Logique – Examen final

Documents autorisés : deux feuilles A4 manuscrites recto-verso et personnelles. Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits. Le barème est donné à titre indicatif et pourrait être modifié.

Exercice 1 **[Modélisation et preuve (5 points)]** Formaliser les phrases suivantes en calcul des prédicats (Commencer en donnant les prédicats utilisés) :

1. Chaque oiseau dort dans un arbre.
2. Chaque plongeon est un oiseau, et chaque plongeon est aquatique.
3. Chaque arbre dans lequel un oiseau aquatique dort est à coté d'un lac.
4. Tout ce qui dort dans ce qui est à côté d'un lac mange du poisson.
5. Chaque plongeon mange du poisson.

Montrer ensuite avec la méthode de votre choix que 5. est une conséquence logique de 1. à 4.

Exercice 2 **[Unification (3 points)]** Pour les problèmes d'unification suivants donner un unificateur principal s'il existe, ou indiquer qu'il n'y en a pas. u, x, y, z sont des variables, et a, b, c des constantes. Détailler l'application de l'algorithme d'unification pour chaque problème.

1. $p(f(y,z), c, x) \doteq p(f(z, g(b,x)), c, g(b,y))$
2. $p(y,x,y) \doteq p(a,z,z)$
3. $p(f(y),y) \doteq p(u, f(u))$

Exercice 3 **[Résolution (3 points)]** Montrer en utilisant la résolution que l'ensemble de clauses suivant est contradictoire (x, y, z, u sont des variables, a, b des constantes, f un symbole de fonction d'arité 2, g un symbole de fonction d'arité 1 et p, q, r des symboles de prédicats) :

$$\{q(y) \vee p(g(y)) \vee r(f(y,z)), p(a), \neg p(x) \vee \neg q(f(x,b)), \neg p(g(f(g(f(a,b)),b))), \neg r(u)\}$$

Exercice 4 **[Gentzen (3 points)]** On considère un langage du premier ordre, où $p/1$ et $q/1$ sont des symboles de prédicat. En utilisant le système de Gentzen pour le calcul des prédicats, démontrer que les formules suivantes sont valides :

1. $(\forall x\ p(x)) \rightarrow (\exists x\ p(x))$
2. $(\forall x\ p(x)) \rightarrow (\forall y\ p(y))$
3. $(\exists x\ (p(x) \wedge q(x))) \rightarrow \exists x\ p(x)$
4. $(\forall x\ (p(x) \wedge q(x))) \rightarrow \forall x\ p(x)$
5. $(\forall x\ (p(x) \wedge q(x))) \rightarrow (\forall x\ (p(x) \vee q(x)))$

Exercice 5 **[Sémantique (3 points)]** On considère une signature Σ avec $\Sigma_F = \{a/0, b/0, g/2\}$ et $\Sigma_P = \{p/2, r/1\}$. Soit l'interprétation $\mathcal{I}$ donnée par le domaine $D = \{0,1,2,3,4\}$, $\mathcal{I}(a) = 3$, $\mathcal{I}(b) = 4$, $\mathcal{I}(g)(x,y) = (x+y)\ mod\ 4$ ($u\ mod\ 4$ est le reste de la division entière de u par 4), $\mathcal{I}(p) = \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,1),(4,4)\}$ et $\mathcal{I}(r) = \{2,4\}$.

Indiquer si $\mathcal{I}$ est un modèle pour les formules suivantes. Justifier votre réponse pour 4.

1. $\forall x\ (r(x) \wedge r(b))$
2. $\exists x\ (p(x,a) \wedge r(x))$
3. $\forall x\ \exists y\ ((p(x,y) \wedge r(x)) \rightarrow q(g(x,y)))$
4. $\exists y\ ((\forall x\ p(x,y)) \rightarrow (\forall x\ r(x)))$

$\mathcal{I}$ n'est pas un modèle de la formule $A = \forall x\ \forall y\ (p(x,y) \rightarrow p(x, g(x,y)))$. Modifier $\mathcal{I}$ pour qu'elle devienne un modèle de A.

Exercice 6 **[Unification (3 points)]** Au lieu d'unifier deux termes, on souhaite unifier un ensemble de termes. Soient $\mathcal{X}$ un ensemble de variables et Σ une signature. Étant donné un ensemble $S \subseteq \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$ (de taille ≥ 2) de termes, on veut obtenir un unificateur σ de sorte qu'il y ait un terme $t \in \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$ tel que pour tout $t' \in S$, on a $\sigma(t') = t$ (égalité syntaxique). Donner un algorithme d'unification