

TD n°6

La logique de Hoare

1. Règle de l'affectation : $\frac{}{\{P[E/x]\} x := E \{P\}}$
2. Règle de composition : $\frac{\{P\} S \{Q\}, \{Q\} T \{R\}}{\{P\} S; T \{R\}}$
3. Règle de la conditionnelle : $\frac{\{B \wedge P\} S \{Q\}, \{\neg B \wedge P\} T \{Q\}}{\{P\} \text{ if } B \text{ then } S \text{ else } T \{Q\}}$
4. Règle de la conséquence : $\frac{P' \rightarrow P, \{P\} S \{Q\}, Q \rightarrow Q'}{\{P'\} S \{Q'\}}$
5. Règle de l'itération : $\frac{\{P \wedge B\} S \{P\}}{\{P\} \text{ while } B \text{ do } S \{\neg B \wedge P\}}$

Exercice 1 Prouver que les formules de Hoare suivantes sont valides (les variables utilisées sont de type entier).

1. $\{x < 2\} y := x; x := 3; z := x + y \{z \leq 5\}$
2. $\{x > 1\} y := 0; \text{ If } x * y > 0 \text{ Then } z := y \text{ Else } z := 2 * x \text{ Fi } \{z > 2\}$
3. $\{(x > 0) \wedge (y > 0)\} \text{ While } 1 > 0 \text{ Do } x := x + y; y := y + 1 \text{ Od } \{x < 0\}$
4. $\{z = y\} x := 0; t := z; \text{ While } z > 0 \text{ Do } x := x + y; z := z - 1 \text{ Od } \{x = y^2\}$

Exercice 2 Soit P le programme suivant (où i est une variable entière et a est un tableau d'entiers) :

```
i = 0;
while ( i < a.length ) {
    a[i] = 0;
    i++;
}
```

Prouver que la formule de Hoare suivante est valide :

$\{true\} P \{somme(a) = 0\}$, où $somme(a)$ dénote la somme de tous les éléments de a .

Exercice 3 Soit Q le programme suivant (où $i, j1, j2$ sont des variables entières et a, b, c sont des tableaux d'entiers) :

```
i = 0;
j1 = 0;
j2 = 0;
while ( i < a.length ) {
    if ( a[i] > 7 ) {
        b[j1] = a[i] ;
        j1++; }
    else {
        c[j2] = a[i];
        j2++; }
    i++;
}
```

Prouver que la formule de Hoare suivante est valide :

$\{true\} Q \{somme(b) > 7 \cdot len(b) \wedge somme(c) \leq 7 \cdot len(c)\}$, où $len(b)$ dénote la taille de b .