TD de Logique n^{o} 7

Calcul des prédicats de Gentzen

Exercice 1 (Quelques dérivations dans $\mathcal{G}$)
Prouvez les séquents suivants dans $\mathcal{G}$:

$$\begin{array}{rcl}
\forall x(P(x) \to Q(x)), P(a) & \vdash & Q(a) \\
\forall x P(x) & \vdash & \exists x P(x) \\
\exists x(P(x) \wedge Q(x)) & \vdash & \exists x P(x) \\
\exists x \forall y P(x,y) & \vdash & \forall y \exists x P(x,y) \\
 & \vdash & \exists x(P(x) \to (P(f(x)) \wedge P(g(x)))) \\
 & \vdash & (\forall x(P \vee Q(x))) \to (P \vee \forall x Q(x)) \\
\forall x \forall y P(x,y) & \vdash & \forall x \forall y P(y,x)
\end{array}$$

Quelles réciproques vous paraissent valides ? Lesquelles sont seulement satisfaisables ?

Exercice 2 (Dérivations supplémentaires dans $\mathcal{G}$)
Essayez de dériver les séquents suivants :

$$\begin{array}{rcl}
 & \vdash & \exists x(P(f(x)) \to P(x)) \\
 & \vdash & \exists x \exists y(P(x, f(y)) \to P(f(x), y)) \\
P(0), \forall x(P(x) \to I(s(x))), \forall x(I(x) \to P(s(x))) & \vdash & I(s(s(s(0)))) \\
\forall x P(0,x,x), \forall x \forall y \forall z(P(x,y,z) \to P(x,s(y),s(z))), & & \\
\forall x \forall y \forall z(P(x,y,z) \to P(y,x,z)) & \vdash & \forall x P(x,0,x) \\
 & \vdash & \exists x((P(x) \to P(f(x))) \to P(g(x)))
\end{array}$$

Pour les séquents qui ne paraissent pas dérivables, la méthode de recherche de preuve s'arrête-t-elle ? Pouvez-vous donner une interprétation qui n'est pas un modèle du séquent, i.e. une interprétation qui satisfait la négation du séquent ?

Exercice 3 (Réversibilité)
Montrez que pour chaque règle de quantificateur du système $\mathcal{G}$, une interprétation est un modèle pour la formule associée au séquent conclusion si et seulement si elle est un modèle pour la formule associée à la prémisse.

Exercice 4 L'ordre des règles est-il important dans le système $\mathcal{G}$ des prédicats ? Trouvez un exemple de séquent justifiant ce fait.