Le calcul des prédicats

Le calcul des prédicats

- Syntaxe
- Formalisation du langage naturel
- Sémantique
- Systèmes de preuves syntaxiques
  1. Calcul de Gentzen
  2. Résolution
     - ⋆ Théorie de l'unification
     - ⋆ Règles de résolution
     - ⋆ Propriétés de la résolution

Syntaxe: alphabet

- Les connecteurs $!$, $:$, $\wedge$, $\_$
- Les quantificateurs 9, 8
- Un ensemble dénombrable X de variables $x, y, z, \ldots$
- Une signature contenant :
  - Un ensemble dénombrable de symboles de fonction $_F = ff, g, h, \ldots g$, chacun ayant une arité.
  - Un ensemble dénombrable de symboles de prédicat $_P = fp, q, r, \ldots g$, chacun ayant une arité.

On écrit f/n (ou p/n) pour dire que le symbole de fonction f (ou de prédicat p) est d'arité n.

Les termes

L'ensemble des termes par rapport à un ensemble de variable X et une signature est noté $T_{\Sigma,\mathcal{X}}$.

Définition :

- Chaque variable x dans X est un terme dans $T_{\Sigma,\mathcal{X}}$.
- Si $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes et f 2 $_F$ est un symbole de fonction d'arité n, alors $f(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme dans $T_{\Sigma,\mathcal{X}}$.

Un terme est clos s'il ne contient aucune variable.

Les atomes

L'ensemble des atomes sur un ensemble de variable X et une signature est noté $A_{\Sigma,\mathcal{X}}$.

Définition : Un atome est de la forme $p(t_1, \ldots, t_n)$, où p est un symbole de prédicat d'arité n et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes.

Exemple : Si $\ _F = f0/0, S/1g$ et $\ _P = finf/2g$, alors 0 et $S(S(S(x)))$ sont des termes, 0 et $S(S(S(S(0))))$ sont des termes clos et $inf(0, S(S(S(x))))$ est un atome.

Les formules

L'ensemble des formules sur un ensemble de variable X et une signature est noté $F_{\Sigma,\mathcal{X}}$.

Définition :

- Chaque atome de $A_{\Sigma,\mathcal{X}}$ est une formule dans $F_{\Sigma,\mathcal{X}}$.
- Si A est dans $F_{\Sigma,\mathcal{X}}$, alors $:A$ est une formule dans $F_{\Sigma,\mathcal{X}}$.
- Si A et B sont dans $F_{\Sigma,\mathcal{X}}$, $(A\ !\ B)$, $(A \wedge B)$, et $(A \_ B)$ sont des formules dans $F_{\Sigma,\mathcal{X}}$.
- Si A est dans $F_{\Sigma,\mathcal{X}}$ et x est une variable, alors $8x.\ (A)$ et $9x.\ (A)$ sont des formules dans $F_{\Sigma,\mathcal{X}}$.

Remarque :

- Nous omettons les parenthèses quand cela n'entraîne pas des ambiguités.

Exemple : $8x.\ (enfant(x)\ !\ 9y.\ mere(y, x))$

Un cas particulier

Le calcul propositionnel peut se voir comme un calcul des prédicats sur une signature t.q.

- l'ensemble $\ _F$ est vide,
- l'ensemble $\ _P$ contient uniquement des prédicats 0-aires,
- les quantificateurs ne sont jamais utilisés.

Variables libres et liées

Les variables libres (Vl) et liées (VE) d'une formule sont définies comme suit :

- Si A est un atome, $Vl(A)$ contient toutes les variables de A, et $VE(A) = ;$.
- Si $A = :B$, $Vl(A) = Vl(B)$ et $VE(A) = VE(B)$.
- Si $A = B \# C$, $Vl(A) = Vl(B)\ [\ Vl(C)$ et $VE(A) = VE(B)\ [\ VE(C)$.
- Si $A = 8x.\ B$ ou $A = 9x.\ B$, $Vl(A) = Vl(B)\ n\ fxg$ et $VE(A) = VE(B)\ [\ fxg$.

Exemple : Si $A = \forall x.\ q(x, f(x,y))$ on a $VI(A) = \{y\}$ et $VE(A) = \{x\}$.
Si $B = r(x) \vee \forall x.\ q(x, f(x,y))$ on a $VI(B) = \{x, y\}$ et $VE(B) = \{x\}$.

Remarque : On suppose que l'on peut toujours renommer les variables liées d'une formule afin de l'écrire sous une forme rectifiée :

- toutes les variables liées d'une formule sont distinctes. On ne peut pas avoir p.e. $\forall x.\ \exists x.\ A$.
- les variables libres et liées d'une formule A portent des noms distincts, i.e. $VI(A) \cap VE(A) = \emptyset$. On ne peut plus écrire la formule B précédante.

Exemple de renommage

La formule $\forall x\ \exists y\ p(x,y)$ peut se renommer en $\forall z\ \exists y\ p(z,y)$ $\forall x\ \exists z\ p(x,z)$ ou $\forall z\ \exists w\ p(z,w)$.
La formule $(\forall x\ p(x)) \vee p(x)$ peut se renommer en $(\forall z\ p(z)) \vee p(x)$.
La formule $\forall x\ \exists x\ p(x)$ peut se renommer en $\forall y\ \exists x\ p(x)$ ou $\forall x\ \exists y\ p(y)$ (mais pas en $\forall y\ \exists x\ p(y)$!!!).

À partir de maintenant on peut assumer qu'une formule est rectifiée si cela est nécessaire. On verra dans la suite (ou en TD) que cette supposition est correcte.

Les substitutions

Définition :

- Une substitution est une fonction $\sigma : X \to T_{\Sigma,\mathcal{X}}$. On note $\{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\}$ si $\sigma(x_i) = t_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ et $\sigma(x) = x$ sinon.
- L'application d'une substitution à un terme est l'extension de σ aux termes donnée par $\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$.
- Soient σ et τ deux substitutions. La composition de σ avec τ est donnée par $\sigma \circ \tau(x) = \sigma(\tau(x))$.
- Si σ est une substitution, alors la substitution $\sigma[x := t]$ est donnée par $\sigma[x := t](y) = \sigma(y)$ si $y \neq x$ et $\sigma[x := t](x) = t$ sinon.

Substitution d'une formule

Soit une signature et X un ensemble de variables.

Définition : Soit $\sigma = \{x_1 \quad t_1, \ldots, x_n \quad t_n\}$ une substitution. La substitution d'une formule A par σ est l'opération qui consiste à remplacer toute occurrence libre de x_i dans A par t_i. Par récurrence sur A :

- $\sigma(r(t'_1, \ldots, t'_n)) = r(\sigma(t'_1), \ldots, \sigma(t'_n))$
- $\sigma(\neg B) = \neg\sigma(B)$ et $\sigma(B \# C) = \sigma(B) \# \sigma(C)$
- $A = \forall x.\ B$, où l'on suppose (grâce au renommage) $x \notin Vl(t_i)$ et $x \neq x_i$ pour $i = 1 \ldots n$. Alors $\sigma(\forall x.\ B) = \forall x.\ \sigma(B)$.
- Pareil pour $\sigma(\exists x.\ B)$

Formalisation du langage naturel

- Tous les humains sont méchants.

$$\forall x.\ (H(x) \rightarrow M(x))$$

- Seulement les humains sont méchants.

$$\forall x.\ (M(x) \rightarrow H(x))$$

- Il existe un humain méchant.

$$\exists x.\ (H(x) \wedge M(x))$$

- Il n'existe pas d'humain méchant.

$$\neg\exists x.\ (H(x) \wedge M(x))$$

- Il existe un humain qui aime tous les chats.
  $\exists x.\ (H(x) \wedge Aimetousleschats(x))$
  $Aimetousleschats(x) \quad \forall y.\ (Chat(y) \rightarrow Aime(x, y))$
- Chaque humain sait qui le déteste.

$$\forall x.\ (H(x) \rightarrow Connaitdeteste(x))$$

$$Connaitdeteste(x) \quad \forall y.\ (D(y, x) \rightarrow C(x, y))$$

- Chaque personne aime quelqu'un et personne n'aime tout le monde ou bien quelqu'un aime tout le monde et quelqu'un n'aime personne.

$$(A_1 \wedge B_1) \vee (A_2 \wedge B_2)$$
$$aimetoutlemonde(x) \quad \forall y.\ Aime(x, y)$$
$$aimepersonne(x) \quad \forall y.\ \neg Aime(x, y)$$

$$A_1 \quad \forall x.\ (H(x) \rightarrow \exists y.\ Aime(x, y))$$
$$B_1 \quad \neg\exists x.\ (H(x) \wedge aimetoutlemonde(x))$$
$$A_2 \quad \exists x.\ (H(x) \wedge aimetoutlemonde(x))$$
$$B_2 \quad \exists x.\ (H(x) \wedge aimepersonne(x))$$

Définition : L'interprétation d'une signature est un triplet $hD, F_{\mathcal{D}}, P_{\mathcal{D}}i$ t.q.

- Le domaine D est non vide.
- Pour chaque f 2 $_F$ d'arité n, il y a une fonction totale $I(f) : D^n$! D dans $F_{\mathcal{D}}$3 . 42 Td (P)2 (our)-332(chaque) T F4 10. 0 1 Tf 0.04 0 Td e D141 cm Fm1 Do 0 g 0 0 g 0 T F1 10. 0 1 Tf 32. 5

Valeur d'une formule

Définition : Soit I une interprétation de domaine D et soit σ une assignation dans I. La valeur d'une formule dans I pour σ est une opération $[\_]_{\mathcal{I},\sigma} : F_{\Sigma,\mathcal{X}}$ 7! **BOOL** définie par récurrence comme suit :

- $[p(t_1, \ldots, t_n)]_{\mathcal{I},\sigma} = I(p)([t_1]_{\mathcal{I},\sigma} \ldots [t_n]_{\mathcal{I},\sigma})$
- $[: A]_{\mathcal{I},\sigma} = FB_{\neg}([A]_{\mathcal{I},\sigma})$
- $[A \# B]_{\mathcal{I},\sigma} = FB_{\#}([A]_{\mathcal{I},\sigma}, [B]_{\mathcal{I},\sigma})$
- $[9x.\ A]_{\mathcal{I},\sigma} = \ _{d\in\mathcal{D}}[A]_{\mathcal{I},\sigma[x:=d]}$
- $[8x.\ A]_{\mathcal{I},\sigma} = \ _{d\in\mathcal{D}}[A]_{\mathcal{I},\sigma[x:=d]}$

Remarque : Lorsque le symbole de prédicat p est 0-aire (d'arité 0), alors $I(p)$ est **V** ou **F**.

Exemple

Soit $D = f1, 2, 3, 4, 5g$, $I_F(c) = f1$ 7! $2, 2$ 7! $3, 3$ 7! $4, 4$ 7! $5, 5$ 7! $1g$, $I_F(b) = 2$, $I_P(p) = f(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5)g$, $I_P(q) = D$ et $I_P(r) = f(2, 2)g$.

Interpréter les formules suivantes :

$(8x\ 8y\ r(x, y)) \wedge (9z\ r(z, z)))$

$(9x\ p(x, x, x)) \_ (8y\ 8z\ r(y, z))$

$(8x\ 8y\ r(b, b))\ !\ r(b, c(b))$

$8x\ (q(x)\ !\ r(x, x))$

$9x\ : (q(x) \wedge r(x, x))$

Nouvelles notions de satisfiabilité

Définition :

- I satisfait une formule B s'il existe une valuation σ dans I t.q. $[B]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$.
- Une formule B est satisfaisable s'il existe I qui satisfait B.

On verra plus tard que pour étudier la satisfiablité d'une formule on peut se limiter à des interprétations d'une forme particulière.

Modèle et validité

Définition :

- L' interprétation I est un modèle d'une formule B ssi $[B]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$ pour toute valuation σ dans I.
- L' interprétation I est un modèle d'un ensemble de formules ssi I est un modèle de toutes les formules de .
- La B 0 g 0 0.2 0.2 0. rg 0.2 0.2 0. 15 .3 0 Td ( ) T F1 10. 0 1 Tf 1 2 5 0 Td (esa) T 1 0 0 rg 1 0 0 -33 (val0le) T 0 g 0 -33 (ss

D'autres exemples d'équivalence lorsque $x \notin VI(A)$

$$
\begin{array}{lll}
\forall x.\, A & \exists x.\, A & A \\
\forall x.\, (A \wedge B) & A \wedge \forall x.\, B & \\
\exists x.\, (A \wedge B) & A \wedge \exists x.\, B & \\
\forall x.\, (A \vee B) & A \vee \forall x.\, B & \\
\exists x.\, (A \vee B) & A \vee \exists x.\, B & \\
\exists x.\, (A \rightarrow B) & A \rightarrow \exists x.\, B & \\
\forall x.\, (A \rightarrow B) & A \rightarrow \forall x.\, B & \\
\exists x.\, (B \rightarrow A) & \forall x.\, B \rightarrow A & \\
\forall x.\, (B \rightarrow A) & \exists x.\, B \rightarrow A &
\end{array}
$$