

TD de Logique n° 8

Calcul des prédicats. Sémantique

Exercice 1. Montrez que :

1. $\forall y \exists x p(y, x) \models \exists x \forall y p(y, x)$
2. $\exists x \forall y p(y, x) \not\models \forall y \exists x p(y, x)$
3. $\neg(\exists x A) \equiv \forall x (\neg A)$
4. $(\forall x A) \vee B \equiv \forall x (A \vee B)$ si $x \notin \text{VI}(B)$.
5. $\exists x (A \vee B) \equiv (\exists x A) \vee (\exists x B)$, $\forall x (A \wedge B) \equiv (\forall x A) \wedge (\forall x B)$

Exercice 2. Dans un langage naturel, on définit la relation R par : Montrez dans \mathcal{M}_{pred} les séquents suivants :

1. $\mathcal{M} \models \forall z \exists x (R(z, x) \rightarrow \exists x (R(z, x) \wedge \mathcal{M} \models \phi(x)))$
2. $\mathcal{M} \models (\exists x (R(x, x) \rightarrow \mathcal{M} \models \phi(z))) \rightarrow (\exists x (R(x, x) \rightarrow \mathcal{M} \models \phi(z)))$
3. $\mathcal{M} \models (\exists x (R(x, x) \rightarrow \mathcal{M} \models \phi(x))) \rightarrow (\exists x (R(x, x) \rightarrow \mathcal{M} \models \phi(x)))$

Exercice 3. Soit Σ la signature avec $\Sigma_P = \{p/2, q/1\}$ et $\Sigma_F = \{a/0, f/1, g/2\}$.

Soit \mathcal{I} une interprétation telle que son domaine est $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, $\mathcal{I}(a) = 0$, $\mathcal{I}(f)(x) := x + 1$, $\mathcal{I}(p)(x, y) :\Leftrightarrow (x = y)$. Pour chacun des ensemble de formules \mathcal{T} suivants, complétez \mathcal{I} de deux façons différentes afin qu'elle soit un modèle de \mathcal{T} .

1. $\mathcal{T}_1 = \{ \exists x \forall y (p(g(x, y), g(y, x))) \}$;
2. $\mathcal{T}_2 = \{ \forall x (q(x) \rightarrow \exists x (\neg q(x) \rightarrow \mathcal{M} \models \phi(f(f(x)))) \}$;
3. $\mathcal{T}_3 = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \{ \exists x \forall y (q(x) \wedge \neg q(y) \rightarrow \mathcal{M} \models \phi(g(x, y))) \}$;
4. $\mathcal{T}_4 = \mathcal{T}_1 \cup \{ \exists x [q(x) \leftrightarrow (\neg p(x, a) \wedge \neg p(x, f(a)) \wedge \forall z \neg (p(x, g(y, z)) \rightarrow (p(x, y) \vee p(x, z)))] \}$.