

## TD de Logique n° 5

## Calcul des séquents de Gentzen

**Exercice 1** Montr r dans  $\mathcal{G}$  l s séqu nts suivants :

1.  $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{r}, \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{s}) \vdash \neg \mathbf{p}, \neg \mathbf{s}$
2.  $(\mathbf{p} \wedge \neg \mathbf{p}) \vdash$
3.  $\vdash (\neg \mathbf{p} \wedge \mathbf{p}) \rightarrow ((\mathbf{p} \vee \mathbf{r}) \wedge \mathbf{s} \wedge \mathbf{m})$

**Exercice 2**

1. Montr z dans  $DN$  l séqu nt suivant :  $\vdash (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{q} \vee \mathbf{p})$
2. Montr z dans  $\mathcal{G}$  l séqu nt suivant :  $\vdash (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{q} \vee \mathbf{p})$

**Exercice 3**

1. Montr r qu pour l s règl s  $(\rightarrow d)$  t  $(\rightarrow g)$  du systèm  $\mathcal{G}$ , un int rprétation satisfait la formul associé au séqu nt conclusion si t s ul m nt si ll satisfait tout s l s (formul s associé s aux) prémiss s.
2. Montr r qu pour tout formul  $F$ , t tous ns mbl s d formul s  $\Gamma$  t  $\Delta$ , il xist un pr uv d  $\Delta, F \vdash \Gamma, F$  t ll qu l s règl s axiom s n soi nt appliqués qu'à d s atom s.
3. La propriété montré n l st n fait vrai pour tout s l s règl s du systèm  $\mathcal{G}$ . En déduir un méthod automatique d démonstration qui r tourn un démonstration d'un séqu nt si c la st possibl , ou un int rpr tation qui falsifi la formul associé au s qu nt dans l cas contrair . L'ordr d'application d s règl s a-t-il un importanc ?
4. En utilisant c t algorithm , dit s si l s formul s suivant s sont valid s ou non.
  - (a)  $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{r}, \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{s}) \vdash \neg \mathbf{p}, \neg \mathbf{s}$
  - (b)  $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{r}, \neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{s}) \vdash$
  - (c)  $\vdash (\neg \mathbf{p} \wedge \mathbf{p}) \rightarrow ((\mathbf{p} \vee \mathbf{r}) \wedge \mathbf{s} \wedge \mathbf{m})$
  - (d)  $\vdash ((\neg \mathbf{p} \vee \mathbf{p}) \rightarrow (\neg \mathbf{r} \wedge \mathbf{r}) \wedge \mathbf{p} \wedge \mathbf{p})$

**Exercice 4** (*À faire chez vous*) Soit  $M, N$  d ux formul s qu lconqu s.

1. Montr r qu s'il xist un pr uv du séqu nt  $\Gamma \vdash M \wedge N, \Delta$ , alors il xist un pr uv d s séqu nts  $\Gamma \vdash M, \Delta$  t  $\Gamma \vdash N, \Delta$ .
2. Montr r qu s'il xist un pr uv du séqu nt  $\Gamma, M \wedge N \vdash \Delta$ , alors il xist un pr uv du séqu nt  $\Gamma, M, N \vdash \Delta$ .