

TD de Logique n° 1

Rappels : induction et logique propositionnelle

Exercice 1 – Échauffement Lesquels des raisonnements suivants sont formalisables en logique propositionnelle ? Si c'est le cas, donnez une formalisation et vérifiez s'il est effectivement valide.

1. Si j'étudie la logique, alors je serai heureux et sage ;
je serai heureux et sage ;
donc j'étudie la logique.
2. Napoléon était allemand ;
les allemands sont européens ;
donc Napoléon était européen.
3. Napoléon était allemand ;
les allemands sont asiatiques ;
donc Napoléon était asiatique.
4. Napoléon était français ;
tous les français sont européens ;
donc Hitler était Autrichien.
5. Si Napoléon avait été chinois, alors il aurait été asiatique ;
Napoléon n'était pas asiatique ;
donc il n'était pas chinois.
6. S'il pleut, on annulera le pique-nique.
S'il ne pleut pas, Marie insistera pour aller à la plage et le pique-nique sera annulé.
Ou bien il pleuvra ou bien il ne pleuvra pas.
Donc le pique-nique sera annulé.

Exercice 2 – Interprétation Parmi les formules suivantes, lesquelles sont valides ? contradictoires ? Si une formule n'est ni valide, ni contradictoire, on donnera une interprétation qui la falsifie et une interprétation qui la satisfait. On essayera de raisonner sans écrire la table de vérité.

- | | | |
|---|------------------------------------|--|
| 1. $p \wedge \neg p$ | 7. $p \rightarrow (p \wedge q)$ | 13 *. $p \vee \neg p$ |
| 2. $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ | 8. $p \vee (p \rightarrow q)$ | 14. $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q$ |
| 3. $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$ | 9 *. $q \vee (p \rightarrow q)$ | 15 *. $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)) \rightarrow \neg p$ |
| 4 *. $(p \wedge q) \rightarrow p$ | 10 *. $p \wedge (p \rightarrow q)$ | 16. $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$ |
| 5 *. $(p \vee q) \rightarrow q$ | 11 *. $q \wedge (p \rightarrow q)$ | 17 *. $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow \neg p$ |
| 6 *. $p \rightarrow (p \vee q)$ | 12 *. $p \vee q$ | 18 *. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ |

(* Les exercices marqués d'une étoile sont à faire chez vous.)

Exercice 3 – Mots bien parenthésés. (A faire chez vous) Dans cet exercice, on travaille avec un alphabet Σ dans lequel on distingue deux lettres particulières $[\in \Sigma$ (“crochet ouvrant”) et $] \in \Sigma$ (“crochet fermant”), les autres éléments de Σ étant arbitraires. L’ensemble E des mots *bien parenthésés* est défini inductivement à partir des règles suivantes :

- $\varepsilon \in E$ (ε désigne le mot vide) ;
- si $x \in \Sigma$ est une lettre différente de $[$ et de $]$, alors $x \in E$;
- si $u \in E$, alors $[u] \in E$;
- si $u, v \in E$, et si u et v sont non nuls, alors $uv \in E$.

À toute lettre $x \in \Sigma$, on associe un *poids* $p(x) \in \mathbb{N}$ défini par :

$$p([) = 1, \quad p()] = -1, \quad p(x) = 0 \quad \text{si } x \in \Sigma \setminus \{[,]\}.$$

On étend cette fonction de poids à tous les mots sur l’alphabet Σ en posant

$$p(x_1 x_2 \cdots x_n) = p(x_1) + p(x_2) + \cdots + p(x_n)$$

pour tout mot $u = x_1 x_2 \cdots x_n \in \Sigma^*$. En particulier, $p(\varepsilon) = 0$.

1. Montrez que tout mot bien parenthésé $u \in E$ satisfait les deux propriétés suivantes :
 - (a) $p(u) = 0$.
 - (b) pour tout préfixe v de u , on a $p(v) \geq 0$;
2. Montrez réciproquement que si $u \in \Sigma^*$ satisfait les propriétés (a) et (b) de la question précédente, alors u est bien parenthésé.
3. Déduisez-en un algorithme qui permet de tester si un mot est bien parenthésé ou non.

Exercice 4 On considère l’ensemble d’expressions E défini par la grammaire

$$S \rightarrow a \mid f(S, S) \mid g(S, S, S)$$

où seul l’axiome S est un non terminal. Autrement dit, E est le plus petit ensemble tel que

- $a \in E$
- si $e_1, e_2 \in E$, alors $f(e_1, e_2) \in E$
- si $e_1, e_2, e_3 \in E$, alors $g(e_1, e_2, e_3) \in E$

On note $|e|_a$, $|e|_f$ et $|e|_g$ le nombre de symboles ‘ a ’, ‘ f ’ et ‘ g ’ respectivement dans une expression $e \in E$. Montrez par récurrence sur la structure de l’expression que

$$\forall e \in E, 2|e|_g + |e|_f + 1 = |e|_a$$

Exercice 5 On considère la fonction Z définie inductivement sur les arbres binaires comme suit :

$$\begin{cases} Z(\text{vide}, A) & := A \\ Z(\text{node}(A_1, A_2), A) & := Z(A_1, \text{node}(A, A_2)) \end{cases}$$

1. Soit A l’arbre ci-contre (dont les nœuds ont été numérotés pour plus de clarté). Calculez $B = Z(A, \text{vide})$.
2. Montrez que cette fonction est bien définie.
3. Calculez $Z(B, \text{vide})$. Que remarquez-vous ?
4. Montrez que pour tout arbre A , $Z(Z(A, \text{vide}), \text{vide}) = A$.
Indication : on pourra commencer par montrer (par induction) que pour tous A, B , $Z(Z(A, B), \text{vide}) = Z(B, A)$.

