TD de Logique n° 4

Déduction Naturelle

Déduction Naturelle

Exercice 1 En utilisant $\vdash_{DN_{\text{prop}}}$, montr z l s propriétés suivant s :

1. $\vdash (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to (\mathbf{q} \vee \mathbf{p})$
2. (*À faire chez vous*) $\vdash (\mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r})) \to (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{p} \vee \mathbf{r})$
3. (*À faire chez vous*) $\vdash ((\mathbf{p} \to \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{p} \to \neg\mathbf{q})) \to \neg\mathbf{p}$
4. $\vdash \neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to (\neg\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{q})$
5. $\vdash (\neg\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to \mathbf{p} \to \mathbf{q}$
6. $\vdash (\mathbf{p} \to \mathbf{q}) \to (\neg\mathbf{p} \vee \mathbf{q})$ (*On pourra s'aider du tiers exclus, vu en cours*)
7. (*À faire chez vous*) $\vdash \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \to (\neg\mathbf{p} \vee \neg\mathbf{q})$

Équi alence entre déduction naturelle et système de Hilbert

Notons $\mathbf{F}_{\neg,\vee}$ l' ns mbl d s formul s propositionn ll s construit s à partir d s s uls conn ct urs $\neg$ t $\vee$ t $DN_{\neg,\vee}$ l sous-systèm d DN_{prop} pour l' ns mbl $\mathbf{F}_{\neg,\vee}$.
On va travaill r dans c tt parti sur $DN_{\neg,\vee}$ t H_{prop}.

Exercice 2

1. Donn z un dérivation du séqu nt $\mathbf{p} \vee \mathbf{q} \vdash_{DN_{\neg;\vee}} \mathbf{q} \vee \mathbf{p}$.
2. Transform z c tt dérivation n un dérivation dans l systèm H_{prop}.
3. (*À faire chez vous*) Donn z un dérivation du séqu nt $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \vee \mathbf{r} \vdash_{DN_{\neg;\vee}} \mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \vee \mathbf{r})$.
4. (*À faire chez vous*) Transform z c tt dérivation n un dérivation dans l systèm H_{prop}.
5. Montr z qu pour tout formul $A \in \mathbf{F}_{\neg,\vee}$ t tout ns mbl fini Δ d formul s d $\mathbf{F}_{\neg,\vee}$:
   si $\Delta \vdash_{DN_{\neg;\vee}} A$, alors $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$.
6. (*À faire chez vous*) Donn z un dérivation du séqu nt $\vdash_{DN_{\neg;\vee}} \neg\mathbf{p} \vee \mathbf{p}$.
7. (*À faire chez vous*) Montr z l'équival nc d s systèm s DN_{prop} t H_{prop}, *i.e.* montr z qu pour tout formul A t tout ns mbl d formul Δ, on a :
   - si $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$.
   - si $\Delta \vdash_{H_{prop}} A$, alors $\Delta \vdash_{DN_{prop}} A$.