L3 Informatique

Année 2010-2011

Partiel de Logique

éléments de corrections

⚠ corrigé partiel et non officiel, à lire d'un œil critique ⚠

E ercice 1 ! "#$t%me de &ent'en

Pour les rappels sur le système de Gentzen, voir aussi poly de cours n°2 et la correction du TD3 de 2008-2009.

(ropo$ition 1

) orrection

q, p ⊢ q, p   + * d,
q ⊢ p * q, p   p, q ⊢ p   + * g,
+p * q, * p, q ⊢ p   + * d,
+p * q, * p ⊢ q * p   + * d,
⊢ ++p * q, * p, * +q * p,

A iome$ en -leu
(roc.ain $#m-ole $upprimé en rouge

(ropo$ition 2

) orrection

q, ⊢ q, p, r   q, r ⊢ p, r   + * g,
q, p ⊢ p, r   +¬d,   q, q * r ⊢ p, r   +¬d,
q ⊢ p, /p, r   q ⊢ p, /+q * r,, r   +0d,
q ⊢ p, /p 0 /+q * r,, r   +¬d,
⊢ p, /q, /p 0 /+q * r,, r   +∨d,
⊢ p 1 /q, /p 0 /+q * r,, r   +¬g,
/+p 1 /q, ⊢ /p 0 /+q * r,, r   +∨d,
/+p 1 /q, ⊢ +/p 0 /+q * r,, 1 r   + * d,
⊢ /+p 1 /q, * ++/p 0 /+q * r,, 1 r,

(Exercice 2 non traité pour l'instant)

p	q	/q	+p 0 /q,	p ⊕ +p 0 /q,
6	6	7	6	6
6	7	6	6	6
7	6	7	7	6
7	7	6	6	7

8emarque !)ette formule e$t équi4alente à ! p 0 q

2ue$tion 2

3ét.ode

(ar définition du 9 : 8 $i on la conna;t, ou par lecture de la ta-le de 4érité $inon ! p ⊕ q < +p 0 /q, 1 +/p 0 q,5
(ui$qu'on ne donne que la ta-le de 4érité de 9 : 8 comme définition, on ne peut prou4er l'équi4alence de$ 2 formule$ qu'en comparant leur$ ta-le$ de 4érité5

)orrection

A = +p 0 /q, 1 +/p 0 q,

p	q	p 0 /q	/p 0 q	+p 0 /q, 1 +/p 0 q,
6	6	6	6	6
6	7	6	7	7
7	6	7	6	7
7	7	6	6	6

La ta-le de 4érité de A e$t -ien la m>me que celle de p⊕q, donc A < p⊕q5

2ue$tion 3

)orrection

?'apr%$ la répon$e précédente, toute occurrence de +)⊕?, dan$ une formule peut donc >tre tran$formée en ++) 0 /?, 1 +/) 0 ?,, an c.anger la 4aleur de la formule5
?onc pour toute formule A contenant une ou plu$ieur$ partie de la forme +)⊕?,, on peut écrire une formule @ équi4alente en remplaAant ce$ partie$ par ++) 0 /?, 1 +/) 0 ?,,5)ette formule @ équi4alente à A ne contiendra donc aucun connecteur ⊕5

(artie @ ! ?éduction Baturelle

Pour les rappels sur le système de Déduction Naturelle, voir aussi poly de cours n°2 et la correction du TD2 de 2008-2009.

2ue$tion 1

) orrection

(ropo$ition +a,

/p, p⊕q ⊢ p⊕q   /p, p⊕q ⊢ /p   +⊕*e*,
/p, p⊕q ⊢ q   + * *i*,
/p ⊢ +p⊕q, * q   + * *i*,
⊢ /p * ++p⊕q, * q,

(ropo$ition +-,

"urlignon$ le$ long$ pa$$age$ qui $e rép%tent $ou4ent pour plu$ de li$i-ilité

/+p 1 q,, p⊕q , p ⊢ p   +∨*i*,
/+p 1 q,, p⊕q , p ⊢ p 1 q   /+p 1 q,, p⊕q , p ⊢ /+p 1 q,   +/*i*,
/+p 1 q,, p⊕q ⊢ p⊕q   /+p 1 q,, p⊕q ⊢ /p   +⊕*e*,
/+p 1 q,, p⊕q ⊢ q   + * *i*,
/+p 1 q, ⊢ +p⊕q, * q   + * *i*,
⊢ /+p 1 q, * ++p⊕q, * q,

(ropo$ition +c,

Boton$ C = p * /q, /p * q pour alléger l'écriture

C , p ⊢ p   C , p ⊢ p * /q   + * *e*,   C , /p ⊢ /p   C , /p ⊢ /p * q   + * *e*,
p * /q, /p * q , p ⊢ /q   p * /q, /p * q , /p ⊢ q   +⊕*i*,
p * /q, /p * q ⊢ p⊕q   + * *i*,
p * /q ⊢ +/p * q, * +p⊕q,   + * *i*,
⊢ +p * /q, * ++/p * q, * +p⊕q,,

(ropo$ition +d,

p⊕q, q ⊢ /p+1,   p⊕q, /q ⊢ p+2,   +⊕*i*,
p⊕q ⊢ q⊕p   + * *i*,
⊢ +p⊕q, * +q⊕p,

+1, !

p⊕q, p, q ⊢ p⊕q   p⊕q, p, q ⊢ p   +⊕*e*,
p⊕q, p, q ⊢ q   p⊕q, p, q ⊢ /q   +/*i*,
p⊕q, q ⊢ /p

+2, !

p⊕q, /p, /q ⊢ p⊕q   p⊕q, /p, /q ⊢ /p   +⊕*e*,
p⊕q, /p, /q ⊢ /q   p⊕q, /p, /q ⊢ q   +/*i*,
p⊕q, /q ⊢ //p   +//*e*,
p⊕q, /q ⊢ p

2ue$tion 2

) orrection

8%gle +a,

$$\dfrac{C \vdash A \qquad \dfrac{C \vdash +A \ * \ /@,\ 0 +/A \ * \ @,}{C \vdash A \ * \ /@}\ {+0e,}}{C \vdash \ /@}\ {+ * e,}$$

E#pot.%$e 1
E#pot.%$e 2

: n a ain$i prou4é que $i C ⊢ A et C ⊢ +A * /@, 0 +/A * @, $ont déri4a-le$, alor$ C ⊢ /@ e$t au$$i déri4a-le5
? onc la r%gle +a, e$t admi$$i-le dan$ DN_{prop}5
? e m>me pour le$ autre$ r%gle$!

8%gle +-,

$$\dfrac{C \vdash /A \qquad \dfrac{C \vdash +A \ * \ /@,\ 0 +/A \ * \ @,}{C \vdash /A \ * \ @}\ {+0e,}}{C \vdash @}\ {+ * e,}$$

8%gle +c,

$$\dfrac{\dfrac{C, A \vdash /@}{C \vdash A \ * \ /@}\ {+ * i,} \qquad \dfrac{C, /A \vdash @}{C \vdash /A \ * \ @}\ {+ * i,}}{C \vdash +A \ * \ /@,\ 0 +/A \ * \ @,}\ {+0i,}$$

2ue$tion 3 !

Idem partie A, questions 2 et 3.

2ue$tion D

) orrection

(our c.aque preu4e d'une formule A dan$ $DN^{\oplus}_{\text{prop}}$, il e i$te une preu4e équi4alente dan$ DN_{prop} d'une formule @ équi4alente à A an 9 : 8 ! c.aque occurrence de la premi%re r%gle +$\oplus e$, e$t remplacée par la r%gle +a, +ou $a déri4ation équi4alente en 2 étape$ 4ue ci-de$$u$,, c.aque occurrence de la $econde r%gle +$\oplus e$, e$t remplacée par la r%gle +-,, et c.aque occurrence de la r%gle +$\oplus i$, e$t remplacée par la r%gle +c,5

(artie) ! "#$t%me de Eil-ert

Pour les rappels sur le système de Hilbert, voir aussi poly de cours n°2 et la correction du TD2 de 2008-2009.

2ue$tion 1