TD de Logique n° 2

Système de Hilbert
Déduction Naturelle

L s énoncés d s TD sont disponibl s sur `http://www.li f .jussieu.fr/~h berm/cours/logique/`

Système de Hilbert

On rapp ll qu' n cas d'ambiguïté, l'implication « $\to$ » st associativ à droit ; par x mpl , $\mathbf{p} \to \mathbf{q} \to \mathbf{r}$ signifi $\mathbf{p} \to (\mathbf{q} \to \mathbf{r})$.

Exercice 1

1. Montr z qu $\vdash_{H_\to} \mathbf{p} \to \mathbf{p}$.
2. Montr z qu $\vdash_{H_\to} \mathbf{p} \to \mathbf{q} \to \mathbf{q}$.
3. Montr z qu $\vdash_{H_\to} (\mathbf{p} \to \mathbf{q}) \to (\mathbf{q} \to \mathbf{r}) \to \mathbf{p} \to \mathbf{r}$

Exercice 2

1. Soit $^{+}_{\to}$ l systèm $_{\to}$ augm nté d la règl suivant :

$$\frac{\to \quad \to}{\to \quad \to}$$

   Montr z qu $\Delta \vdash_{H_\to}$ si t s ul m nt si $\Delta \vdash_{H^+_\to}$.
2. Déduis z- n qu $\vdash_{H_\to} (\mathbf{p} \to \mathbf{q}) \to (\mathbf{r} \to \mathbf{p}) \to \mathbf{r} \to \mathbf{q}$.
3. Montr z aussi qu $\vdash_{H_\to} (\mathbf{p} \to \mathbf{p} \to \mathbf{q}) \to \mathbf{p} \to \mathbf{q}$.

Exercice 3

1. Montr z qu $\vdash_{H_{\text{prop}}} ((\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \to \mathbf{r}) \to (\mathbf{p} \to \mathbf{q} \to \mathbf{r})$. Qu' n st-il d la propriété réciproqu ?
2. Montr z qu $\vdash_{H_{\text{prop}}} \mathbf{p} \to \neg\neg\mathbf{p}$.
3. Montr z qu $\vdash_{H_{\text{prop}}} \neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to (\neg\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{q})$. Qu' n st-il d la propriété réciproqu ?

Déduction Naturelle

Exercice 4 En utilisant $\vdash_{DN_{\text{prop}}}$, montr r l s propriétés suivant s :

1. $\vdash (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to (\mathbf{q} \vee \mathbf{p})$
2. $\vdash (\mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r})) \to (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{p} \vee \mathbf{r})$
3. $\vdash ((\mathbf{p} \to \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{p} \to \neg\mathbf{q})) \to \neg\mathbf{p}$
4. $\vdash \neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to (\neg\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{q})$
5. $\vdash \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \to (\neg\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{q})$

Équi alence entre déduction naturelle et système de Hilbert

Dans l' x rcic suivant, on considèr l' ns mbl d formul s $\mathbf{F}_{\neg,\vee}$ t l s systèm s $_{\neg,\vee}$ t $_{prop}$ où :

- $\mathbf{F}_{\neg,\vee}$ st l' ns mbl d s formul s propositionn ll s construit s à partir d s s uls conn ct urs $\neg$ t $\vee$.
- $_{\neg,\vee}$ st un sous-systèm d $_{prop}$ pour l' ns mbl $\mathbf{F}_{\neg,\vee}$.

Exercice 5

1. Donn z un dérivation du séqu nt $\mathbf{p} \vee \mathbf{q} \vdash_{DN_{\neg;\vee}} \mathbf{q} \vee \mathbf{p}$.
2. Transform z c tt dérivation n un dérivation dans l systèm $_{prop}$.
3. Donn z un dérivation du séqu nt $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \vee \mathbf{r} \vdash_{DN_{\neg;\vee}} \mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \vee \mathbf{r})$.
4. Transform z c tt dérivation n un dérivation dans l systèm $_{prop}$.
5. Montr z qu pour tout formul $\in \mathbf{F}_{\neg,\vee}$ t tout ns mbl fini Δ d formul s d $\mathbf{F}_{\neg,\vee}$: si $\Delta \vdash_{DN_{\neg;\vee}}$, alors $\Delta \vdash_{H_{prop}}$.
6. Donn z un dérivation du séqu nt $\vdash_{DN_{\neg;\vee}} \neg\mathbf{p} \vee \mathbf{p}$.
7. (*À faire chez vous*) Montr z l'équival nc d s systèm s $_{prop}$ t $_{prop}$, *i.e.* montr z qu pour tout formul t tout ns mbl d formul Δ, on a :
   - si $\Delta \vdash_{DN_{prop}}$, alors $\Delta \vdash_{H_{prop}}$.
   - si $\Delta \vdash_{H_{prop}}$, alors $\Delta \vdash_{DN_{prop}}$.