des séquences doivent être présentes dans le résultat.

Question 1 : Ecrire une spécification formelle de la fonction Fusion en logique de premier ordre reliant ses données et son résultat.

Question 2 : Donner une implémentation *récursive* de cette spécification. Prouver qu'elle satisfait bien la spécification.

On considère la fonction

$$\mathsf{Partition} : \mathsf{Seq}[\mathbb{Z}] \rightarrow \mathsf{Seq}[\mathbb{Z}] \times \mathsf{Seq}[\mathbb{Z}]$$

dont la spécification est la suivante :

$$\mathsf{Partition}\ (s) = (s_1, s_2) \iff$$
$$(|s| = |s_1| + |s_2|) \wedge (\forall i.\ 2i \leq |s| \Rightarrow s[2i] = s_1[i]) \wedge (\forall i.\ 2i < |s| \Rightarrow s[2i+1] = s_2[i])$$

Question 3 : Définir une fonction *récursive* de tri Tri_Partition_Fusion basée sur les fonctions Partition et Fusion. Prouver la correction de la fonction de tri proposée.

Question 4 : Donner une implémentation *récursive* de la fonction Partition. Prouver qu'elle satisfait bien la spécification.

Exercice 2

Soit les fonctions

$$\mathtt{Inv} : \mathtt{Seq}[\mathbb{Z}] \to \mathtt{Seq}[\mathbb{Z}] \text{ et } \mathtt{Concat} : \mathtt{Seq}[\mathbb{Z}] \times \mathtt{Seq}[\mathbb{Z}] \to \mathtt{Seq}[\mathbb{Z}],$$

ou **Inv** inverse une séquence donnée et **Concat** fait la concaténation de deux séquences données.

Question 1 : Ecrire une spécification formelle de la Fonction **Inv** en logique de premier ordre reliant ses données et son résultat. Donner une implémentation récursive de cette fonction et prouver qu'elle satisfait la spécification.

Question 2 : Ecrire une spécification formelle de la Fonction **Concat** en logique de premier ordre reliant ses données et son résultat. Donner une implémentation récursive de cette fonction et prouver qu'elle satisfait la spécification.

Question 3 : Montrer que

$$\forall s_1, s_2.\ \mathtt{Inv}(\mathtt{Concat}(s_1, s_2)) = \mathtt{Concat}(\mathtt{Inv}(s_2), \mathtt{Inv}(s_1)).$$