Le calcul propositionnel

Logique Propositionnelle

- Syntaxe
- Sémantique
- Définissabilité
- Systèmes de preuves
  - Systèmes de preuves sémantiques (tables de vérité)
  - Systèmes de preuves syntaxiques

Syntaxe de la logique propositionnelle

Soit R en ensemble dénombrable de lettres dites propositionnelles.

Définition : L'ensemble de formules de la logique propositionnelle est le plus petit ensemble contenant R et fermé par les opérations binaires , , $\rightarrow$ et l'opération unaire $\neg$.

Exemple :	$\neg(p)$	(p, p)	$\rightarrow(\ \ (p, q), \neg(r))$
Autre notation :	$\neg p$	$p \quad p$	$(p \quad q) \rightarrow \neg r$

Notation : On écrira $\#$ pour , ou $\rightarrow$.

Remarque : C'est un ensemble inductif, donc on pourra appliquer le principe d'induction.

$SF(A)$: sous-formules d'une formule A

- Si A est une lettre p, $SF(A) = \{p\}$.
- Si A est $\neg B$, $SF(A) = \{\neg B\} \quad SF(B)$.
- Si A est $B\#C$, $SF(A) = \{B\#C\} \quad SF(B) \quad SF(C)$.

Sémantique de la logique propositionnelle

Étant donnée une valeur de l'ensemble $\mathbf{BOOL} = \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$ pour chaque lettre propositionnelle, on veut établir la valeur d'une formule propositionnelle A.

- Fixer une interprétation qui donne $\mathbf{V}$ ou $\mathbf{F}$ à chaque lettre propositionnelle.
- Définir la fonction booléenne unaire $FB_{\neg} : \mathbf{BOOL} \rightarrow \mathbf{BOOL}$ et les fonctions booléennes binaires $FB\ , FB\ , FB_{\rightarrow} : \mathbf{BOOL}^2 \rightarrow \mathbf{BOOL}$.
- Construire la valeur de vérité de la formule A.

La fonction booléenne unaire

$$\begin{array}{rcl} FB_{\neg}(\mathbf{V}) & = & \mathbf{F} \\ FB_{\neg}(\mathbf{F}) & = & \mathbf{V} \end{array}$$

Les fonctions booléennes binaires

$$\begin{array}{rcl} FB\ (\mathbf{V}, \mathbf{V}) & = & \mathbf{V} \\ FB\ (\mathbf{V}, \mathbf{F}) & = & \mathbf{V} \\ FB\ (\mathbf{F}, \mathbf{V}) & = & \mathbf{V} \\ FB\ (\mathbf{F}, \mathbf{F}) & = & \mathbf{F} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} FB\ (\mathbf{V}, \mathbf{V}) & = & \mathbf{V} \\ FB\ (\mathbf{V}, \mathbf{F}) & = & \mathbf{F} \\ FB\ (\mathbf{F}, \mathbf{V}) & = & \mathbf{F} \\ FB\ (\mathbf{F}, \mathbf{F}) & = & \mathbf{F} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} FB_{\rightarrow}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) & = & \mathbf{V} \\ FB_{\rightarrow}(\mathbf{V}, \mathbf{F}) & = & \mathbf{F} \\ FB_{\rightarrow}(\mathbf{F}, \mathbf{V}) & = & \mathbf{V} \\ FB_{\rightarrow}(\mathbf{F}, \mathbf{F}) & = & \mathbf{V} \end{array}$$

Valeur de vérité d'une formule A par rapport à une interprétation I

- Si A est une lettre p, $[A]_I = I(p)$.
- Si A est $\neg B$, $[A]_I$

Tables de vérité

À quoi ça sert ? Méthode pour raisonner sur les modèles de formules propositionnelles.

Comment ça marche ? Soit A une formule ayant comme lettres propositionnelles l'ensemble $\{p_1, \ldots, p_n\}$ et dont l'ensemble de sous-formules est $\{A_1, \ldots, A_k\}$.

1. Construire une table où chaque colonne est étiquetée par une lettre p_i ou bien par une sous-formule A_j.
2. Pour chaque ligne m de la table :
   (a) Donner une interprétation I_m aux lettres $p_1, \ldots, p_n$.
   (b) Calculer les valeurs $[A_1]_{I_m}, \ldots, [A_k]_{I_m}$

Satisfaire et falsifier une formule

Soit I une intepprétation, A une formule et Δ un ensemble de formules.

Définition :

I satisfait une formule A si $[A]_I = \mathbf{V}$

I falsifie une formule A si $[A]_I = \mathbf{F}$.

I satisfait un ensemble de formules Δ si I satisfait toute formule de Δ.

I falsifie un ensemble de formules Δ ssi il existe au moins une formule A dans Δ telle que $[A]_I = \mathbf{F}$.

Formules satisfaisables, contradictoires, valides

Définition : Une formule A est satisfaisable s'il existe au moins une interprétation I qui satisfait A. Un ensemble de formules Δ est satisfaisable s'il existe au moins une interprétation I telle que I satisfait Δ, c'est à dire s'il existe au moins une interprétation I telle que I satisfait toutes les formules de Δ en même temps.

Définition : Une formule A est contradictoire ou insatisfaisable si elle n'est pas satisfaisable, c'est à dire s'il n'existe pas d'interprétation I qui satisfait A (si toute interprétation falsifie A). Un ensemble de formules Δ est contradictoire ou insatisfaisable si il n'est pas satisfaisable (s'il n'existe pas d'interprétation qui satisfait toutes les formules de Δ en même temps).

Conséquence logique et validité

Définition : Une formule A est valide si toute interprétation satisfait A. Un ensemble de formules Δ est valide si toute formule de Δ est valide.

Définition : Une formule A est conséquence logique d'un ensemble de formules Δ, noté $\Delta \models A$, si toute interprétation qui satisfait Δ satisfait aussi A.

Comment lire une table de vérité ?

- Si la colonne étiquetée par la formule A (qui est une sous-formule de A) ne contient que de $\mathbf{V}$, alors A est valide.
- Si la colonne de la formule A ne contient que de $\mathbf{F}$, alors A est contradictoire.
- Sinon, l'interprétation qui rends $\mathbf{V}$ la colonne de la formule A satisfait A et l'interprétation qui rends $\mathbf{F}$ la colonne de la formule A falsifie A.

Équivalence logique

Définition : Deux formules A et B sont équivalentes, noté $A \equiv B$, ssi $\{A\} \models B$ et $\{B\} \models A$.

Remarque : $A \equiv B$ ssi $(A \rightarrow B) \quad (B \rightarrow A)$ est valide.

Encore quelques exemples

(Associativité)	$(A \quad B) \quad C$	$\equiv$	$A \quad (B \quad C)$
	$(A \quad B) \quad C$	$\equiv$	$A \quad (B \quad C)$
(Commutativité)	$A \quad B$	$\equiv$	$B \quad A$
	$A \quad B$	$\equiv$	$B \quad A$
(Idempotence)	$A \quad A$	$\equiv$	A
	$A \quad A$	$\equiv$	A
(Lois de De Morgan)	$\neg(A \quad B)$	$\equiv$	$\neg A \quad \neg B$
	$\neg(A \quad B)$	$\equiv$	$\neg A \quad \neg B$
(Distributivité)	$A \quad (B \quad C)$	$\equiv$	$(A \quad B) \quad (A \quad C)$
	$A \quad (B \quad C)$	$\equiv$	$(A \quad B) \quad (A \quad C)$
(Loi de la double négation)	$\neg\neg A$	$\equiv$	A
(Définissabilité de $\rightarrow$)	$A \rightarrow B$	$\equiv$	$\neg A \quad B$

Remarques

1. $\{E_1, \ldots, E_n\} \models A$ ssi la formule $E_1 \quad \ldots \quad E_n \rightarrow A$ est valide pour $n \geq 1$.
2. L'ensemble vide est satisfaisable.
3. Toute formule valide est conséquence logique d'un ensemble quelconque de formules, en particulier de l'ensemble vide.
4. $\models A$ ssi la formule A est valide.
5. Si Δ est satisfaisable et $\Gamma \quad \Delta$, alors Γ est satisfaisable.
6. L'ensemble de toutes les formules est contradictoire.
7. Si Δ est satisfaisable, alors Δ est finiment satisfaisable.
8. Si Γ est contradictoire et $\Gamma \quad \Delta$, alors Δ est contradictoire.

9. Toute formule est conséquence logique d'un ensemble insatisfaisable de formules.
10. A est valide ssi $\neg A$ est insatisfaisable.
11. $\Delta \models A$ ssi $\Delta \quad \{\neg A\}$ est insatisfaisable.

Théorème de compacité

Théorème : Un ensemble de formules Δ est satisfaisable ssi tout sous-ensemble fini de Δ est satisfaisable.