

TD de Logique n° 4

Dédution Naturelle

Dédution Naturelle

Exercice 1 En utilisant $\vdash_{DN_{prop}}$, montr z l s propriétés suivant s :

1. $\vdash (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{q} \vee \mathbf{p})$
2. (*À faire chez vous*) $\vdash (\mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r})) \rightarrow (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{p} \vee \mathbf{r})$
3. (*À faire chez vous*) $\vdash ((\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{p} \rightarrow \neg \mathbf{q})) \rightarrow \neg \mathbf{p}$
4. $\vdash \neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow (\neg \mathbf{p} \wedge \neg \mathbf{q})$
5. $\vdash (\neg \mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$
6. $\vdash (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \rightarrow (\neg \mathbf{p} \vee \mathbf{q})$ (*On pourra s'aider du tiers exclus, vu en cours*)
7. (*À faire chez vous*) $\vdash \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \rightarrow (\neg \mathbf{p} \vee \neg \mathbf{q})$

Équivalence entre déduction naturelle et système de Hilbert

Notons $\mathbf{F}_{\neg, \vee}$ l' ns mbl d s formul s propositionnelles construit s à partir d s suls connect urs \neg t \vee t $DN_{\neg, \vee}$ l sous-système d DN_{prop} pour l' ns mbl $\mathbf{F}_{\neg, \vee}$.

On va travailler dans c tt parti sur $DN_{\neg, \vee}$ t H_{prop} .

Exercice 2

1. Donn z un dérivation du séquent $\mathbf{p} \vee \mathbf{q} \vdash_{DN_{\neg, \vee}} \mathbf{q} \vee \mathbf{p}$.
2. Transform z c tt dérivation n un dérivation dans l système H_{prop} .
3. (*À faire chez vous*) Donn z un dérivation du séquent $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \vee \mathbf{r} \vdash_{DN_{\neg, \vee}} \mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \vee \mathbf{r})$.
4. (*À faire chez vous*) Transform z c tt dérivation n un dérivation dans l système H_{prop} .
5. Montr z qu pour tout formul $\mathbf{A} \in \mathbf{F}_{\neg, \vee}$ t tout ns mbl fini Δ d formul s d $\mathbf{F}_{\neg, \vee}$:
si $\Delta \vdash_{DN_{\neg, \vee}} \mathbf{A}$, alors $\Delta \vdash_{H_{prop}} \mathbf{A}$.
6. (*À faire chez vous*) Donn z un dérivation du séquent $\vdash_{DN_{\neg, \vee}} \neg \mathbf{p} \vee \mathbf{p}$.
7. (*À faire chez vous*) Montr z l'équivalence d s systèmes DN_{prop} t H_{prop} , i.e. montr z qu pour tout formul \mathbf{A} t tout ns mbl d formul Δ , on a :
 - si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} \mathbf{A}$, alors $\Delta \vdash_{H_{prop}} \mathbf{A}$.
 - si $\Delta \vdash_{H_{prop}} \mathbf{A}$, alors $\Delta \vdash_{DN_{prop}} \mathbf{A}$.