Le calcul des prédicats

Le calcul des prédicats

- Syntaxe
- Formalisation du langage naturel
- Sémantique
- Systèmes de preuves syntaxiques
  1. Deduction naturelle
  2. Calcul de Gentzen
  3. Résolution
     - ★ Théorie de l'unification
     - ★ Règles de résolution
     - ★ Propriétés de la résolution

Syntaxe: alphabet

- Les connecteurs $!$, $:$, ^, _
- Les quantificateurs 9, 8
- Un ensemble dénombrable X de variables $x, y, z, \ldots$
- Une signature contenant :
  - Un ensemble dénombrable de symboles de fonction $_F = ff, g, h, \ldots g$, chacun ayant une arité.
  - Un ensemble dénombrable de symboles de prédicat $_P = fp, q, r, \ldots g$, chacun ayant une arité.

On écrit f/n (ou p/n) pour dire que le symbole de fonction f (ou de prédicat p) est d'arité n.

Les termes

L'ensemble des termes par rapport à un ensemble de variable X et une signature est noté $T_{\Sigma,\mathcal{X}}$.

Définition :

- Chaque variable x dans X est un terme dans $T_{\Sigma,\mathcal{X}}$.
- Si $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes et f 2 $_F$ est un symbole de fonction d'arité n, alors $f(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme dans $T_{\Sigma,\mathcal{X}}$.

Un terme est clos s'il ne contient aucune variable.

Les atomes

L'ensemble des atomes sur un ensemble de variable X et une signature est noté $A_{\Sigma,\mathcal{X}}$.

Définition : Un atome est de la forme $p(t_1, \ldots, t_n)$, où p est un symbole de prédicat d'arité n et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes.

Exemple : Si $\Sigma_F = \{0/0, S/1\}$ et $\Sigma_P = \{inf/2\}$, alors 0 et $S(S(S(x)))$ sont des termes, 0 et $S(S(S(S(0))))$ sont des termes clos et $inf(0, S(S(S(x))))$ est un atome.

Les formules

L'ensemble des formules sur un ensemble de variable X et une signature est noté $F_{\Sigma,\mathcal{X}}$.

Définition :

- Chaque atome de $A_{\Sigma,\mathcal{X}}$ est une formule dans $F_{\Sigma,\mathcal{X}}$.
- Si A est dans $F_{\Sigma,\mathcal{X}}$, alors $\neg A$ est une formule dans $F_{\Sigma,\mathcal{X}}$.
- Si A et B sont dans $F_{\Sigma,\mathcal{X}}$, $(A \rightarrow B)$, $(A \wedge B)$, et $(A \vee B)$ sont des formules dans $F_{\Sigma,\mathcal{X}}$.
- Si A est dans $F_{\Sigma,\mathcal{X}}$ et x est une variable, alors $\forall x.\ (A)$ et $\exists x.\ (A)$ sont des formules dans $F_{\Sigma,\mathcal{X}}$.

Remarque :

- Nous omettons les parenthèses quand cela n'entraîne pas des ambiguités. Nous écrivons aussi $\forall x_1, \ldots, x_n.A$ pour $\forall x_1.\forall x_2. \quad \forall x_n.A$

Exemple : $\forall x.\ (enfant(x) \rightarrow \exists y.\ mere(y, x))$

Un cas particulier

Le calcul propositionnel peut se voir comme un calcul des prédicats sur une signature t.q.

- l'ensemble $_F$ est vide,
- l'ensemble $_P$ contient uniquement des prédicats 0-aires,
- les quantificateurs ne sont jamais utilisés.

Variables libres et liées

Les variables libres (VI) et liées (VE) d'une formule sont définies comme suit :

- Si A est un atome, $VI(A)$ contient toutes les variables de A, et $VE(A) = ;$.
- Si $A = :B$, $VI(A) = VI(B)$ et $VE(A) = VE(B)$.
- Si $A = B \# C$, $VI(A) = VI(B) [VI(C)$ et $VE(A) = VE(B) [VE(C)$.
- Si $A = 8x.\ B$ ou $A = 9x.\ B$, $VI(A) = VI(B)\ n\ fxg$ et $VE(A) = VE(B) [fxg$.

Variables libres et liées

Exemple : Si $A = 8x.\ q(x, f(x, y))$ on a $VI(A) = fyg$ et $VE(A) = fxg$.
Si $B = r(x) \_\ 8x.\ q(x, f(x, y))$ on a $VI(B) = fx, yg$ et $VE(B) = fxg$.

Remarque : On suppose que l'on peut toujours renommer les variables liées d'une formule afin de l'écrire sous une forme rectifiée :

- toutes les variables liées d'une formule sont distinctes. On ne peut pas avoir p.e. $8x.\ 9x.\ A$.
- les variables libres et liées d'une formule A portent des noms distincts, i.e. $VI(A) \setminus VE(A) = ;$. On ne peut plus écrire la formule B précédante.

Définition : La clotûre universelle d'une formule A est donnée par $8x_1, \ldots, x_n.A$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont les variables libres de A.

Exemple de renommage

La formule $8x\ 9y\ p(x, y)$ peut se renommer en $8z\ 9y\ p(z, y)$ $8x\ 9z\ p(x, z)$ ou $8z\ 9w\ p(z, w)$.
La formule $(8x\ p(x))\ \_\ p(x)$ peut se renommer en $(8z\ p(z))\ \_\ p(x)$.
La formule $8x\ 9x\ p(x)$ peut se renommer en $8y\ 9x\ p(x)$ ou $8x\ 9y\ p(y)$ (mais pas en $8y\ 9x\ p(y)$!!!).

À partir de maintenant on peut assumer qu'une formule est rectifiée si cela est nécessaire. On verra dans la suite (ou en TD) que cette supposition est correcte.

Les substitutions

Définition :

- Une substitution est une fonction $\sigma : X \to T_{\Sigma,\mathcal{X}}$. On note $\{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\}$ si $\sigma(x_i) = t_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ et $\sigma(x) = x$ sinon.
- L'application d'une substitution à un terme est l'extension de σ aux termes donnée par $\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$.
- Soient σ et τ deux substitutions. La composition de σ avec τ est donnée par $\sigma \circ \tau(x) = \sigma(\tau(x))$.
- Si σ est une substitution, alors la substitution $\sigma[x := t]$ est donnée par $\sigma[x := t](y) = \sigma(y)$ si $y \neq x$ et $\sigma[x := t](x) = t$ sinon.

Substitution d'une formule

Soit une signature et X un ensemble de variables.

Définition : Soit $\sigma = \{x_1 \quad t_1, \ldots, x_n \quad t_n\}$ une substitution. La substitution d'une formule A par σ est l'opération qui consiste à remplacer toute occurrence libre de x_i dans A par t_i. Par récurrence sur A :

- $\sigma(r(t'_1, \ldots, t'_n)) = r(\sigma(t'_1), \ldots, \sigma(t'_n))$
- $\sigma(\neg B) = \neg\sigma(B)$ et $\sigma(B \# C) = \sigma(B) \# \sigma(C)$
- $A = \forall x.\ B$, où l'on suppose (grâce au renommage) $x \notin VI(t_i)$ et $x \neq x_i$ pour $i = 1 \ldots n$. Alors $\sigma(\forall x.\ B) = \forall x.\ \sigma(B)$.
- Pareil pour $\sigma(\exists x.\ B)$

Formalisation du langage naturel

- Tous les humains sont méchants.

$$8x.\ (H(x)\ \ !\ \ M(x))$$

- Que veut dire

$$8x.\ (H(x) \,\hat{}\, M(x))$$

- Seulement les humains sont méchants.

$$8x.\ (M(x)\ \ !\ \ H(x))$$

- Il existe un humain méchant.

$$9x.\ (H(x) \,\hat{}\, M(x))$$

- Il n'existe pas d'humain méchant.

$$\neg \exists x.\, (H(x) \wedge M(x))$$

- Il existe un humain qui aime tous les chats.
  $\exists x.\, (H(x) \wedge \mathit{Aimetousleschats}(x))$
  $\mathit{Aimetousleschats}(x) \quad \forall y.\, (\mathit{Chat}(y) \rightarrow \mathit{Aime}(x, y))$
- Chaque humain sait qui le déteste.

$$\forall x.\, (H(x) \rightarrow \mathit{Connaitdeteste}(x))$$

$$\mathit{Connaitdeteste}(x) \quad \forall y.\, (D(y, x) \rightarrow C(x, y))$$

- Chaque personne aime quelqu'un et personne n'aime tout le monde ou bien quelqu'un aime tout le monde et quelqu'un n'aime personne.

$$
\begin{array}{l}
(A_1 \wedge B_1) \vee (A_2 \wedge B_2) \\
aimetoutlemonde(x) \quad \forall y.\ Aime(x,y) \\
aimepersonne(x) \quad \forall y.\ \neg Aime(x,y)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
A_1 & \forall x.\ (H(x) \rightarrow \exists y.\ Aime(x,y)) \\
B_1 & \neg \exists x.\ (H(x) \wedge aimetoutlemonde(x)) \\
A_2 & \exists x.\ (H(x) \wedge aimetoutlemonde(x)) \\
B_2 & \exists x.\ (H(x) \wedge aimepersonne(x))
\end{array}
$$

Sémantique du calcul des prédicats

Définition : L'interprétation I d'une signature est un triplet $hD, F_{\mathcal{D}}, P_{\mathcal{D}} i$ t.q.

- Le domaine D est non vide.
- Pour chaque $f\ 2\ \ _F$ d'arité n, il y a une fonction totale $I(f) : D^n\ \ !\ \ D$ dans $F_{\mathcal{D}}$.

  Remarque : Lorsque le symbole de fonction f est 0-aire (d'arité 0), alors $I(f)$ est une fonction constante.
- Pour chaque $p\ 2\ \ _P$ d'arité n, il y a une relation $I(p)\ \ \ D^n$ dans $P_{\mathcal{D}}$. Cette relation peut aussi se voir comme fonction booléene totale $I(p) : D^n\ \ !$ **BOOL**.

  Remarque : Lorsque le symbole de prédicat p est 0-aire (d'arité 0), alors $I(p)$ est **V** ou **F**.

Les valuations

Définition : Soit I une interprétation pour ayant D comme domaine et soit X un ensemble de variables. Une assignation ou valuation dans I est une fonction $\sigma : X \to D$.

Notation : Si σ est une assignation, alors l'assignation $\sigma[x := d]$ vérifie $\sigma[x := d](y) = \sigma(y)$ si $y \neq x$ et $\sigma[x := d](x) = d$ sinon.

Valeur d'un terme

Définition : Soit I une interprétation de domaine D et soit σ une assignation dans I. Alors la valeur d'un terme dans I pour σ est une fonction $[\_]_{\mathcal{I},\sigma} : T_{\Sigma,\mathcal{X}} \mapsto D$ définie par récurrence comme suit :

- $[x]_{\mathcal{I},\sigma} = \sigma(x)$
- $[f(t_1, \ldots, t_n)]_{\mathcal{I},\sigma} = I(f)([t_1]_{\mathcal{I},\sigma} \ldots [t_n]_{\mathcal{I},\sigma})$

Des opérations sur l'ensemble BOOL

On définit sur l'ensemble $\mathbf{BOOL} = f\mathbf{F}, \mathbf{V}g$ les opérations suivantes:

$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{V} + \mathbf{V} & := & \mathbf{V} \\
\mathbf{V} + \mathbf{F} & := & \mathbf{V} \\
\mathbf{F} + \mathbf{V} & := & \mathbf{V} \\
\mathbf{F} + \mathbf{F} & := & \mathbf{F}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lll}
\mathbf{V} \quad \mathbf{V} & := & \mathbf{V} \\
\mathbf{V} \quad \mathbf{F} & := & \mathbf{F} \\
\mathbf{F} \quad \mathbf{V} & := & \mathbf{F} \\
\mathbf{F} \quad \mathbf{F} & := & \mathbf{F}
\end{array}
$$

Valeur d'une formule

Définition : Soit I une interprétation de domaine D et soit σ une assignation dans I. La valeur d'une formule dans I pour σ est une opération $[\_]_{\mathcal{I},\sigma} : F_{\Sigma,\mathcal{X}}$ 7! **BOOL** définie par récurrence comme suit :

- $[p(t_1, \ldots, t_n)]_{\mathcal{I},\sigma} = I(p)([t_1]_{\mathcal{I},\sigma} \ldots [t_n]_{\mathcal{I},\sigma})$
- $[: A]_{\mathcal{I},\sigma} = FB_{\neg}([A]_{\mathcal{I},\sigma})$
- $[A \# B]_{\mathcal{I},\sigma} = FB_{\#}([A]_{\mathcal{I},\sigma}, [B]_{\mathcal{I},\sigma})$
- $[9x.\ A]_{\mathcal{I},\sigma} = \quad {}_{d \in \mathcal{D}}[A]_{\mathcal{I},\sigma[x:=d]}$ (somme)
- $[8x.\ A]_{\mathcal{I},\sigma} = \quad {}_{d \in \mathcal{D}}[A]_{\mathcal{I},\sigma[x:=d]}$ (produit)

Exemple

Soit $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $I_F(c) = \{1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 4, 4 \mapsto 5, 5 \mapsto 1\}$,
$I_F(b) = 2$, $I_P(p) = \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5)\}$, $I_P(q) = D$ et
$I_P(r) = \{(2, 2)\}$.
Interpréter les formules suivantes :
$(\forall x\, \forall y\; r(x, y) \wedge (\exists z\; r(z, z)))$
$(\exists x\; p(x, x, x)) \vee (\forall y\, \forall z\; r(y, z))$
$(\forall x\, \forall y\; r(b, b)) \rightarrow r(b, c(b))$
$\forall x\; (q(x) \rightarrow r(x, x))$
$\exists x\; \neg(q(x) \wedge r(x, x))$

Nouvelles notions de satisfiabilité

Définition :

- I satisfait une formule B s'il existe une valuation σ dans I t.q. $[B]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$.
- Une formule B est satisfaisable s'il existe I qui satisfait B.

On verra plus tard que pour étudier la satisfiablité d'une formule on peut se limiter à des interprétations d'une forme particulière.

Modèle et validité

Définition :

- L' interprétation *I* est un modèle d'une formule B ssi $[B]_{\mathcal{I},\sigma}$ = **V** pour toute valuation σ dans *I*.
- L' interprétation *I* est un modèle d'un ensemble de formules ssi *I* est un modèle de toutes les formules de .
- La formule B est valide ssi toute interprétation *I* est un modèle de B.

Soit B' la clotûre universelle de B. Une interprétation *I* est un modèle pour une formule B ssi $[B']_{\mathcal{I},\sigma}$ = **V** pour n'importe quelle σ.

Conséquence logique

Définition :

- Une formule B est conséquence logique d'un ensemble de formules ,
  noté $j= B$, si pour toute interprétation I et toute valuation σ dans I on a: si pour toute formule A dans on a $[A]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$, alors cela implique $[B]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$.
- Deux formules A et B sont équivalentes, noté A B, ssi $f A g \, j= B$ et $f B g \, j= A$.

Quelques exemples de conséquence logique

$$
\begin{array}{lcl}
9y.\ 8x.\ A & j= & 8x.\ 9y.\ A \\
9x.\ (A \wedge B) & j= & 9x.\ A \wedge 9x.\ B \\
8x.\ A \_\ 8x.\ B & j= & 8x.\ (A \_\ B)
\end{array}
$$

Quelques exemples d'équivalence

$8x.\ A$	$:9x.\ :A$
$:8x.\ A$	$9x.\ :A$
$9x.\ A$	$:8x.\ :A$
$:9x.\ A$	$8x.\ :A$
$8x.\ (A \wedge B)$	$8x.\ A \wedge 8x.\ B$
$9x.\ (A \_ B)$	$9x.\ A \_ 9x.\ B$
$9x.\ (A\ !\ B)$	$(8x.\ A)\ !\ 9x.\ B$
$8x.\ 8y.\ A$	$8y.\ 8x.\ A$
$9x.\ 9y.\ A$	$9y.\ 9x.\ A$

D'autres exemples d'équivalence lorsque $x \notin VI(A)$

$\forall x.\, A$	$\exists x.\, A$	A
$\forall x.\, (A \wedge B)$	$A \wedge \forall x.\, B$	
$\exists x.\, (A \wedge B)$	$A \wedge \exists x.\, B$	
$\forall x.\, (A \vee B)$	$A \vee \forall x.\, B$	
$\exists x.\, (A \vee B)$	$A \vee \exists x.\, B$	
$\exists x.\, (A \rightarrow B)$	$A \rightarrow \exists x.\, B$	
$\forall x.\, (A \rightarrow B)$	$A \rightarrow \forall x.\, B$	
$\exists x.\, (B \rightarrow A)$	$\forall x.\, B \rightarrow A$	
$\forall x.\, (B \rightarrow A)$	$\exists x.\, B \rightarrow A$	

La deduction naturelle pour le calcul des prédicats

Système DN_{pred} : déduction naturelle pour le calcul des prédicats

Axiome : $, A \vdash A$

Règles d'inférence (Rappel) :

$$\frac{, A \vdash B}{\vdash A \rightarrow B}\ (\rightarrow i) \qquad \frac{\vdash A \qquad \vdash A \rightarrow B}{\vdash B}\ (\rightarrow e)$$

$$\frac{\vdash A \qquad \vdash B}{\vdash A \wedge B}\ (\wedge i)$$

$$\frac{\vdash A \wedge B}{\vdash A}\ (\wedge e) \qquad \frac{\vdash A \wedge B}{\vdash B}\ (\wedge e)$$

Système DN_{pred} : déduction naturelle pour le calcul des prédicats

$$\frac{\vdash A}{\vdash A \lor B}\,(\lor i) \qquad \frac{\vdash B}{\vdash A \lor B}\,(\lor i)$$

$$\frac{\vdash A \lor B \qquad , A \vdash C \qquad , B \vdash C}{\vdash C}\,(\lor e)$$

$$\frac{, A \vdash B \qquad , A \vdash \neg B}{\vdash \neg A}\,(\neg i)$$

$$\frac{\vdash A \qquad \vdash \neg A}{\vdash B}\,(\neg e) \qquad \frac{\vdash \neg\neg A}{\vdash A}\,(\neg e)$$

Système DN_{pred} : déduction naturelle pour le calcul des prédicats

$$\frac{\vdash \forall x.A}{\vdash \{x \quad t\}(A)}\ (\forall x\ e)$$

L'opération $\{x \quad t\}(A)$ ne capture pas des variables (aucune variable de t devient liée)

$$\frac{\vdash A}{\vdash \forall x.A}\ (\forall x\ i)$$

x n'est pas libre dans

Système DN_{pred} : déduction naturelle pour le calcul des prédicats

$$\frac{\Gamma \vdash \{x \mapsto t\}(A)}{\Gamma \vdash \exists x.A}\ (\exists x\ i)$$

L'opération $\{x \mapsto t\}(A)$ ne capture pas des variables (aucune variable de t devient liée)

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x.A \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ (\exists x\ e)$$

x n'est pas libre dans Γ et B

Examples de dérivations: au tableau

Propriétés du système DN_{pred} pour le calcul des prédicats

Définition : (Rappel) Un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash B$ est valide ssi sa formule associée $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$ est valide.

Théorème : Le système DN_{pred} est correct, i.e., si $\vdash_{DN_{pred}} A$, alors $\vdash A$ est valide.

Théorème : Le système DN_{pred} est complet, i.e., si $\vdash A$ est valide, alors $\vdash_{DN_{pred}} A$.

Le système de Gentzen pour le calcul des prédicats

Le système G pour le calcul des prédicats

Axiome : $, A \text{ ` } , A$ (A est une formule du calcul des prédicats)

Règles d'inférence logiques (rappel) :

$$\frac{\text{`} \quad , A}{, : A \ \text{`}} \ (: \ g) \qquad \frac{, A \ \text{`}}{\text{`} \quad , : A} \ (: \ d)$$

$$\frac{\text{`} \ A, \qquad , B \ \text{`}}{, A \ ! \ B \ \text{`}} \ ( ! \quad g) \qquad \frac{, A \ \text{`} \ B,}{\text{`} \ A \ ! \ B,} \ (! \quad d)$$

$$\frac{, A, B \ \text{`}}{, A \wedge B \ \text{`}} \ (\wedge \ g) \qquad \frac{\text{`} \ A, \qquad \text{`} \ B,}{\text{`} \ A \wedge B,} \ (\wedge \ d)$$

$$\frac{, A \ \text{`} \qquad , B \ \text{`}}{, A \_ \ B \ \text{`}} \ (\_ g) \qquad \frac{\text{`} \ A, B,}{\text{`} \ A \_ \ B,} \ (\_ d)$$

Le système G pour le calcul des prédicats

$$\frac{, \{x \quad t\}(A), \forall x.A \vdash}{, \forall x.A \vdash}\ (\forall\ g) \qquad \frac{\vdash A,}{\vdash \forall x.A,}\ (\forall\ d)$$

$$\frac{, A \vdash}{, \exists x.A \vdash}\ (\exists\ g) \qquad \frac{\vdash \{x \quad t\}(A), \exists x.A,}{\vdash \exists x.A,}\ (\exists\ d)$$

Dans les règles ($\forall$ d) et ($\exists$ g) x n'est pas libre dans et .
Dans les règles ($\forall$ g) et ($\exists$ d) l'opération $\{x \quad t\}(A)$ ne capture pas des variables (aucune variable de t devient liée)

Dérivation dans G

On note $\vdash_{\mathcal{G}}$ si le séquent $\vdash$ est dérivable dans le système G.

Premier exemple de dérivation dans G

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p(x) \vdash p(x), \exists y \neg p(y)}{\vdash p(x), \neg p(x), \exists y \neg p(y)}}{\vdash p(x), \exists y \neg p(y)}}{\vdash \forall x.p(x), \exists y \neg p(y)}}{\vdash (\forall x.p(x)) \vee (\exists y \neg p(y))}$$

Deuxième exemple de dérivation dans G

$$\dfrac{\dfrac{p(a) \vdash p(a), \exists x.p(x)}{p(a) \vdash \exists x.p(x)} \quad \dfrac{p(b) \vdash p(b), \exists x.p(x)}{p(b) \vdash \exists x.p(x)}}{p(a) \lor p(b) \vdash \exists x.p(x)}$$

Troisième exemple de dérivation dans G

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash p, \exists z.q(z) \qquad \dfrac{p, q(x) \vdash q(x), \exists z.q(z)}{p, q(x) \vdash \exists z.q(z)}}{p \rightarrow q(x), p \vdash \exists z.q(z)}}{p \rightarrow q(x) \vdash p \rightarrow \exists z.q(z)}}{\exists x.(p \rightarrow q(x)) \vdash p \rightarrow \exists z.q(z)}}{\vdash \exists x.(p \rightarrow q(x)) \rightarrow (p \rightarrow \exists z.q(z))}
$$

Quatrième exemple de dérivation dans G

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p(a), p(f(a)) \vdash p(f(a)), p(f(f(a))), \exists x.(p(x) \to p(f(x))}{p(a) \vdash p(f(a)), p(f(a)) \to p(f(f(a))), \exists x.(p(x) \to p(f(x))}}{p(a) \vdash p(f(a)), \exists x.(p(x) \to p(f(x))}}{\vdash p(a) \to p(f(a)), \exists x.(p(x) \to p(f(x)))}}{\vdash \exists x.(p(x) \to p(f(x)))}$$

Cinquième exemple de dérivation dans G

$$
\begin{array}{c}
p(x), p(y) \vdash p(y), p(y'), \exists x.\forall y.(p(x) \rightarrow p(y)) \\
\hline
p(x) \vdash p(y), p(y) \rightarrow p(y'), \exists x.\forall y.(p(x) \rightarrow p(y)) \\
\hline
p(x) \vdash p(y), \forall y'.(p(y) \rightarrow p(y')), \exists x.\forall y.(p(x) \rightarrow p(y)) \\
\hline
p(x) \vdash p(y), \exists x.\forall y.(p(x) \rightarrow p(y)) \\
\hline
\vdash p(x) \rightarrow p(y), \exists x.\forall y.(p(x) \rightarrow p(y)) \\
\hline
\vdash \forall y.(p(x) \rightarrow p(y)), \exists x.\forall y.(p(x) \rightarrow p(y)) \\
\hline
\vdash \exists x.\forall y.(p(x) \rightarrow p(y))
\end{array}
$$

Sixième exemple de dérivation dans G

Soit $A = 9x\ :(:p(x) \wedge :Q(x))$, $B = 8x\ p(x)$ et $C = 8x\ Q(x)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p(y), B, :q(y)\ `\ p(y), A}{p(y), B, :p(y), :q(y)\ `\ A}}{8x\ p(x), :p(y), :q(y)\ `\ A} \qquad \dfrac{\dfrac{q(y), C, :p(y)\ `\ q(y), A}{q(y), C, :p(y), :q(y)\ `\ A}}{8x\ q(x), :p(y), :q(y)\ `\ A}}{8x\ p(x) \_ 8x\ q(x), :p(y), :q(y)\ `\ A}}{8x\ p(x) \_ 8x\ q(x), :p(y) \wedge :q(y)\ `\ A}}{8x\ p(x) \_ 8x\ q(x)\ `\ :(:p(y) \wedge :q(y)), A}}{8x\ p(x) \_ 8x\ q(x)\ `\ 9x\ :(:p(x) \wedge :q(x))}$$

Remarques

- Retarder au maximum le choix des témoins (règles *8* g et *9* d).
- Renommer des variables (si nécessaire) pour éviter la capture de variables.

Comment transformer quelques dérivations dans G

Théorème : (Affaiblissement) Si $\Gamma \vdash \Delta$ est dérivable dans le système G, alors $\Gamma, A \vdash \Delta$ et $\Gamma \vdash A, \Delta$ le sont aussi.

Théorème : (Contraction) Si $\Gamma, A, A \vdash \Delta$ est dérivable dans le système G, alors $\Gamma, A \vdash \Delta$ l'est aussi. Si $\Gamma \vdash \Delta, A, A$ est dérivable dans le système G, alors $\Gamma \vdash \Delta, A$ l'est aussi.

Rappel

Définition : Un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$ est valide ssi sa formule associée $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow (B_1 \vee \ldots \vee B_m)$ est valide.

Propriétés du système G pour le calcul des prédicats

Théorème : Le système G est correct, i.e., si $\vdash_{\mathcal{G}}$, alors $\vdash$ est valide.

Théorème : Le système G est complet, i.e., si $\vdash$ est valide, alors $\vdash_{\mathcal{G}}$.