La théorie de l'unification

Retour sur la notion de substitution

Définition :

- Une substitution est une fonction $\sigma : X \rightarrow T_{\Sigma,X}$.
- Le domaine d'une substitution σ est l'ensemble $Dom(\sigma) = \{x \quad X \mid \sigma(x) = x\}$.
- Le codomaine d'une substitution σ est l'ensemble $Codom(\sigma) = \{VI(\sigma(x)) \mid x \quad Dom(\sigma)\}$.
- Un renommage est une substitution injective σ t.q. $\sigma(x) = y$ $\quad x \quad Dom(\sigma)$.
- Si le domaine d'une substitution σ est fini on note $\sigma = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ si $\sigma(x_i) = t_i$ et $x_i \quad Dom(\sigma)$.
- L'application d'une substitution à un terme est l'extension de σ aux termes donnée par $\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$.

Composition de deux substitutions

Soient σ et τ deux substitution. La composition de σ avec τ est donnée par $\sigma \circ \tau(x) = \sigma(\tau(x))$.

Exemple : Soit $\sigma = \{x/f(y), w/g(z,z)\}$ et $\tau = \{y/f(a), z/g(x,b)\}$. La substitution $\tau \circ \sigma$ est donnée par $\{x/f(f(a)), y/f(a), w/g(g(x,b), g(x,b)), z/g(x,b)\}$ et la substitution $\sigma \circ \tau$ est donnée par $\{y/f(a), z/g(f(y), b), x/f(y), w/g(z,z)\}$.

Comparer deux substitutions

La substitution σ est une instance de la substitution τ (ou τ est plus générale que σ), ce que l'on écrit $\sigma \leq \tau$, ss'il existe une substitution ρ t.q. pour toute variable $x \quad X$, $\sigma(x) = (\rho \circ \tau)(x)$.

Exemple : $\{x/f(y), y/z\}$ est plus générale que $\{x/f(b), y/h(c), z/h(c)\}$

Identifier deux substitutions

Remarque : La relation $\leq$ n'est pas antysimmetrique.

Exemple : Soient $\sigma_1 = \{x/y\}$ et $\sigma_2 = \{y/x\}$. On a $\sigma_1 \leq \sigma_2$ et $\sigma_2 \leq \sigma_1$ et $\sigma_1 = \sigma_2$.

Lemme : La relation d'équivalence engendrée par $\leq$ est donnée par : $\sigma \quad \sigma$ ssi un renommage ρ t.q. $\sigma = \rho \circ \sigma$.

Alors, $\sigma_1 \quad \sigma_2$ dans l'exemple précédent car :
$\sigma_1 = \sigma_1 \circ \sigma_2$ et $\sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$.

Substitution(s) principale(s)

Soit S en ensemble de substitutions et $\tau \quad S$. On dit que τ est principale ssi toute substitution $\sigma \quad S$ est une instance de τ.

Exemple : Soit $S = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\}$, où $\sigma_1 = \{x/y\}$, $\sigma_2 = \{y/x\}$, $\sigma_3 = \{x/y, z/x\}$, $\sigma_4 = \{x/z, y/z\}$ et $\sigma_5 = \{x/a, y/a\}$.

Alors σ_1, σ_2 et σ_3 sont principales pour S. En effet,

$\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5 \leq \sigma_1$ et $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5 \leq \sigma_2$ et $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4, \sigma_5 \leq \sigma_3$

Mais $\sigma_1 \leq \sigma_4$ car $\sigma_1 = \{x/y, z/y\} = \{z/y\} \circ \sigma_4$. De même, $\sigma_1 \leq \sigma_5$ (entre autres).

Unification comme solution d'un système d'équations

Une équation est une paire de termes de la forme $s \doteq t$, elle est unifiable ssi il existe une substitution σ t.q. $\sigma(s) = \sigma(t)$. Cette substitution est un unificateur ou une solution de l'équation $s \doteq t$.

Un système fini ou problème fini d'équations P est un ensemble $\{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}$ d'équations, il est unifiable ssi il existe une substitution qui est unificateur de toutes les équations de P. Cette substitution est un unificateur ou une solution de l'ensemble P.

Notations

Définition :

- L'ensemble de variables de P est notée $Var(P)$.
- L'application d'une substitution σ à $P = \{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}$ donne le système $\sigma(P) = \{\sigma(s_1) \doteq \sigma(t_1), \ldots, \sigma(s_n) \doteq \sigma(t_n)\}$.

L'unicité

1. On identifie deux unificateurs σ et σ d'un problème P s'ils ne différent que par des renommage de variables, c'est à dire, si $\sigma \quad \sigma$.
2. On considère uniquement comme unificateurs de P les substitutions σ t.q. $Dom(\sigma) \quad Var(P)$.

Exemple : Soit $S = \{x \doteq y\}$. Prenons trois unificateurs principaux de S : $\sigma_1 = \{x/y\}$,$\sigma_2 = \{y/x\}$ et $\sigma_3 = \{x/y, z/w\}$.

Alors $\sigma_1 = \sigma_2$ (car $[\sigma_1] \quad = [\sigma_2]$) et σ_3 n'est plus considéré comme un unificateurs de S.

L'unicité

Module ces considérations, l'unificateur pricipal d'un problème P est unique modulo renommage, c'est à dire :

Si σ et σ sont deux unificateurs principaux de P, alors $\sigma \quad \sigma$.

Les formes résolues

Définition : Un problème d'unification P est en forme résolue ssi il est de la forme $\{x_1 \doteq t_1, \ldots, x_n \doteq t_n\}$, où

1. toutes les variables x_i sont distinctes ($i = j$ implique $x_i = x_j$)
2. aucune x_i n'apparaît dans un t_j ($i \quad j \; x_i \; / \; VI(t_j)$)

Notation : Si P est un système en forme résolue $\{x_1 \doteq t_1, \ldots, x_n \doteq t_n\}$ on note P la substitution $\{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$.

Les règles de transformation

$$\frac{P \quad \{s \doteq s\}}{P} \; (\text{effacer}) \qquad \frac{P \quad \{t \doteq x\} \quad t \; / \; X}{P \quad \{x \doteq t\}} \; (\text{orienter})$$

$$\frac{P \quad \{f(s_1, \ldots, s_n) \doteq f(t_1, \ldots, t_n)\}}{P \quad \{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}} \; (\text{décomposer})$$

$$\frac{P \quad \{x \doteq s\} \quad x \quad Var(P) \quad x \; / \; VI(s)}{P\{x/s\} \quad \{x \doteq s\}} \; (\text{remplacer})$$

Algorithme d'unification d'un problème P

1. On démarre avec un problème P
2. On applique les règles de transformation tant qu'on peut, on obtient un problème S
3. Si le problème S est en forme résolue
   – alors renvoyer S
   – sinon échec

Exemple

Soit $P = \{f(x, h(b), c) \doteq f(g(y), y, c)\}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{f(x, h(b), c) \doteq f(g(y), y, c)}{x \doteq g(y), h(b) \doteq y, c \doteq c}\,\mathsf{d}}{x \doteq g(y), h(b) \doteq y}\,\mathsf{e}}{x \doteq g(y), y \doteq h(b)}\,\mathsf{o}}{x \doteq g(h(b)), y \doteq h(b)}\,\mathsf{r}$$

L'unificateur principal de P est $\sigma = \{x/g(h(b)), y/h(b)\}$.

Ainsi, $\sigma f(x, h(b), c) = f(g(h(b)), h(b), c) = \sigma f(g(y), y, c)$.

Vers la correction et la complétude de l'algorithme

Lemme :

1. L'algorithme termine.
2. Si σ est un unificateur d'un problème $P = \{x_1 \doteq t_1, \ldots, x_n \doteq t_n\}$, alors $\sigma = \sigma \circ P$.
3. Si une règle transforme un problème P dans un problème S, alors les unificateur de P et S sont les mêmes.
4. Si P est en forme résolue, alors P est solution du problème P.

Correction et complétude de l'algorithme

Théorème : (Correction) Si l'algorithme trouve une substitution S pour le problème P, alors P est unifiable et S est un unificateur principal de P.

Autrement dit,

Si P n'est pas unifiable, l'algorithme échoue.

Théorème : (Complétude) Si le système P est unifiable, alors l'algorithme calcule l'unificateur principal de P.

Autrement dit,

Si l'algorithme échoue, alors le système P n'est pas unifiable.