TD de Logique n^{o} 5

Calcul des séquents de Gentzen

Exercice 1 Dérivez dans $\mathcal{G}$ et dans LK les séquents suivants :

1. $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to \mathbf{r}, \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{s}) \vdash \neg\mathbf{p}, \neg\mathbf{s}$
2. $\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p} \vdash$
3. $\vdash (\neg\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}) \to ((\mathbf{p} \vee \mathbf{r}) \wedge \mathbf{s} \wedge \mathbf{m})$
4. $(\mathbf{p} \to \neg\mathbf{p}) \wedge (\neg\mathbf{p} \to \mathbf{p}) \vdash$

Exercice 2 Dérivez dans DN et dans $\mathcal{G}$ le séquent $\vdash (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to (\mathbf{q} \vee \mathbf{p})$

Exercice 3
Étant donnés un système de preuves $\mathcal{L}$ sur les séquents et une règle d'inférence de la forme

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \dots \quad \Gamma_n \vdash \Delta_n}{\Gamma \vdash \Delta}$$

(avec $n \geq 0$) on dit que cette règle :

- est *réversible* si à partir du séquent $\Gamma \vdash \Delta$ on peut dériver dans $\mathcal{L}$ le séquent $\Gamma_i \vdash \Delta_i$, pour tout $1 \leq i \leq n$.
- *préserve la fausseté* si pour toute interprétation I, on a que si I ne satisfait pas la formule associée au séquent $\Gamma_i \vdash \Delta_i$ pour un certain $1 \leq i \leq n$, alors I ne satisfait pas la formule associée au séquent $\Gamma \vdash \Delta$.

1. Montrez que la règle $\to_d$ du système $\mathcal{G}$ est réversible.
2. Montrez que la règle $\to_d$ du système $\mathcal{G}$ préserve la fausseté.
3. Montrez que pour toute formule A, et tous multi-ensembles de formules Γ et Δ, il existe une dérivation dans le système $\mathcal{G}$ du séquent $\Delta, A \vdash A, \Gamma$ telle que les règles axiome ne soient appliquées qu'à des atomes.
4. La propriété montrée dans l'exercice 3.2 est en fait vraie pour toutes les règles du système $\mathcal{G}$. En déduire une méthode automatique de démonstration qui retourne une démonstration d'un séquent si cela est possible, ou une interprétation qui falsifie la formule associée au séquent dans le cas contraire. L'ordre d'application des règles a-t-il une importance ?
5. En utilisant l'algorithme de l'exercice 3.4, dites si les séquents suivants sont dérivables dans $\mathcal{G}$ ou non.
   (a) $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to \mathbf{r},\ \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{s}) \vdash \neg\mathbf{p},\ \neg\mathbf{s}$
   (b) $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to \mathbf{r},\ \neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{s}) \vdash$
   (c) $\vdash (\neg\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}) \to ((\mathbf{p} \vee \mathbf{r}) \wedge \mathbf{s} \wedge \mathbf{m})$
   (d) $\vdash (\neg\mathbf{p} \vee \mathbf{p}) \to ((\neg\mathbf{r} \wedge \mathbf{r}) \wedge \mathbf{p} \wedge \mathbf{p})$

Exercice 4 *(À faire chez vous)* On se place dans le système $\mathcal{G}$. Soient M, N deux formules quelconques.

1. Montrez que s'il existe une preuve du séquent $\Gamma \vdash M \wedge N, \Delta$, alors il existe une preuve des séquents $\Gamma \vdash M, \Delta$ et $\Gamma \vdash N, \Delta$.
2. Montrez que s'il existe une preuve du séquent $\Gamma, M \wedge N \vdash \Delta$, alors il existe une preuve du séquent $\Gamma, M, N \vdash \Delta$.