# La résolution

## Résolution

Méthode par réfutation :

Le séquent $\Delta \quad A$ est valide ssi $\Delta \quad \{\neg A\}$ est insatisfaisable ssi en appliquant la méthode de résolution à $\Delta \quad \{\neg A\}$ on obtient une contradiction (réfutation).



## Résolution

- Forme prénexe
- Skolemisation
- Forme clausale
- Règles de résolution
- Correction et complétude



## Quelques équivalences logiques (rappel)

$$
\begin{array}{lcl}
x.\ A & \equiv & \neg \quad x.\ \neg A \\
\neg \quad x.\ A & \equiv & x.\ \neg A \\
x.\ A & \equiv & \neg \quad x.\ \neg A \\
\neg \quad x.\ A & \equiv & x.\ \neg A \\
x.\ (A \quad B) & \equiv & x.\ A \quad x.\ B \\
x.\ (A \quad B) & \equiv & x.\ A \quad x.\ B \\
x.\ (A \rightarrow B) & \equiv & x.\ A \rightarrow \quad x.\ B \\
x. \quad y.\ A & \equiv & y. \quad x.\ A \\
x. \quad y.\ A & \equiv & y. \quad x.\ A
\end{array}
$$

## D'autres exemples d'équivalence lorsque $x \ / \ Vl(A)$

$$
\begin{array}{lcl}
x.\ A & \equiv & x.\ A \quad \equiv A \\
x.\ (A \quad B) & \equiv & A \quad x.\ B \\
x.\ (A \quad B) & \equiv & A \quad x.\ B \\
x.\ (A \quad B) & \equiv & A \quad x.\ B \\
x.\ (A \quad B) & \equiv & A \quad x.\ B \\
x.\ (A \to B) & \equiv & A \to \quad x.\ B \\
x.\ (A \to B) & \equiv & A \to \quad x.\ B \\
x.\ (B \to A) & \equiv & x.\ B \to A \\
x.\ (B \to A) & \equiv & x.\ B \to A
\end{array}
$$



## Forme prénexe

**Définition :** Une formule $G$ est dite en forme prénexe ssi elle est de la forme $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n\ A$, où chaque $Q_i$ est un quantificateur ou et $A$ ne contient pas de quantificateur.

**Théorème :** Pour toute formule $G$ il existe une forme $G$ en forme prénexe t.q $G \equiv G$.



## Exemples

$$
\begin{array}{lcl}
(\ x\ p(x)) \quad r(x) & \equiv & y\ (p(y) \quad r(x)) \\
(\ x\ p(x)) \quad (\ x\ r(x)) & \equiv & x \quad y\ (p(x) \quad r(y)) \\
(\ x\ p(x)) \to (\ y\ r(y)) & \equiv & x \quad y\ (p(x) \to r(y)) \\
\neg[(\ x\ p(x)) \to (\ y\ r(y))] & \equiv & x \quad y\ \neg(p(x) \to r(y))
\end{array}
$$



## Skolemisation partielle

**Définition :** Soit $G$ une formule prénexe de la forme $x_1 \ldots \ x_n \ x_{n+1} Q_{n+2} x_{n+2} Q_{n+i} x_{n+i}\ A$. Soit $f$ un nouveau symbole de fonction $n$-aire. La formule $x_1 \ldots \ x_n Q_{n+2} x_{n+2} Q_{n+i} x_{n+i}\ A\{x_{n+1} / f(x_1, \ldots, x_n)\}$ est la skolemisation partielle de $G$.

**Lemme :** Soit $G$ une formule prénexe et soit $G$ sa skolemisation partielle. Alors $G$ est satisfaisable ssi $G$ est satisfaisable.

## Exemples

$G$ est la skolemisation partielle de $G$.

| $G$ | $G$ |
|---|---|
| $x \quad y \quad z \; r(x, z)$ | $x \quad y \; r(x, f(x, y))$ |
| $x \quad z \quad y \quad w \quad w \;\; s(w, x, h(z))$ | $x \quad y \quad w \quad w \;\; s(w, x, h(g(x)))$ |
| $x \quad z \quad y \; s(x, x, z)$ | $z \quad y \; s(a, a, z)$ |



## Skolemisation

**Définition :** Soit $G$ une formule prénexe ayant $n$ quantificateurs . La Skolemisation de $G$ est la formule obtenue par $n$ applications successives de la skolemisation partielle.

**Théorème :** Soit $G$ la Skolemisation de la formule $G$. Alors

- Si $G$ contient $n$ quantificateurs , $G$ contient au plus $n$ nouveau symboles de fonction.
- $G$ ne contient pas de quantificateurs .
- $G$ est satisfaisable ssi $G$ est satisfaisable.



## Exemples

$G$ est la Skolemisation de $G$.

| $G$ | $G$ |
|---|---|
| $x \quad y \quad z \; r(x, z)$ | $x \quad y \; r(x, f(x, y))$ |
| $x \quad z \quad y \quad w \quad w \;\; s(w, x, h(z))$ | $x \quad y \; s(i(x, y), x, h(g(x)))$ |
| $x \quad z \quad y \; s(x, x, z)$ | $y \; s(a, a, b)$ |



## Forme normal conjonctive

**Définition :**

- Un littéral est une formule de la forme $r(t_1, \ldots, t_n)$ ou $\neg r(t_1, \ldots, t_n)$.
- Une clause est une formule de la forme $L_1 \quad \ldots \quad L_q$, $q \geq 0$, où chaque $L_i$ est un littéral. La clause vide s'écrit .
- Une formule est en forme normal conjonctive (FNC) ssi elle est de la forme $C_1 \quad \ldots \quad C_n$, $n \geq 0$, où chaque $C_i$ est une clause. La FNC vide s'écrit .

## Exemples

 est une FNC.  est une FNC.

$\neg p(h(x))$ est une FNC.

$\neg p(h(x)) \quad p(y)$ est une FNC.

$(\neg p(h(x)) \quad p(y)) \quad p(z)$ est une FNC.

$(\neg p(h(x)) \quad p(y)) \quad (p(z) \quad \neg p(h(x)))$ est une FNC.

$\neg(p(x) \quad \neg p(z))$ n'est pas une FNC.

$p(x) \quad (\neg p(z) \rightarrow p(h(z)))$ n'est pas une FNC.

$p(x) \quad (\neg p(z) \quad p(h(z)))$ n'est pas une FNC.



## Existence de la FNC

**Théorème :** Pour toute formule $A$, il existe une formule $A$  en FNC telle que $A \; \equiv A$.

**Preuve :** Utiliser les équivalences suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| $A \rightarrow B$ | $\equiv$ | $\neg A \quad B$ |
| $\neg\neg A$ | $\equiv$ | $A$ |
| $\neg(A \quad B)$ | $\equiv$ | $\neg A \quad \neg B$ |
| $\neg(A \quad B)$ | $\equiv$ | $\neg A \quad \neg B$ |
| $A \quad (B \quad C)$ | $\equiv$ | $(A \quad B) \quad (A \quad C)$ |



## Unicité

La FNC d'une formule n'est pas unique.

Exemple :

$p \quad \neg p \equiv p \quad p \quad \neg p \equiv \quad .$

Donc,

$p \quad \neg p$, $p \quad p \quad \neg p$ et  sont trois FNC de la formule $p \quad \neg p$.



## Vers la mise sous forme clausale

**Lemme :** Soit $\Delta = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un ensemble de formules

## Mise sous forme clausale

**Théorème :** Pour toute formule $G$ il existe un ensemble de clauses $C_G$ t.q

- $VI(C_1) \cap VI(C_2) = \quad$ si $C_1, C_2 \quad C_G$ et $C_1 = C_2$
- $G$ est satisfaisable ssi $C_G$ est satisfaisable.

**Preuve :**

1. Utiliser l'équivalence $A \rightarrow B \equiv \neg A \quad B$ pour éliminer les implications de $G$. On obtient une formule $G_1 \equiv G$.
2. Calculer $G_2$ la forme prénexe de $G_1$. On a $G_2 \equiv G_1$.
3. Calculer $G_3 = \quad x_1 \ \dots \quad x_m \ A$ $(m \geq 0)$ la Skolemisation de $G_2$.
   On a $G_3$ satis. ssi $G_2$ satis.



4. Calculer la forme normal conjonctive de $A$. On obtient $G_4 = \quad x_1 \ \dots \quad x_m \ (C_1 \quad \dots \quad C_n)$ $(m \geq 0, n \geq 0)$. On a $G_4 \equiv G_3$.
5. Donner comme résultat $C_G = \{C_1, \dots, C_n\}$ qui est un renommage de $\{C_1, \dots, C_n\}$ afin d'eviter les variables communes. On a $G$ est satisfaisable ssi $C_G$ est satisfaisable.



## Exemple

$G = \neg[[Q(a) \quad ( \quad x \ Q(x) \rightarrow Q(f(x)))] \rightarrow \quad z \ Q(f(f(z)))]$

1. $G_1 = \neg[\neg[Q(a) \quad ( \quad x \ (\neg Q(x) \quad Q(f(x))))] \quad z \ Q(f(f(z)))]$.
2. $G_2 = \quad z \quad x \ \neg[\neg[Q(a) \quad (\neg Q(x) \quad Q(f(x)))] \quad Q(f(f(z)))]$.
3. $G_3 = G_2$.
4. $G_4 = \quad z \quad x \ [[Q(a) \quad (\neg Q(x) \quad Q(f(x)))] \quad \neg Q(f(f(z)))]$.
5. $C_G = \{Q(a), \neg Q(x) \quad Q(f(x)), \neg Q(f(f(z)))\}$.



## Exemple

$G = ( \quad y \ r(x,y) \quad z \ q(z,z)) \quad (\neg \quad x \ p(x))$.

1. $G_1 = G$.
2. $G_2 = \quad x \quad y \quad z \ (r(x,y) \quad q(z,z)) \quad (\neg p(x))$.
3. $G_3 = \quad z \ (r(x,b) \quad q(z,z)) \quad (\neg p(a))$.
4. $G_4 = G_3$.
5. $C_G = \{r(x,b) \quad q(z,z)), \neg p(a)\}$.

## Résolution

Axiomes : aucun

Règles d'inférence :

$$\frac{D \quad r(s_1,\ldots,s_n) \qquad C \quad \neg r(t_1,\ldots,t_n)}{\sigma(D \quad C)}\ (coupure)$$

où $\sigma$ est l'unificateur principal du problème $\{s_1 \doteq t_1,\ldots,s_n \doteq t_n\}$



$$\frac{D \quad L \quad L}{\sigma(D \quad L)}\ (factorisation)$$

où

- $L = r(s_1,\ldots,s_n)$ (resp. $L = \neg r(s_1,\ldots,s_n)$) et
  $L \ = r(t_1,\ldots,t_n)$ (resp. $L \ = \neg r(t_1,\ldots,t_n)$)
- $\sigma$ est l'unificateur principal du problème $\{s_1 \doteq t_1,\ldots,s_n \doteq t_n\}$



**Rappel :** Le cas particulier de la règle coupure lorsque $r(s_1,\ldots,s_n)$ et $r(t_1,\ldots,t_n)$ sont unifiables :

$$\frac{r(s_1,\ldots,s_n) \qquad \neg r(t_1,\ldots,t_n)}{}$$

**Notation :** Comme dans le cas propositionnel, on écrit $\Delta \quad _R A$ si $A$ est dérivée à partir de l'ensemble $\Delta$ par résolution et $\Delta \quad _R \quad$ si est dérivée à partir de l'ensemble $\Delta$ par résolution.



## Notion de réfutation

Un ensemble de formules est réfutable ssi en lui appliquant la méthode de résolution on obtient .

## Exemple I

Montrer que l'ensemble suivant est contradictoire.

$H_1$ : $\quad x_0\ t(x_0)$

$H_2$ : $\quad x_2\ (d(x_2) \rightarrow \quad x_1 r(x_1, x_2))$

$H_3$ : $\quad x_3\ \ x_4\ \neg(t(x_3) \rightarrow \neg q(x_4)) \rightarrow \neg r(x_3, x_4)$

$H_4$ : $\neg \quad x_5\ (\neg d(x_5) \quad \neg q(x_5))$

D'abord, on donne un ensemble de clauses $C$ équivalent à $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$.

$C = \{t(a), \neg d(x_2) \quad r(x_1, x_2), \neg t(x_3) \quad \neg q(x_4) \quad \neg r(x_3, x_4), d(b), q(b)\}$



r soluatio.e

Puis on donne une réfutation de l'ensemble $C$

e

e

e

## Exemple II

Montrer que la formule $J_4$ est conséquence logique de la formule $J_1 \quad J_2 \quad J_3$.

$J_1$ : $\quad x_0\ t(x_0)$

$J_2$ : $\quad x_2\ (d(x_2) \rightarrow \quad x_1 r(x_1, x_2))$

$J_3$ : $\quad x_3\ \ x_4\ \neg(t(x_3) \rightarrow \neg q(x_4)) \rightarrow \neg r(x_3, x_4)$

$J_4$ : $\quad x_5\ (\neg d(x_5) \quad \neg q(x_5))$

D'abord on utilise le fait que $J_1 \quad J_2 \quad J_3 \models J_4$ ssi $J_1 \quad J_2 \quad J_3, \neg J_4$ est réfutable. Ceci car les formules n'ont pas de variables libres.

On donne donc un ensemble de clauses $C$ équivalent à $\{J_1 \quad J_2 \quad J_3, \neg J_4\}$.



$C = \{t(a), \neg d(x_2) \quad r(x_1, x_2), \neg t(x_3) \quad \neg q(x_4) \quad \neg r(x_3, x_4), d(b), q(b)\}$

On donne une réfutation de l'ensemble $C$ par la méthode de résolution.

$$\dfrac{d(b) \qquad \dfrac{\neg d(x_2) \quad r(x_1, x_2) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg t(x_3) \quad \neg q(x_4) \quad \neg r(x_3, x_4) \qquad t(a)}{\neg q(x_4) \quad \neg r(a, x_4)} \qquad q(b)}{\neg r(a, b)}}{\neg d(b)}}{}$$

## Exemple III

Montrer que la formule $J$ : $\ xp(x) \quad y\neg p(y)$ est valide.

D'abord on utilise le fait que $J$ est valide ssi $\neg J$ est réfutable.

On donne donc un ensemble de clauses $C$ équivalent à $\{\neg J\}$.

$$C = \{\neg p(a), p(y)\}$$

On donne une réfutation de l'ensemble $C$ par la méthode de résolution.

$$\frac{\neg p(a) \quad p(y)}{\ }$$



## Propriétés de la résolution

**Théorème :** La résolution est correcte, i.e., si $\Delta \quad_R A$, alors le séquent $\Delta \quad A$ est valide et si $\Delta \quad_R \quad$, alors $\Delta$ est insatisfaisable.

**Théorème :** La résolution est complète, i.e., si le séquent $\Delta \quad A$ est valide, alors $\Delta \quad_R A$ et si $\Delta$ est insatisfaisable, alors $\Delta \quad_R \quad$.



## Vers la complétude de la résolution

Soit $\Sigma$ une signature contenant au moins une constante.

**Définition :**

- L'univers d'Herbrand de $\Sigma$ est l'ensemble des termes clos sur $\Sigma$.
- La base d'Herbrand est l'ensemble d'atomes clos sur $\Sigma$.
- Une interprétation de Herbrand de $\Sigma$ est une interprétation t.q.
  - Son domaine est l'univers d'Herbrand
  - Pour chaque $f \quad \Sigma_F$ d'arité $n$, $I(f)(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$
  - Pour chaque $p \quad \Sigma_P$ d'arité $n$, on se donne un sous-ensemble $S_p$ de la base de Herbrand t.q. $I(p)(t_1, \ldots, t_n) = \mathbf{V}$ ssi $p(t_1, \ldots, t_n) \quad S_p$.



## Lemmes pour le Théorème de Herbrand

**Lemme :** Soit $t$ un terme dont les variables libres appartiennent à $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Soit $I$ une interprétation ayant $D$ comme domaine et $\sigma$ une valuation dans le domaine $D$. Soit la substitution $\tau = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ et soient $d_1 \ldots d_n$ t.q. $[t_i]_{I,\sigma} = d_i$. Alors $[t]_{I,\sigma[x_1:=d_1]\ldots[x_n:=d_n]} = [\tau(t)]_{I,\sigma}$.

**Lemme :** Soit $G$ une formule dont les variables libres appartiennent à $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Soit $I$ une interprétation ayant $D$ comme domaine et $\sigma$ une valuation dans le domaine $D$. Soit la substitution $\tau = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ et soient $d_1 \ldots d_n$ t.q. $[t_i]_{I,\sigma} = d_i$. Alors $[G]_{I,\sigma[x_1:=d_1]\ldots[x_n:=d_n]} = [\tau(G)]_{I,\sigma}$.

**Exercice :** Soit $G = r(x_1, x_2)$ et $\tau = \{x_1/a, x_2/s(a)\}$. Soit $I(r)(n,m) = \mathbf{V}$ ssi $n < m$, $I(a) = 0$ et $I(s)(n) = n+1$. Vérifier le résultat précédent.



## Théorème de Herbrand

**Théorème :** Un ensemble de clauses $C$ admet un modèle ssi il existe une interprétation $I_H$ de Herbrand t.q. $I_H$ est un modèle de $C$.

**Preuve :** Si il existe une interprétation de Herbrand qui est un modèle de $C$, alors $C$ admet un modèle.

Soit $C$ un ensemble de clauses qui admet un modèle. Alors il existe une interprétation $I$ qui est un modèle de $C$. On va montrer qu'il existe une interprétation $I_H$ de Herbrand qui est un modèle de $C$.

En effet, pour chaque symbole de prédicat $p$, on construit $I_H(p)$ comme suit :



$I_H(p)(t_1, \ldots, t_n) = \mathbf{V}$ ssi $I$ est un modèle de la formule $p(t_1, \ldots, t_n)$

Soit une clause quelconque $E = \ \ x_1 \ldots \ \ x_n(A_1 \quad \ldots \quad A_k)$ où chaque $A_i$ est un littéral. On veut montrer que $I_H$ est un modèle de $E$.

Par hypothèse $[E]_{I,\sigma} = \mathbf{V}$ pour tout $\sigma$

ssi

(1) $[(A_1 \quad \ldots \quad A_k)]_{I,\sigma[x_1:=a_1]\ldots[x_n:=a_n]} = \mathbf{V}$ pour tout $\sigma, a_1, \ldots, a_n$

Soient $t_1, \ldots, t_n$ une suite de termes clos. (cette suite existe car l'univers de Herbrand n'est pas vide). Soient $d_i = [t_i]_{I,\sigma}$

(1) implique



(2) $[(A_1 \quad \ldots \quad A_k)]_{I,\sigma[x_1:=d_1]\ldots[x_n:=d_n]} = \mathbf{V}$ pour tout $\sigma$

implique

$[A_i]_{I,\sigma[x_1:=d_1]\ldots[x_n:=d_n]} = \mathbf{V}$ pour tout $\sigma$

ssi (lemme avec $\tau = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$)

(3) $[\tau(A_i)]_{I,\sigma} = \mathbf{V}$ pour tout $\sigma$

ssi

$I$ est un modèle de $\tau(A_i)$

ssi (def. Herbrand)

$I_H$ est un modèle de $\tau(A_i)$

ssi

$[\tau(A_i)]_{I_H,\sigma_H} = \mathbf{V}$ pour tout $\sigma_H$

implique

$[\tau(A_1 \quad \ldots \quad A_k)]_{I_H,\sigma_H} = \mathbf{V}$ pour tout $\sigma_H$

ssi (lemme, où $[t_i]_{I_H,\sigma_H} = t_i$)

$[A_1 \quad \ldots \quad A_k]_{I_H,\sigma_H}[x_1 := t_1]\ldots[x_n := t_n] = \mathbf{V}$ pour tout $\sigma_H$

ssi (les $t_i$ sont arbitraires)

$[\ \ x_1 \ldots \ \ x_n(A_1 \quad \ldots \quad A_k)]_{I_H,\sigma_H} = \mathbf{V}$ pour tout $\sigma_H$

ssi

$[E]_{I_H,\sigma_H} = \mathbf{V}$ pour tout $\sigma_H$

ssi $I_H$ est un modèle de $E$



## Arbres sémantiques complets

**Définition :** Soit $B_0, B_1, B_2, \ldots$ une énumération de tous les atomes clos d'une signature $\Sigma$. L'arbre sémantique complet associé à cette énumération est un arbre (binaire et équilibré) t.q.

- la racine est $B_0$
- chaque nœud $B_i$ possède un arc gauche $\mathbf{V}$ et un arc droit $\mathbf{F}$
- tous les successeurs de $B_i$ sont étiquetés par $B_{i+1}$

**Exercice :**

1. Construir un arbre sémantique complet $A_1$ pour l'énumération finie $q(a), q(b), r(a), r(b)$.
2. Construir un arbre sémantique complet $A_2$ pour l'énumération infinie $q(a), q(b), q(s(a)), q(s(b)), q(s(s(a))), q(s(s(b))), \ldots$.



## Nœud d'échec pour un ensemble de clauses

**Définition :** Soit $A$ un arbre sémantique complet et soit $C$ un ensemble de clauses. Un nœud $n$ de $A$ est dit nœud d'échec pour $C$ ssi le segment de la branche qui va de la racine de $A$ jusqu'à $n$ suffit à falsifier au moins une instance close d'une clause de $C$ et si aucun prédécesseur de $n$ n'est un nœud d'échec de $A$.

**Exercice :** Identifier dans les arbres $A_1$ et $A_2$ au moins un nœud d'échec pour l'ensemble de clauses $\{\neg r(x) \quad q(x), q(a), r(a)\}$.

**Exercice :** Si $\quad C$, qu'est-ce qu'on peut dire par rapport aux nœuds d'échec pour $C$ ?



## Arbres sémantiques partiels

**Définition :** Soit $A$ un arbre sémantique complet et soit $C$ un ensemble de clauses. Un arbre sémantique partielle associé à $C$ est un arbre obtenu à partir de $A$ en éliminant les sous-arbres issus des nœuds d'échec.

**Définition :** Un arbre sémantique partielle $A$ est clos s'il est fini et si toute feuille de $A$ est un nœud d'échec.

**Exercice :** Construire un arbre sémantique partielle clos associé à $C = \{\neg r(x) \quad q(s(x)), r(a), \neg q(s(a))\}$.

## Corollaire du théorème de Herbrand

**Théorème :** Soit $C$ un ensemble de clauses. Aucune interprétation de Herbrand ne satisfait $C$ ssi il existe un arbre sémantique partielle associé à $C$ qui est clos.

**Corollaire :** Un ensemble de clauses $C$ est insatisfaisable ssi il existe un arbre sémantique partielle associé à $C$ qui est clos.



## Complétude de la résolution

**Lemme :** Soient $C_1$ et $C_2$ deux clauses. Soient $C_1$ et $C_2$ deux instances de $C_1$ et $C_2$ respectivement. Soit $C_{res}$ la clause obtenue par appliquation d'un pas de résolution (coupure ou factorisation) à $C_1$ et $C_2$. Alors il existe une clause $C_{res}$ t.q.

- $C_{res}$ est une instance de $C_{res}$
- $C_{res}$ est obtenue par résolution à partir de $C_1$ et $C_2$.

**Théorème :** La résolution est complète, i.e., si $\Delta \quad G$ est valide, alors $\Delta \quad _R\, G$ et si $\Delta$ est insatisfaisable, alors $\Delta \quad _R$ .