

Les systèmes de preuves syntaxiques

- Systèmes à la Hilbert
- Calculs des séquents :
 - ▶ Dédution naturelle
 - ▶ Calcul de Gentzen
- Systèmes de réfutation :
 - ▶ Résolution
 - ▶ Tableaux

La méthode axiomatique de Hilbert



David Hilbert: mathématicien allemand (1862 - 1943)

Systèmes logiques axiomatiques

- Un ensemble de **formules**.
- Un sous-ensemble de formules distinguées appelées **axiomes**.
- Un ensemble de **règles d'inférence** de la forme:

$$\frac{\text{Hyp1} \quad \text{Hypn}}{\text{Concl}}$$

Exemple : système H_{\rightarrow}

- **Formules** : l'ensemble inductif construit à partir de toutes les lettres propositionnelles et du symbole binaire \rightarrow .
- **Axiome 1** : toutes les formules de la forme $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- **Axiome 2** : toutes les formules de la forme $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- **Règle de dérivation** :

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B} \text{ (Modus Ponens)}$$

Dérivation sous forme de séquence (premier exemple)

- (a) **Axiome 2** : $(p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p))$
- (b) **Axiome 1** : $(p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p))$
- (c) **Modus ponens sur a et b** : $(p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p)$
- (d) **Axiome 1** : $(p \rightarrow (p \rightarrow p))$
- (e) **Modus ponens sur c et d** : $(p \rightarrow p)$

Notation : $\emptyset \vdash_{H_{\rightarrow}} (p \rightarrow p)$ ou $\vdash_{H_{\rightarrow}} (p \rightarrow p)$

Dérivation sous forme de séquence (deuxième exemple)

On fixe un **ensemble d'hypothèses**. Par exemple $\Delta = \{p\}$.

- (a) **Axiome 1** : $(p \rightarrow (p \rightarrow p))$
- (b) **Formule dans Δ** : p
- (c) **Modus ponens sur a et b** : $(p \rightarrow p)$

Notation : $\{p\} \vdash_{H_{\rightarrow}} (p \rightarrow p)$ ou $p \vdash_{H_{\rightarrow}} (p \rightarrow p)$

Notion de dérivation sous forme de séquence

Une **dérivation** de la formule A à partir d'un ensemble d'hypothèses Δ est une **séquence** de formules F_1, \dots, F_n telle que pour chaque i :

- F_i est une **hypothèse** de Δ , ou
- F_i est une instance d'**axiome**, ou
- F_i est obtenue par une **règle d'inférence** à partir de F_{e_1}, \dots, F_{e_k} avec $e_1, \dots, e_k < i$ et
- la **dernière** formule de la séquence est A .

Notation : S'il y a une dérivation de A à partir de Δ , nous écrivons $\Delta \vdash_{H_{\rightarrow}} A$. Nous écrivons $\Delta, B \vdash_{H_{\rightarrow}} A$ pour $\Delta \cup \{B\} \vdash_{H_{\rightarrow}} A$.

Dérivation sous forme d'arbre

$$\frac{\frac{(p \rightarrow (p \rightarrow p)) \text{ (ax1)} \quad p \in \Delta}{(p \rightarrow p)} \quad p \in \Delta}{p}$$

Nous avons $p \vdash_{H_{\rightarrow}} p$.

La notion de *théorème*

La formule A est un **théorème** ssi il existe une **dérivation** de la formule A à partir d'un ensemble d'hypothèses **vide**.

Exemple : La formule $p \rightarrow p$ est un théorème dans le système H_{\rightarrow} .

Notion de dérivation sous forme d'arbre

Définition : La **dérivation** de la formule A à partir d'un ensemble d'hypothèses Δ est un **arbre** fini de *formules* tel que

- chaque feuille est soit une **hypothèse** de Δ soit un **axiome**
- si B est le père des $B_1 \dots B_n$, alors B est obtenu par l'application d'une **règle d'inférence** sur les formules $B_1 \dots B_n$.
- la formule A est la **racine** de l'arbre.

Théorème de la déduction

Théorème : Soit H un système de Hilbert quelconque tel que

- l'ensemble d'axiomes de H contient au moins Axiome 1 + Axiome 2
- la seule règle d'inférence de H est le Modus Ponens.

Alors, $\Delta \vdash_H A \rightarrow B$ ssi $\Delta, A \vdash_H B$.

Preuve : au tableau

Exemple : Montrer que $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$ est un théorème : par la propriété précédente, on démontre que r est dérivable à partir de $\Delta = \{p \rightarrow (q \rightarrow r), q, p\}$.

Dérivation comme séquence

$\Delta = \{p \rightarrow (q \rightarrow r), p, q\}$

- (a) Élément dans Δ : $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- (b) Élément dans Δ : p
- (c) Modus Ponens sur a et b : $q \rightarrow r$
- (d) Élément dans Δ : q
- (e) Modus Ponens sur c et d : r

Dérivation comme arbre

$\Delta = \{p \rightarrow (q \rightarrow r), p, q\}$

$$\frac{\frac{p \rightarrow (q \rightarrow r) \in \Delta \quad p \in \Delta}{(q \rightarrow r)} \quad q \in \Delta}{r}$$

Un autre exemple : système H_{prop}

- Axiome 1 : $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- Axiome 2 : $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- Axiome 3 : $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$

Exemple de dérivation

Par le théorème de la déduction nous avons une dérivation de $\neg D \rightarrow D$ à partir de l'ensemble vide. Pareil pour $\neg D \rightarrow \neg D$. On construit maintenant une nouvelle dérivation comme suit :

- (a) **Obs prec** : $\neg D \rightarrow D$
- (b) **Obs prec** : $\neg D \rightarrow \neg D$
- (c) **Axiome 6** : $(\neg D \rightarrow D) \rightarrow ((\neg D \rightarrow \neg D) \rightarrow \neg\neg D)$
- (d) **Modus ponens, c, a, b** : $\neg\neg D$
- (e) **Axiome 10** : $\neg\neg D \rightarrow D$
- (f) **Modus ponens e, d** : D

Enfin, nous avons une dérivation de D à partir de l'ensemble vide, donc $D = A \vee \neg A$ est un théorème dans H_{prop} .

Théorème de l'affaiblissement

Théorème : Si $\Delta \vdash A$ est dérivable dans le système H_{prop} , alors le séquent $\Delta, B \vdash A$ est aussi dérivable dans le système H_{prop} pour toute formule B .

Dit autrement,

Si $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$, alors $\Delta, B \vdash_{H_{prop}} A$ pour toute formule B .

Propriétés du système H_{prop}

Théorème : Le système H_{prop} est **correct**, i.e., si $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$, alors $\Delta \models A$.

Preuve : Par induction sur l'arbre de dérivation de $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$.

Théorème : Le système H_{prop} est **complet**, i.e., si $\Delta \models A$, alors $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$.

Preuve : Dans la suite du cours.

Les séquents en logique



Gerhard Gentzen: mathématicien allemand (1909 - 1945)

La notion de séquent

Définition : Un **séquent** est un couple de la forme $\Delta \vdash \Gamma$, où Δ et Γ sont des *multi-ensembles* de formules.

La **formule associée** à un séquent de la forme $A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_k$ est donnée par :

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_k$$

Rappel : une **conjonction vide** est **vraie**, une **disjonction vide** est **fausse**.

Sémantique d'un séquent

Définition : Un **séquent** $A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_k$ est **valide** ssi sa formule associée $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow (B_1 \vee \dots \vee B_k)$ est valide.

Les ingrédients d'un calcul de séquents

Pour définir un calcul de séquents :

- On fixe des **séquents axiomes** (des séquents particuliers)
- On fixe des **règles d'inférence** de la forme
$$\frac{\Delta_1 \vdash \Gamma_1 \dots \Delta_n \vdash \Gamma_n}{\Delta \vdash \Gamma}$$

Systèmes avec séquents

Définition : La **dérivation** du séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans un système \mathcal{S} quelconque, ou **\mathcal{S} -dérivation** de $\Delta \vdash \Gamma$, est un **arbre** fini de *séquents* tel que

•

Définition : Soit \mathcal{S} un système avec séquents. Une **preuve** d'un séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans \mathcal{S} est une dérivation de $\Delta \vdash \Gamma$ dans \mathcal{S} . Un **théorème** de \mathcal{S} est un séquent de la forme $\emptyset \vdash \Gamma$ ayant une preuve dans \mathcal{S} .

Un système axiomatique peut aussi se voir comme un calcul avec séquents. Ainsi par exemple, pour H_{\rightarrow} :

- Les **séquents axiomes** sont de la forme

$$\begin{aligned}\Delta \vdash A & \text{ (si } A \in \Delta) \\ \Delta \vdash A \rightarrow (B \rightarrow A) \\ \Delta \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))\end{aligned}$$

- La **règles d'inférence** est de la forme

$$\frac{\Delta \vdash A \rightarrow B \quad \Delta \vdash A}{\Delta \vdash B}$$

Système DN_{\rightarrow} : déduction naturelle pour \rightarrow

Formules : l'ensemble inductif construit à partir de toutes les lettres propositionnelles et du symbole binaire \rightarrow .

Axiome : $\Delta, A \vdash A$

Règles d'inférence :

$$\frac{\Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash A \rightarrow B} (\rightarrow i) \quad \frac{\Delta \vdash A \quad \Delta \vdash A \rightarrow B}{\Delta \vdash B} (\rightarrow e)$$

Exemple de dérivation dans DN_{\rightarrow}

$$\frac{\frac{A, B \vdash A \quad (\text{axiome})}{A \vdash B \rightarrow A} (\rightarrow i)}{\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)} (\rightarrow i)$$

Notation : $\emptyset \vdash_{DN_{\rightarrow}} A \rightarrow (B \rightarrow A)$ ou $\vdash_{DN_{\rightarrow}} A \rightarrow (B \rightarrow A)$

Nous avons démontré l'axiome 1 de H_{\rightarrow} dans le système DN_{\rightarrow} .

De manière similaire on peut démontrer $\Delta \vdash_{DN_{\rightarrow}} A \rightarrow (B \rightarrow A)$ pour tout Δ .

Un autre exemple de dérivation dans DN_{\rightarrow}

Soit $\Gamma = A \rightarrow (B \rightarrow C), A \rightarrow B, A$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Gamma \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C) \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B \rightarrow C} (\rightarrow e) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} (\rightarrow e) \\
 \hline
 (A \rightarrow (B \rightarrow C)), (A \rightarrow B), A \vdash C \\
 \hline
 (A \rightarrow (B \rightarrow C)), (A \rightarrow B) \vdash A \rightarrow C \\
 \hline
 (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C) \\
 \hline
 \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))
 \end{array}$$

Nous avons démontré l'axiome 2 de H_{\rightarrow} dans DN_{\rightarrow} .

De manière similaire on peut démontrer

$\Delta \vdash_{DN_{\rightarrow}} (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ pour tout Δ .

Équivalence entre H_{\rightarrow} et DN_{\rightarrow} (i)

Théorème : Si $\Delta \vdash_{H_{\rightarrow}} A$, alors $\Delta \vdash_{DN_{\rightarrow}} A$.

Preuve : Par induction sur la dérivation de A à partir de Δ dans le système H_{\rightarrow} .

Équivalence entre H_{\rightarrow} et DN_{\rightarrow} (ii)

Théorème : Si $\Delta \vdash_{DN_{\rightarrow}} A$, alors $\Delta \vdash_{H_{\rightarrow}} A$.

Preuve : Par induction sur la DN_{\rightarrow} -dérivation de $\Delta \vdash A$.

- Si axiome dans DN_{\rightarrow} , alors c'est trivial.
- Si l'arbre se termine par $\rightarrow i$, alors on utilise le théorème de la déduction.
- Si l'arbre se termine par $\rightarrow e$, alors on utilise modus ponens.

Système DN_{prop} : déduction naturelle pour $\rightarrow, \vee, \wedge, \neg$

Axiome : $\Delta, A \vdash A$

Règles d'inférence :

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash A \rightarrow B} (\rightarrow i) \quad \frac{\Delta \vdash A \quad \Delta \vdash A \rightarrow B}{\Delta \vdash B} (\rightarrow e) \\
 \\
 \frac{\Delta \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \wedge B} (\wedge i)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash A} (\wedge e) \quad \frac{\Delta \vdash A \wedge B}{\Delta \vdash B} (\wedge e) \\
\\
\frac{\Delta \vdash A}{\Delta \vdash A \vee B} (\vee i) \quad \frac{\Delta \vdash B}{\Delta \vdash A \vee B} (\vee i) \\
\\
\frac{\Delta \vdash A \vee B \quad \Delta, A \vdash C \quad \Delta, B \vdash C}{\Delta \vdash C} (\vee e) \\
\\
\frac{\Delta, A \vdash B \quad \Delta, A \vdash \neg B}{\Delta \vdash \neg A} (\neg i)
\end{array}$$

Exemple de dérivation dans DN_{prop}

Tiers exclu

$B = A \vee \neg A$

$$\begin{array}{c}
\frac{\neg B, A \vdash A}{\neg B, A \vdash B} (\vee i) \quad \frac{\neg B, A \vdash \neg B}{\neg B \vdash \neg A} (\neg i) \\
\\
\frac{\neg B \vdash \neg A}{\neg B \vdash B} (\vee i) \quad \frac{\neg B \vdash \neg B}{\neg B \vdash \neg B} (\neg i) \\
\\
\frac{\neg B \vdash B \quad \neg B \vdash \neg B}{\neg B \vdash \neg \neg B} (\neg e) \\
\\
\frac{\neg B \vdash \neg \neg B}{\vdash B} (\neg e)
\end{array}$$

$$\frac{\Delta \vdash A \quad \Delta \vdash \neg A}{\Delta \vdash B} (\neg e) \quad \frac{\Delta \vdash \neg \neg A}{\Delta \vdash A} (\neg e)$$

La dernière règle $\neg e$ est connue sous le nom de **raisonnement par l'absurde**.

Un autre exemple de dérivation dans DN_{prop}

Loi de Peirce

$G = (H \rightarrow A) \rightarrow A$, $H = A \rightarrow B$

$$\begin{array}{c}
\frac{\neg G, H \rightarrow A \vdash H \rightarrow A \quad \neg G, H \rightarrow A \vdash H}{\neg G, H \rightarrow A \vdash A} (\rightarrow e) \\
\\
\frac{\neg G, H \rightarrow A \vdash A}{\neg G \vdash G} (\rightarrow i) \quad \frac{\neg G \vdash \neg G}{\neg G \vdash \neg \neg G} (\neg e) \\
\\
\frac{\neg G \vdash \neg \neg G}{\vdash G} (\neg e)
\end{array}$$

$G = (H \rightarrow A) \rightarrow A, H = A \rightarrow B$

$$\frac{\frac{\frac{\neg G, H \rightarrow A, A, H \rightarrow A \vdash A}{\neg G, H \rightarrow A, A \vdash G} (\rightarrow i)}{\neg G, H \rightarrow A, A \vdash \neg G} (\neg e)}{\neg G, H \rightarrow A, A \vdash B} (\rightarrow i) \quad \frac{\neg G, H \rightarrow A, A \vdash \neg G}{\neg G, H \rightarrow A \vdash H} (\rightarrow i)$$

Théorème : (Affaiblissement) Si $\Delta \vdash A$ est dérivable dans le système DN_{prop} , alors $\Delta, B \vdash A$ l'est aussi (et la hauteur de l'arbre de dérivation ne change pas).

Théorème : (Contraction) Si $\Delta, B, B \vdash A$ est dérivable dans le système DN_{prop} , alors $\Delta, B \vdash A$ l'est aussi.

Observations

Le raisonnement par l'absurde entraîne le tiers exclu et la loi de Peirce.

Mais, aussi

- Le **tiers exclu** entraîne la **loi de Peirce**.

Soit $F = (A \rightarrow B) \rightarrow A$.

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma, F, A \vdash A}{\Gamma, A \vdash F \rightarrow A} (\rightarrow i)}{\Gamma \vdash A \vee \neg A} (\vee i)}{\frac{\frac{\frac{\frac{\Gamma, \neg A, F, A \vdash A}{\Gamma, \neg A, F, A \vdash \neg A} (\neg e)}{\Gamma, \neg A, F, A \vdash B} (\rightarrow i)}{\Gamma, \neg A, F \vdash F \rightarrow B} (\rightarrow i)}{\Gamma, \neg A, F \vdash F} (\rightarrow i)}{\Gamma \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A} (\rightarrow i)$$

Observations

- La **loi de Peirce** entraîne le **raisonnement par l'absurde**.

On considère $\neg A = A \rightarrow \perp$.

$$\frac{\frac{\frac{\Delta \vdash \neg \neg A}{\Delta, \neg A \vdash \neg \neg A} (\text{Affaibl.})}{\Delta, \neg A \vdash A} (\rightarrow e)}{\Delta \vdash \neg A \rightarrow A} (\rightarrow i) \quad \frac{\Delta \vdash ((A \rightarrow \perp) \rightarrow A) \rightarrow A}{\Delta \vdash A} (\rightarrow i)$$

Équivalence entre H_{prop} et DN_{prop} (i)

Théorème : Si $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$.

Preuve : Par induction sur la dérivation de A à partir de Δ dans le système H_{prop} .

Équivalence H_{prop} et DN_{prop} (ii)

Théorème : Si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$.

Preuve : Par induction sur la DN_{prop} -dérivation de $\Delta \vdash A$.

- Si axiome dans DN_{prop} , alors c'est trivial.
- Si l'arbre se termine par \rightarrow i, alors on utilise le théorème de la déduction.
- Si l'arbre se termine par \rightarrow e, alors on utilise modus ponens.
- Si l'arbre se termine par \wedge i, alors on utilise l'axiome 3.
- Si l'arbre se termine par \wedge e, alors on utilise les axiomes 7 et 8.
- Si l'arbre se termine par \vee i, alors on utilise les axiomes 4 et 5.
- Si l'arbre se termine par \vee e, alors on utilise le théorème de la déduction et l'axiome 9.

Suite de la preuve

- Si l'arbre se termine par \neg i, alors on utilise le théorème de la déduction et l'axiome 6.
- Si l'arbre se termine par la seconde règle de \neg e, alors on utilise l'axiome 10.
- Si l'arbre se termine par la première règle de \neg e, alors on raisonne comme suit. Si on dérive A et $\neg A$, alors avec deux instances de l'axiome 1 ($A \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$) et ($\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$) on obtient $\neg B \rightarrow A$ et $\neg B \rightarrow \neg A$. Avec l'axiome 6 ($\neg B \rightarrow A$) \rightarrow ($(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg\neg B$), on obtient $\neg\neg B$, et avec l'axiome 10 $\neg\neg B \rightarrow B$ on obtient B .

Propriétés du système DN_{prop}

Théorème : Le système DN_{prop} est **correct**, i.e., si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash A$ est valide.

Théorème : Le système DN_{prop} est **complet**, i.e, si $\Delta \vdash A$ est valide, alors $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$.

Axiome : $A \vdash A$

Règles d'inférence structurelles :

$$\frac{\Delta, A, A \vdash \Gamma}{\Delta, A \vdash \Gamma} \text{ (contraction } g) \quad \frac{\Delta \vdash \Gamma, A, A}{\Delta \vdash \Gamma, A} \text{ (contraction } d)$$

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma}{\Delta, A \vdash \Gamma} \text{ (affaiblissement } g) \quad \frac{\Delta \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, A} \text{ (affaiblissement } d)$$

Règles d'inférence logiques :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A}{\Delta, \neg A \vdash \Gamma} (\neg g) \quad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg A} (\neg d)$$

$$\frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Pi, B \vdash \Lambda}{\Delta, \Pi, A \rightarrow B \vdash \Gamma, \Lambda} (\rightarrow g) \quad \frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \rightarrow B, \Gamma} (\rightarrow d)$$

$$\frac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \wedge B \vdash \Gamma} (\wedge g) \quad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma} (\wedge d)$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \vee B \vdash \Gamma} (\vee g) \quad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma} (\vee d) \quad \frac{\Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma} (\vee d)$$

Dérivation dans LK

Règles d'inférence coupure :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A \quad A, \Lambda \vdash \Pi}{\Delta, \Lambda \vdash \Gamma, \Pi}$$

On note $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$ si le séquent $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système LK .

Premier exemple de dérivation dans LK

Modus Ponens

$$\frac{\frac{\frac{p \vdash p \text{ (ax)}}{p, (p \rightarrow q) \vdash q} (\rightarrow g)}{p \wedge (p \rightarrow q) \vdash q} (\wedge g)}{\vdash (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q} (\rightarrow d)$$

Deuxième exemple de dérivation dans LK

Tiers exclu

$$p \vdash p \text{ (ax)}_{\rightarrow}$$

Équivalence entre la Dédution naturelle et LK

Remarque : Si $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$, alors soit Δ soit Γ n'est pas vide.

Théorème : Si $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$, alors

- Si $\Delta = \emptyset$, alors $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \Gamma$.
- Si $\Gamma = \emptyset$, alors $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg \Delta$.
- Sinon, $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg \Delta \vee \bigvee \Gamma$

Théorème : Si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{LK} A$.

Propriétés du système de Gentzen LK

Théorème : Le système LK est **correct**, i.e., si $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$, alors $\Delta \vdash \Gamma$ est valide.

Théorème : Le système LK est **complet**, i.e., si $\Delta \vdash \Gamma$ est valide, alors $\Delta \vdash_{LK} \Gamma$.

Automatisation : le système \mathcal{G}

Axiome : $\Delta, A \vdash \Gamma, A$

Règles d'inférence logiques :

$$\begin{array}{c} \frac{\Delta \vdash \Gamma, A}{\Delta, \neg A \vdash \Gamma} (\neg g) \quad \frac{\Delta, A \vdash \Gamma}{\Delta \vdash \Gamma, \neg A} (\neg d) \\[10pt] \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \rightarrow B \vdash \Gamma} (\rightarrow g) \quad \frac{\Delta, A \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \rightarrow B, \Gamma} (\rightarrow d) \\[10pt] \frac{\Delta, A, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \wedge B \vdash \Gamma} (\wedge g) \quad \frac{\Delta \vdash A, \Gamma \quad \Delta \vdash B, \Gamma}{\Delta \vdash A \wedge B, \Gamma} (\wedge d) \\[10pt] \frac{\Delta, A \vdash \Gamma \quad \Delta, B \vdash \Gamma}{\Delta, A \vee B \vdash \Gamma} (\vee g) \quad \frac{\Delta \vdash A, B, \Gamma}{\Delta \vdash A \vee B, \Gamma} (\vee d) \end{array}$$

Règles de coupure :

$$\frac{\Delta \vdash \Gamma, A \quad A, \Lambda \vdash \Pi}{\Delta, \Lambda \vdash \Gamma, \Pi}$$

Dérivation dans \mathcal{G}

On note $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$ si le séquent $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable dans le système \mathcal{G} .

Premier exemple de dérivation dans \mathcal{G}

Tiers exclu

$$\frac{\frac{p \vdash p \text{ (ax)}}{\vdash p, \neg p} (\neg d)}{\vdash p \vee \neg p} (\vee d)$$

Deuxième exemple de dérivation dans \mathcal{G}

Loi de Peirce

$$\frac{\frac{\frac{p \vdash q, p \text{ (ax)}}{\vdash p \rightarrow q, p} (\rightarrow d)}{(p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash p} (\rightarrow g)}{\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p} (\rightarrow d)$$

Comment transformer quelques dérivation dans \mathcal{G}

Théorème : (Affaiblissement) Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors $\Delta, A \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$ et $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} A, \Gamma$.

Théorème : (Contraction) Si $\Delta, A, A \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors $\Delta, A \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$. Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma, A, A$, alors $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma, A$ l'est aussi.

Théorème : (Élimination de coupures) Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors il existe une dérivation de $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$ qui n'utilise pas la règle de coupure.

Équivalence entre LK et \mathcal{G}

Théorème : Si $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable en LK , alors $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable en \mathcal{G} .

Théorème : Si $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable en \mathcal{G} , alors $\Delta \vdash \Gamma$ est dérivable en LK .

Équivalence entre DN et \mathcal{G}

Théorème : Si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} A$.

Remarque : Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors soit Δ soit Γ n'est pas vide.

Théorème : Si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors

- Si $\Delta = \emptyset$, alors $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \Gamma$.
- Si $\Gamma = \emptyset$, alors $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg \Delta$.
- Sinon, $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg \Delta \vee \bigvee \Gamma$

Propriétés du système \mathcal{G}

Théorème : Toute règle de \mathcal{G} de la forme $\frac{S_1 \dots S_n}{S}$ est **réversible**, i.e., $S_1 \wedge \dots \wedge S_n$ est valide ssi S est valide.

Théorème : Le système \mathcal{G} est **correct**, i.e., si $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$, alors $\Delta \vdash \Gamma$ est valide.

Preuve : Par induction sur la dérivation du séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans le système \mathcal{G} à l'aide de la réversibilité et du fait que les axiomes sont des séquents valides.

Propriétés du système \mathcal{G}

Théorème : Le système \mathcal{G} est **complet**, i.e., si $\Delta \vdash \Gamma$ est valide, alors $\Delta \vdash_{\mathcal{G}} \Gamma$.

Preuve : On va construire un arbre de dérivation pour le séquent $\Delta \vdash \Gamma$ dans le système \mathcal{G} sans coupures, ceci en appliquant les règles du système “du bas vers le haut” aussi longtemps que possible. Ce processus s'arrête nécessairement car tout séquent “hypothèse” est plus petit que le séquent “conclusion” (propriété de sous-formule).

En plus, comme le séquent de la racine est valide, tous les séquents introduits par cette construction sont valides d'après le théorème de réversibilité.

Suite de la preuve

Pour conclure il faut montrer que la construction s'arrête sur des séquents axiomes, c'est à dire, que toute feuille de l'arbre de dérivation est un axiome. On raisonne par l'absurde. Si le séquent d'une *feuille* contient encore un connecteur logique, alors on peut toujours appliquer une règle du système, ce qui est en contradiction avec le fait que c'était une feuille. Alors, si le séquent d'une feuille n'a plus de connecteur logique mais il n'est pas un axiome, c'est qu'il est de la forme $p_1, \dots, p_m \vdash q_1, \dots, q_n$, avec $p_i \neq q_j$, pour tout i, j . L'interprétation qui donne **V** à toutes les lettres p_i et **F** à toutes les lettres q_j falsifie ce séquent, ceci est une contradiction avec le fait que ce séquent soit valide.

La résolution en calcul propositionnel



John Alan Robinson: philosophe, mathématicien, informaticien anglais/américain (1930 -)

Méthode par réfutation :

$\Delta \models A$ ssi A s'obtient à partir de Δ par résolution

$\Delta \models A$ ssi $\Delta \cup \{\neg A\}$ insatisfaisable ssi $\Delta \cup \{\neg A\}$ est réfutable

Forme Normale Conjonctive (FNC)

Définition :

- Un **littéral** est une formule de la forme p ou $\neg p$, où p est une lettre propositionnelle quelconque.
- Une **clause** est une formule de la forme $l_1 \vee \dots \vee l_n$, $n \geq 0$, où chaque l_i est un littéral. La **clause vide** ($n = 0$) s'écrit \perp .
- Une formule est en **forme normale conjonctive** ssi elle est de la forme $D_1 \wedge \dots \wedge D_n$, $n \geq 0$, où chaque D_i est une clause.

Forme Normale Disjonctive (FND)

Définition :

-

Dérivation par résolution

Exemple :

$$\frac{\frac{\frac{p \vee r \vee s \quad r \vee \neg s}{p \vee r \vee r}}{p \vee r} \quad \neg r}{p}$$

Notation : Une dérivation de la clause p à partir de l'ensemble $\{p \vee r \vee s, r \vee \neg s, \neg r\}$ s'écrit

$$\{p \vee r \vee s, r \vee \neg s, \neg r\} \vdash_R p$$

Réfutation

Définition : Un ensemble de clauses Δ est **réfutable** ssi $\Delta \vdash_R \perp$.

Exemple :

$$\frac{\frac{\frac{p \vee r \vee s \quad r \vee \neg s}{p \vee r \vee r}}{p \vee r} \quad \neg r}{p} \quad \neg p \\ \perp \\ \{p \vee r \vee s, r \vee \neg s, \neg r, \neg p\} \vdash_R \perp$$

Propriétés de la résolution

Théorème : La résolution est **correcte**, i.e., si $\Delta \vdash_R A$, alors $\Delta \models A$ et si $\Delta \vdash_R \perp$, alors Δ est insatisfaisable.

Théorème : La résolution est **complète** pour la réfutation, i.e., si Δ est insatisfaisable, alors $\Delta \vdash_R \perp$.