Logique – Partiel (durée : 3 heures)

Documents autorisés : deux feuilles A4 manuscrites recto-verso et personnelles. Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.

Il est recommandé de ***lire*** *le sujet.*

Pour la rédaction, utilisez une feuille pour l'exercice 1, une autre pour les exercices 2 et 3 et enfin une troisième pour les exercices 4 et 5.

Exercice 1 **[Sémantique du calcul propositionnel]** Soit β un nouveau connecteur logique et soit $\mathcal{FB}_\beta$ la fonction booléenne binaire qui interprète le symbole β et qui est définie par la table suivante :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{FB}_\beta(V,V) & = & F \\ \mathcal{FB}_\beta(V,F) & = & V \\ \mathcal{FB}_\beta(F,V) & = & F \\ \mathcal{FB}_\beta(F,F) & = & F \end{array}$$

1. Donnez une table de vérité pour la formule $p\ \beta\ (q\ \beta\ r)$. Est-ce que cette formule est valide ? satisfaisable ? Est-elle conséquence logique de $p \wedge r$?

   Correction:

   Table verité :

p	q	r	$q\ \beta\ r$	$p\ \beta\ (q\ \beta\ r)$	$p \wedge r$
F	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F
F	V	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
V	F	F	F	V	F
V	F	V	F	V	V
V	V	F	V	F	F
V	V	V	F	V	V

   La formule $p\ \beta\ (q\ \beta\ r)$ n'est pas valide car l'interprétation I_1 avec $I_1(p) = I_1(q) = I_1(r) = F$ ne la satisfait pas. Par contre, elle est satisfaisable car l'interprétation I_2 avec $I_2(p) = I_2(q) = I_2(r) = V$ la satisfait. Elle est conséquence logique de $p \wedge r$, parce que d'après la table de verité toute interprétation I qui satisfait $p \wedge r$ satisfait aussi $p\ \beta\ (q\ \beta\ r)$.

2. Indiquez une formule A telle que $A \equiv p\ \beta\ q$ et telle que les seules connecteurs de A soient $\neg$ et $\vee$.

   Correction: Par exemple $\neg(\neg p \vee q)$. On peut le vérifier en utilisant des tables de verité.

3. Indiquez une formule B telle que $B \equiv p \wedge q$ et telle que les seules connecteurs de B soient $\neg$ et β .

   Correction: Par exemple $p \;\beta\; \neg q$ où $p \;\beta\; (p \;\beta\; q)$. On peut le vérifier en utilisant des tables de verité.

Exercice 2 [Déduction Naturelle]

1. Montrez que $A \wedge B \vdash_{DN_{\text{prop}}} A \wedge (B \vee C)$ et $A \wedge C \vdash_{DN_{\text{prop}}} A \wedge (B \vee C)$.
2. Déduisez-en que $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash_{DN_{\text{prop}}} A \wedge (B \vee C)$.
3. Montrez que $A \wedge (B \vee C), B \vdash_{DN_{\text{prop}}} A \wedge B$.
4. Montrez que $A \wedge (B \vee C) \vdash_{DN_{\text{prop}}} (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
5. Montrez enfin que $\vdash_{DN_{\text{prop}}} (A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$.

Correction:

1.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\,ax}{A \wedge B \vdash A}\,\wedge e \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \wedge B \vdash A \wedge B}\,ax}{A \wedge B \vdash B}\,\wedge e}{A \wedge B \vdash B \vee C}\,\vee i}{A \wedge B \vdash A \wedge (B \vee C)}\,\wedge i$$

   L'autre est symétrique.

2.
$$\dfrac{\dfrac{}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}\,ax \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ A \wedge B \vdash A \wedge (B \vee C)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ A \wedge C \vdash A \wedge (B \vee C)\end{array}}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)}\,\vee e$$

3.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \wedge (B \vee C), B \vdash A \wedge (B \vee C)}\,ax}{A \wedge (B \vee C), B \vdash A}\,\wedge e \qquad \dfrac{}{A \wedge (B \vee C), B \vdash B}\,ax}{A \wedge (B \vee C), B \vdash A \wedge B}\,\wedge i$$

4. Similairement au point précédant, on obtient $A \wedge (B \vee C), C \vdash_{DN_{\text{prop}}} A \wedge C$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \wedge (B \vee C) \vdash A \wedge (B \vee C)}\,ax}{A \wedge (B \vee C) \vdash B \vee C}\,\wedge e \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A \wedge (B \vee C), B \vdash A \wedge B\end{array}}{A \wedge (B \vee C), B \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}\,\vee i \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ A \wedge (B \vee C), C \vdash A \wedge C\end{array}}{A \wedge (B \vee C), C \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}\,\vee i}{A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}\,\vee e$$

5.
$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, 4\\ A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)\end{array}}{\vdash (A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))}\rightarrow i$$

Exercice 3 **[Système $\mathcal{G}$]**

1. Pour chacun des séquents suivants, utiliser les règles du système $\mathcal{G}$ pour en trouver une dérivation.
   (a) $\mathbf{p} \to \mathbf{q}, \neg \mathbf{r} \vdash \neg \mathbf{p} \vee \mathbf{q}$.
   (b) $\mathbf{p} \to \neg(\mathbf{q} \wedge \mathbf{r}) \vdash (\mathbf{p} \to \neg \mathbf{q}) \vee \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{r})$.
2. Utiliser les règles du système $\mathcal{G}$ pour trouver une interprétation qui falsifie chacun des séquents suivants.
   (a) $\mathbf{p} \to \mathbf{q}, \mathbf{q} \vdash \mathbf{p}$.
   (b) $(\neg \mathbf{p} \vee \neg \mathbf{q}) \to \mathbf{r} \vdash (\mathbf{p} \to \mathbf{r}) \vee (\mathbf{q} \to \mathbf{r})$.
3. Donner toutes les dérivations des séquents suivants dans le système $\mathcal{G}$.
   (a) $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}, \mathbf{p} \to \mathbf{r} \vdash \mathbf{r} \wedge \mathbf{q}$.

Correction:

1. (a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathbf{q}, \neg\mathbf{r}, \mathbf{p} \vdash \mathbf{q}}\,ax \qquad \dfrac{}{\neg\mathbf{r}, \mathbf{p} \vdash \mathbf{p}, \mathbf{q}}\,ax}{\mathbf{p} \to \mathbf{q}, \neg\mathbf{r}, \mathbf{p} \vdash \mathbf{q}}\,\to g}{\mathbf{p} \to \mathbf{q}, \neg\mathbf{r} \vdash \neg\mathbf{p}, \mathbf{q}}\,\neg d}{\mathbf{p} \to \mathbf{q}, \neg\mathbf{r} \vdash \neg\mathbf{p} \vee \mathbf{q}}\,\vee d$$

   (b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{q} \vdash \mathbf{q}}\,ax \qquad \dfrac{}{\mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{q} \vdash \mathbf{r}}\,ax}{\mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{q} \vdash \mathbf{q} \wedge \mathbf{r}}\,\wedge d}{\neg(\mathbf{q} \wedge \mathbf{r}), \mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{q} \vdash}\,\neg g \qquad \dfrac{}{\mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{q} \vdash \mathbf{p}}\,ax}{\mathbf{p} \to \neg(\mathbf{q} \wedge \mathbf{r}), \mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{q} \vdash}\,\to g}{\mathbf{p} \to \neg(\mathbf{q} \wedge \mathbf{r}), \mathbf{p} \wedge \mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{q} \vdash}\,\wedge g}{\mathbf{p} \to \neg(\mathbf{q} \wedge \mathbf{r}), \mathbf{p} \wedge \mathbf{r}, \mathbf{p} \vdash \neg\mathbf{q}}\,\neg d}{\mathbf{p} \to \neg(\mathbf{q} \wedge \mathbf{r}), \mathbf{p} \wedge \mathbf{r} \vdash \mathbf{p} \to \neg\mathbf{q}}\,\to d}{\mathbf{p} \to \neg(\mathbf{q} \wedge \mathbf{r}) \vdash \mathbf{p} \to \neg\mathbf{q}, \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{r})}\,\neg d}{\mathbf{p} \to \neg(\mathbf{q} \wedge \mathbf{r}) \vdash (\mathbf{p} \to \neg\mathbf{q}) \vee \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{r})}\,\vee d$$

2. (a) En reversant les regles, on arrive à

$$\dfrac{\mathbf{q} \vdash \mathbf{p}, \mathbf{p} \qquad \mathbf{q}, \mathbf{q} \vdash \mathbf{p}}{\mathbf{p} \to \mathbf{q}, \mathbf{q} \vdash \mathbf{p}}\,\to g$$

   Pour exemple $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{V}, \mathbf{p} \mapsto \mathbf{F}$ falsifie le séquent.

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathbf{r},\mathbf{q},\mathbf{p}\vdash\mathbf{r},\mathbf{r}}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{q},\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{p}\vdash\mathbf{r},\mathbf{r}}{\mathbf{q},\mathbf{p},\mathbf{p}\vdash\neg\mathbf{q},\mathbf{r},\mathbf{r}}\,\neg d}{\mathbf{q},\mathbf{p}\vdash\neg\mathbf{p},\neg\mathbf{q},\mathbf{r},\mathbf{r}}\,\neg d}{\mathbf{q},\mathbf{p}\vdash\neg\mathbf{p}\vee\neg\mathbf{q},\mathbf{r},\mathbf{r}}\,\vee d}{(\neg\mathbf{p}\vee\neg\mathbf{q})\to\mathbf{r},\mathbf{q},\mathbf{p}\vdash\mathbf{r},\mathbf{r}}\,\to g}{(\neg\mathbf{p}\vee\neg\mathbf{q})\to\mathbf{r},\mathbf{q}\vdash\mathbf{p}\to\mathbf{r},\mathbf{r}}\,\to d}{(\neg\mathbf{p}\vee\neg\mathbf{q})\to\mathbf{r}\vdash\mathbf{p}\to\mathbf{r},\mathbf{q}\to\mathbf{r}}\,\to d}{(\neg\mathbf{p}\vee\neg\mathbf{q})\to\mathbf{r}\vdash(\mathbf{p}\to\mathbf{r})\vee(\mathbf{q}\to\mathbf{r})}\,\vee d$$

Alors $\mathbf{p}\mapsto\mathbf{V},\mathbf{q}\mapsto\mathbf{V},\mathbf{r}\mapsto\mathbf{F}$ falsifie le séquent.

3. (a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathbf{p},\mathbf{q}\vdash\mathbf{p},\mathbf{r}}\,ax \qquad \dfrac{}{\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}\vdash\mathbf{r}}\,ax}{\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{p}\to\mathbf{r}\vdash\mathbf{r}}\,\to g \qquad \dfrac{\dfrac{}{\mathbf{p},\mathbf{q}\vdash\mathbf{p},\mathbf{q}}\,ax \qquad \dfrac{}{\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}\vdash\mathbf{q}}\,ax}{\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{p}\to\mathbf{r}\vdash\mathbf{q}}\,\to g}{\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{p}\to\mathbf{r}\vdash\mathbf{r}\wedge\mathbf{q}}\,\wedge d}{\mathbf{p}\wedge\mathbf{q},\mathbf{p}\to\mathbf{r}\vdash\mathbf{r}\wedge\mathbf{q}}\,\wedge g$$

et d'autres... avec un peu de raisonnement, on arrive a 10 preuves différentes (si on admet que des axiomes avec que des variables propositionelles). En fait si on commence par la seule règle unaire ($\wedge d$), le seule choix restant c'est l'ordre des autres deux (donc 2 choix). Si on commence par une règle binaire, on a *pour chacun des deux branchements* 2 choix, donc ce sont 4 choix différents. Donc : $2+4+4=10$.

Exercice 4 [Calcul des Prédicats - Substitutions] Soit Σ une signature dont

- les symboles de prédicats sont $\Sigma_P = \{\, A/2, C/2, K/1 \,\}$;
- les symboles de fonctions sont $\Sigma_F = \{\, g/2, f/1, a/0 \,\}$.

Soit la formule

$$\varphi = \forall x\ [A(x,y) \Rightarrow \exists y\ (C(f(y),a) \wedge K(g(x,f(z)))) \vee A(y,z)].$$

Pour chacune des substitutions σ_i suivantes, évaluez $\sigma_i(\varphi)$:

1. $\sigma_1 = \{y/g(f(a),a), z/f(x)\}$;
2. $\sigma_2 = \{x/f(a), z/x\} \circ \{x/g(x,y), z/f(z)\}$.

Correction:

1. On doit renommer x dans la formule (sinon x est libre dans un des termes substitué, ce qui n'est pas autorisé). Après renommage on obtient,

$$\forall u\ [A(u,y) \Rightarrow \exists y\ (C(f(y),a) \wedge K(g(u,f(z)))) \vee A(y,z)].$$

En appliquant la substitution on obtient

$$\forall u\ [A(u,g(f(a),a)) \Rightarrow \exists y\ (C(f(y),a) \wedge K(g(u,f(f(x))))) \vee A((g(f(a),a),f(x))].$$

2. Comme précédemment on doit renommer, ensuite on obtient :

$$\forall u\ [A(u,y) \Rightarrow \exists y\ (C(f(y),a) \wedge K(g(u,f(f(x))))) \vee A(y,f(x))].$$

Exercice 5 [Calcul des Prédicats - Formalisation] On prend comme domaine l'ensemble des robots de la planète Schtark, dans cette planète tout robot a un "jumeau". On considère les symboles de fonctions $\Sigma_F = \{ j/1, r/0 \}$ où :

$j(x)$	dénote le jumeau de x ;
r	dénote le robot R56 ;

et les symboles de prédicats $\Sigma_P = \{ P/1, R/1, C/2 \}$ où :

$P(x)$	" x est en panne " ;
$R(x)$	" x a des roues " ;
$C(x, y)$	" x comprend le langage de y ".

Traduisez les énoncés suivants dans le calcul des prédicats du premier ordre :

1. le jumeau de R56 est en panne ;
2. les jumeaux de tous les robots qui ont des roues sont en panne ;
3. tous les robots sans roue qui comprennent au moins un robot qui a des roues sont en panne ;
4. R56 ne comprend pas tous les robots en panne.

Correction:

1. $P(j(r))$
2. $\forall x\ (R(x) \Rightarrow P(j(x))$
3. $\forall x\ \{[\neg R(x) \wedge (\exists y\ R(x) \Rightarrow C(x, y))] \Rightarrow P(x)\}$
4. $\neg\forall x\ (P(x) \Rightarrow C(r, x))$

Exprimez en français les formules suivantes

1. $\forall x\ (R(x) \Rightarrow P(x))$
2. $\exists x\ (R(x) \wedge C(x, r))$
3. $\forall x\ (C(x, j(x)) \Rightarrow C(x, r)$
4. $\neg\exists x\ C(x, j(r))$

Correction:

1. tous les robots à roues sont en panne
2. il existe un robot à roue qui comprend R56
3. les robots qui comprennent leur propre jumeau comprennent R56
4. il n'existe aucun robot qui comprenne le jumeau de R56