Univ rsité Paris Did rot - Lic nc 3 Anné 2009-2010

TD de Logique n^{o} 4

Calcul des prédicats. Syntaxe

Exercice 1 (Syntaxe) Soi nt :
p, q d ux symbol s d prédicats binair s,
r un symbol d prédicat unair ,
f, h d ux symbol s d fonctions unair s,
a un symbol d fonction 0-air t
g un symbol d fonction t rnair .
Soit la formul du calcul d s prédicats suivant :

$$F \quad = \quad 9x\; p(x, f(y)) \_ \; {:}8y\; q(y, g(a, z, h(z)))$$

1. Donn z tous l s t rm s apparaissant dans F
2. Donn z tous l s atom s apparaissant dans F
3. Donn z tout s l s sous-formul s d F.

Exercice 2 (Formalisation 1)
En utilisant l s symbisa0-1L0 c3.éd6.350Td(C10.9091Tf2.3020-33Tf4.2420Td(a)-16(z)-44()-166(h)TFx10.9091T

Exercice 3 (Formalisation 2)
En utilisant l s symbol s d prédicat suivants

$A(x)$	« x st anglais »
$H(x,y)$	« x hait y »
$C(x,y)$	« x connaît y »

t l s symbol s d fonction suivants

$e(x)$	dénot l pir nn mi d x
n	dénot Napoléon

traduis z l s énoncés suivants dans l calcul d s prédicats du pr mi r ordr :

1. Tout anglais hait son pir nn mi.
2. Napoléon connaît son pir nn mi.
3. C lui qui connaît son pir nn mi n l hait pas.
4. P rsonn n connaît l pir nn mi d Napoléon.
5. L pir nn mi d Napoléon st anglais.
6. Quiconqu hait qu lqu'un, n hait pas son pir nn mi.

Exercice 4 (Substitutions)

1. Soit $t = p(x,y)$. On considèr l s substitutions $\sigma_1 = \{x \mapsto f(a)\}$ t $\sigma_2 = \{y \mapsto f(x)\}$.
   Calcul z : $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$, $\sigma_1(\sigma_2(t))$ t $\sigma_2(\sigma_1(t))$.
   Calcul z : $\sigma_1 \quad \sigma_2$ t $\sigma_2 \quad \sigma_1$. (Rapp l : $\sigma \quad \sigma'(x) = \sigma(\sigma'(x))$ pour tout variabl x).
   Est-c qu la définition d la composition s'ét nd à tous l s t rm s, n particuli r au t rm t : st-c vrai qu $(\sigma_1 \quad \sigma_2)(t) = \sigma_1(\sigma_2(t))$?
2. Soit $\sigma_1 = \{x \mapsto y\}$ t soit $\sigma_2 = \{y \mapsto x\}$. Calcul r $\sigma_1 \quad \sigma_2$.
3. Soit s l t rm $r(x,y,z)$ t l s substitutions

$$\begin{array}{rcl} \sigma_1 & = & \{x \mapsto f(a),\ y \mapsto f(x),\ z \mapsto b\} \\ \sigma_2 & = & \{x \mapsto f(z),\ y \mapsto f(b),\ z \mapsto b\} \\ \sigma_3 & = & \{w \mapsto z,\ z \mapsto b\} \quad \{x \mapsto f(w),\ y \mapsto a\} \end{array}$$

   Calcul r $\sigma_1(s)$, $\sigma_2(s)$ t $\sigma_3(s)$.

Exercice 5 (Variables libres, liées)
Dans la formul suivant , indiqu z pour chaqu variabl , si ll st libr ou lié , t l cas échéant à qu l conn ct ur ll st lié .

$$F = \forall x\ [\exists y\ (p(x,y)) \wedge \exists x\ (q(y,x) \wedge \forall y\ r(y,y))]$$

Appliqu z à F la substitution $\sigma = \{x \mapsto f(a), y \mapsto f(f(a))\}$.
Transform z F pour la r ndr plus lisibl .