

TD de Logique n° 1

Retour sur l'induction

Exercice 1 On considère l'ensemble d'expressions E défini par la grammaire

$$S \rightarrow a \mid f(S, S) \mid g(S, S, S)$$

où seul l'axiome S est un non terminal. Autrement dit, E est le plus petit ensemble tel que

- $a \in E$
- si $e_1, e_2 \in E$, alors $f(e_1, e_2) \in E$
- si $e_1, e_2, e_3 \in E$, alors $g(e_1, e_2, e_3) \in E$

On note $|e|_a$, $|e|_f$ et $|e|_g$ le nombre de symboles ' a ', ' f ' et ' g ' respectivement dans une expression $e \in E$. Montrez par récurrence sur la structure de l'expression que

$$\forall e \in E, 2|e|_g + |e|_f + 1 = |e|_a$$

Exercice 2 On considère la fonction Z définie inductivement sur les arbres binaires comme suit :

$$\begin{cases} Z(\text{vide}, A_1) & := A_1 \\ Z(\text{nœud}(A_1, A_2), A_3) & := Z(A_1, \text{nœud}(A_3, A_2)) \end{cases}$$

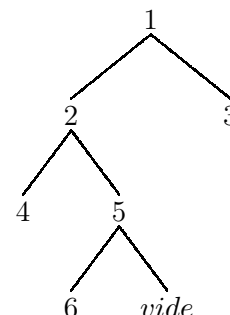
1. Soit A l'arbre ci-contre (dont les nœuds ont été numérotés pour plus de clarté, les nœuds 3, 4 et 6 ayant chacun deux fils *vide*). Calculez $B = Z(A, \text{vide})$.

2. Montrez que cette fonction est bien définie.

3. Calculez $Z(B, \text{vide})$. Que remarquez-vous ?

4. Montrez que pour tout arbre A , $Z(Z(A, \text{vide}), \text{vide}) = A$.

Indication : on pourra commencer par montrer (par induction) que pour tous A, B , $Z(Z(A, B), \text{vide}) = Z(B, A)$.



Exercice 3 – Mots bien parenthésés. Dans cet exercice, on travaille avec un alphabet Σ dans lequel on distingue deux lettres particulières $[\in \Sigma$ ("crochet ouvrant") et $] \in \Sigma$ ("crochet fermant"), les autres éléments de Σ étant arbitraires. L'ensemble E des mots *bien parenthésés* est défini inductivement à partir des règles suivantes :

- $\varepsilon \in E$ (ε désigne le mot vide) ;
- si $x \in \Sigma$ est une lettre différente de $[$ et de $]$, alors $x \in E$;
- si $u \in E$, alors $[u] \in E$;
- si $u, v \in E$, et si u et v sont non nuls, alors $uv \in E$.

À toute lettre $x \in \Sigma$, on associe un *poids* $p(x) \in \mathbb{N}$ défini par :

$$p([) = 1, \quad p(]) = -1, \quad p(x) = 0 \quad \text{si } x \in \Sigma \setminus \{[,]\}.$$

On étend cette fonction de poids à tous les mots sur l'alphabet Σ en posant

$$p(x_1 x_2 \cdots x_n) = p(x_1) + p(x_2) + \cdots + p(x_n)$$

pour tout mot $u = x_1 x_2 \cdots x_n \in \Sigma$

1. Montrez que tout mot bien parenthésé $u \in E$ satisfait les deux propriétés suivantes :
 - (a) $p(u) = 0$.
 - (b) pour tout préfixe v de u , on a $p(v) \geq 0$;
2. Montrez réciproquement que si $u \in \Sigma^*$ satisfait les propriétés (a) et (b) de la question précédente, alors u est bien parenthésé.
3. Déduisez-en un algorithme qui permet de tester si un mot est bien parenthésé ou non.