Université Paris Diderot – L3 Informatique 18 mars 2013

Logique – Partiel (durée : 3 heures)

Documents autorisés : deux feuilles A4 manuscrites recto-verso et personnelles. Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.

Il est recommandé de ***bien lire*** *le sujet.*
Justifiez bien toutes vos réponses.

Pour la rédaction, utilisez une feuille pour les exercices 1 et 2, une autre pour les exercices 3 et 4 et enfin une troisième pour les exercice 5 et 6

Attention : lorsque vous écrivez un arbre de dérivation, il vous est demandé d'indiquer chaque règle utilisée, en la notant à droite de la barre (par exemple, $\wedge e$ pour l'élimination du "et").

On rappelle qu'en cas d'ambiguïté, l'implication « $\to$ » est associative à droite ; par exemple, $p \to q \to r$ signifie $p \to (q \to r)$.

Exercice 1 [Sémantique]

Soient p, q, r trois variables propositionnelles

1. Montrez que $(((p \vee q) \to r) \to (p \vee q)) \models ((p \vee q) \vee r)$
2. Est-ce qu'on a que $((p \vee q) \vee r) \models (((p \vee q) \to r) \to (p \vee q))$?
3. Écrivez une formule équivalente à $(((p \vee q) \to r) \to (p \vee q))$ en utilisant seulement négation et conjonction.
4. Considerez la table de verité suivante

p	q	r	Φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Écrivez une formule de la logique propositionnelle Φ qui a cette table de verité. Elle devra être la plus courte possible.

Exercice 2 [Induction]

Soit I l'interpretation telle que, pour toute variable propositionnelle p, $I(p) = \mathbf{V}$. Soit X l'ensemble des formules propositionnelles construites en utilisant seulement $\vee$ et $\wedge$, mais sans négation ni flèche. Prouvez par induction structurelle que pour toute formule A de X, I satisfait A. Dessinez une table de verité qui ne correspond à aucune formule de X.

Exercice 3 [Système de Hilbert]

1. Donnez une dérivation de la formule $p \to p \to q \to q$ dans $\vdash_{H_\to}$ sans utiliser le théorème de la déduction.
2. Déterminer la validité de chacune des formules suivantes soit en montrant une affectation qui ne la satisfait pas, soit en montrant qu'elle est prouvable dans H_{prop} :
   - ✓ $(\neg\neg p \wedge \neg q) \to (q \vee p)$
   - ✓ $(\neg p \wedge \neg q) \to \neg(q \wedge p)$
   - ✓ $(p \wedge q) \to (q \wedge p)$.
3. (*Bonus*) Pour les formules valides du point précédent, donnez des dérivations complètes dans H_{prop}.

~~**Exercice 4**~~ [Déduction naturelle]

Donnez des dérivations dans DN_{prop} des formules suivantes :

1. $((p \wedge (q \vee r)) \to (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
2. $((p \vee q) \wedge r) \to (\neg\neg r \wedge (q \vee p))$

~~**Exercice 5**~~ [Système G]

Donner une preuve des séquents suivants dans le système G :

1. $\vdash ((p \wedge q) \to r) \to (\neg p \vee (q \to r))$
2. $\neg(\neg p \to q) \vdash (\neg p \wedge \neg q), q \to r$

Exercice 6 [Résolution]

1. Montrer par réfutation (résolution) le séquent suivant :

$$q \to r, r \to (p \vee \neg q) \vdash \neg(\neg p \wedge q)$$

2. Montrer par résolution que l'ensemble des clauses suivant est contradictoire

$$p \vee r, q \vee \neg r, \neg q, \neg p \vee t, \neg s, s \vee \neg t$$

3. Supposez ~~d'~~avoir un ensemble de clauses non vides contenant uniquement des litéraux négatif (c'est-à-dire de la forme $\neg p$). Expliquez pourquoi la résolution n'aboutira jamais a la clause vide.