Univ rsité Paris Did rot - Lic nc 3 Anné 2009-20010

TD de Logique n^o 3

Calcul des sequents de Gentzen

Exercice 1 Montr r dans $\mathcal{G}$ l s séqu nts suivants :

1. $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to \mathbf{r},\ \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{s}) \vdash \neg\mathbf{p},\ \neg\mathbf{s}$
2. $(\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p}) \vdash$
3. $\vdash (\neg\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}) \to ((\mathbf{p} \vee \mathbf{r}) \wedge \mathbf{s} \wedge \mathbf{m})$
4. $\vdash \mathbf{p} \to \mathbf{q} \to \mathbf{r} \to \mathbf{s} \to \mathbf{p}$

Exercice 2

1. Montr r qu pour chaqu règl du systèm $\mathcal{G}$, un int rprétation satisfait la formul associé au séqu nt conclusion si t s ul m nt si ll satisfait tout s l s (formul s associé s aux) prémiss s.
2. Déduir un méthod automatiqu d démonstration, qui r tourn soit un démonstration du séqu nt soit un int rprétation qui falsifi la formul associé . L'ordr d'application d s règl s a-t-il un importanc ?
3. En utilisant c t algorithm , dit s si l s formul s suivant s sont valid s ou non.
   (a) $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to \mathbf{r},\ \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{s}) \vdash \neg\mathbf{p},\ \neg\mathbf{s}$
   (b) $\vdash (\mathbf{r} \wedge \mathbf{s}),\ \mathbf{q}$
   (c) $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to \mathbf{r},\ \neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{s}) \vdash$
   (d) $(\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p}) \vdash$
   ( ) $\vdash (\neg\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}) \to ((\mathbf{p} \vee \mathbf{r}) \wedge \mathbf{s} \wedge \mathbf{m})$
   (f) $\vdash ((\neg\mathbf{p} \vee \mathbf{p}) \to (\neg\mathbf{r} \wedge \mathbf{r}) \wedge \mathbf{p} \wedge \mathbf{p})$
   (g) $\vdash \mathbf{p} \to \mathbf{q} \to \mathbf{r} \to \mathbf{s} \to \mathbf{m}$
   (h) $\vdash \mathbf{p} \to \mathbf{q} \to \mathbf{r} \to \mathbf{s} \to \mathbf{p}$

Exercice 3 Consid r z un variation du systèm $\mathcal{G}$ où l s axiom s sont d l form $A \vdash A$. C systèm st-il compl t ? Trouv z d s formul s dont la pr uv néc ssit d s axiom s dans l ur form plus gén ral .

Exercice 4

1. Rajout r au calcul d s séqu nts $\mathcal{G}$ un règl droit t un règl gauch pour l conn ct ur $\leftrightarrow$. Montr r qu' ll s sont corr ct s.
2. Démontr r maint nant l'équival nc logiqu $\neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \equiv \neg\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{q}$ à l'aid d la nouv ll v rsion du calcul cont nant c s nouv ll s règl s.

Exercice 5 Soi nt F t G d ux formul s propositionn ll s qu lconqu s. Soit $\mathbf{p}$ un variabl propositionn ll d F t soit F' la formul obt nu n r mplaçant dans F la variabl $\mathbf{p}$ par la formul G d façon uniform . Prouv r qu si F st un tautologi , alors F' st aussi un tautologi . Raisonn r sur la pr uv d la formul F dans l calcul $\mathcal{G}$.

Exercice 6 Soi nt M, N d ux formul s qu lconqu s.

1. Montr r qu s'il xist un pr uv du séqu nt $\Gamma \vdash M \wedge N,\ \Delta$, alors il xist un pr uv d s séqu nts $\Gamma \vdash M,\ \Delta$ t $\Gamma \vdash N,\ \Delta$.
2. Montr r qu s'il xist un pr uv du séqu nt $\Gamma,\ M \wedge N \vdash \Delta$, alors il xist un pr uv du séqu nt $\Gamma,\ M,\ N \vdash \Delta$.