

TD de Logique n° 5

Calcul des prédicats. Sémantique

Exercice 1 (Formalisation) Si tous les enfants du monde, ...

On prend comme domaine l'ensemble des enfants qui font une ronde. On considère les symboles de fonctions $\Sigma_F = \{g/1, k/0\}$ où :

$g(x)$ dénote l'enfant à gauche de x ;
 k dénote l'enfant Kikujiro ;

et les symboles de prédicats $\Sigma_P = \{R/0, T/1, C/2\}$ où :

R " la ronde tourne rond " ;
 $T(x)$ " x trébuche " ;
 $C(x, y)$ " x connaît y ".

Exprimez en français les formules suivantes

1. $\exists x. T(x) \rightarrow \neg R$
2. $\forall x. (C(x, k) \vee C(x, g(k)))$
3. $\forall x. (\exists y. (t(y) \wedge C(x, y)) \rightarrow C(g(g(x)), x))$
4. $\neg \exists x. C(k, x) \rightarrow \neg \forall x. t(x)$
5. $(R \wedge \exists x. C(x, x)) \rightarrow \forall x. C(k, x)$

Exercice 2 (Modélisation)

On considère deux "univers parallèles" M_1 et M_2 . Dans l'univers M_1 on trouve le chien *Rantanplan*, les chats *Garfield* et *Félix*, le poussin *Saturnin*, et les personnes : *Jeanne* (sympathique), aimée par *Jules* (saoul) et *Jim* (méchant). Toutes les personnes aiment Félix. Dans l'univers M_2 , on trouve seulement *Félix* et *Jim*.

(a) La phrase P : « tous les hommes sont méchants » est-elle vraie dans M_1 et M_2 ?

On considère aussi le langage \mathcal{L} , où l'ensemble de symboles de fonction F est vide et où les symboles de prédicats sont :

homme/1, méchant/1, femme/1, chat/1, chien/1, personne/1, sympa/1,
saoul/1, aime/2

où p/n signifie que le prédicat p est d'arité n .

(b) Modélisez formellement M_1 et M_2 par des interprétations \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 de \mathcal{L} .

Finalement, on considère les formules suivantes :

- $\varphi_1 = \forall x. (\text{homme}(x) \wedge \text{méchant}(x))$,
- $\varphi_2 = \forall x. (\text{homme}(x) \rightarrow \text{méchant}(x))$
- $\varphi_3 = \forall x. (\text{chat}(x) \vee \text{méchant}(x))$,
- $\varphi_4 = \exists x. \text{saoul}(x)$,
- $\varphi_5 = \forall x. \exists y. \text{aime}(x, y)$,
- $\varphi_6 = \forall x. \exists y. (\text{chat}(x) \rightarrow \text{aime}(y, x))$

(c) Évaluez ces formules dans \mathcal{I}_1 et \mathcal{I}_2 avec une valuation σ quelconque.

Exercice 3 (Satisfaisabilité, Validité, Modèle) Pour chacune des formules suivantes dites quelles sont celles qui sont satisfaisables, valides, contradictoires (i.e. non satisfaisables) et celles qui ont un modèle :

- | | | |
|--|--|--|
| (1) $\forall x. (p(x) \vee \neg p(x))$ | (3) $\forall x. \forall y. (p(x) \leftrightarrow \neg p(y))$ | (5) $\neg p(x) \wedge (\exists x. p(x))$ |
| (2) $\forall x. (p(x) \rightarrow p(z))$ | (4) $\forall x. (p(x) \vee q(x))$ | (6) $\exists x. (p(x) \rightarrow p(a) \wedge p(b))$ |

Pour chaque formule qui n'est ni valide ni contradictoire, prouvez-le.

Exercice 4 (Indépendance) Soient les formules :

1. $F_1 = \forall x. p(x, x)$
2. $F_2 = \forall x. \forall y. (p(x, y) \rightarrow p(y, x))$
3. $F_3 = \forall x. \forall y. \forall z. ((p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z))$

Montrez qu'aucune de ces formules n'est conséquence logique des deux autres. Quel est le sens intuitif de chacune de ces formules ?