Le calcul des prédicats

Le calcul des prédicats

- Syntaxe
- Formalisation du langage naturel
- Sémantique
- Logique équationnelle
  - Raisonnement sémantique
  - Raisonnement syntaxique
  - Théorème de Birkhoff
  - Exemples
- Systèmes de preuves syntaxiques
  1. Calcul de Gentzen
  2. Résolution
     - Théorie de l'unification

- Règles de résolution
- Propriétés de la résolution

Syntaxe : alphabet

- Les connecteurs $\rightarrow$, $\neg$, ,
- Les quantificateurs ,
- Un ensemble dénombrable X de variables $x, y, z, \ldots$
- Une signature Σ contenant :
  - Un ensemble dénombrable de symboles de fonction $\Sigma_F = \{f, g, h, \ldots\}$, chacun ayant une arité.

  - Un ensemble dénombrable de symboles de prédicat $\Sigma_P = \{p, q, r, \ldots\}$, chacun ayant une arité.

On écrit f/n (ou p/n) pour dire que le symbole de fonction f (ou de prédicat p) est d'arité n.

Les termes

Définition :

- Chaque variable x dans X est un terme dans $T_{\Sigma,X}$.
- Si $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes et $f \quad \Sigma_F$ est un symbole de fonction d'arité n, alors $f(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme dans $T_{\Sigma,X}$.

Un terme est clos s'il ne contient aucune variable.

Les atomes

Définition : Un atome est de la forme $p(t_1, \ldots, t_n)$, où p est un symbole de prédicat d'arité n et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes.

On note $A_{\Sigma,X}$ l'ensemble de tous les atomes sur Σ (signature) et X (variables).

Exemple : Si $\Sigma_F = \{0/0, S/1\}$ et $\Sigma_P = \{inf/2\}$, alors 0 et $S(S(S(x)))$ sont des termes, 0 et $S(S(S(S(0))))$ sont des termes clos et $inf(0, S(S(S(x))))$ est un atome.

Les formules

Définition :

- Chaque atome de $A_{\Sigma,X}$ est une formule dans $F_{\Sigma,X}$.
- Si A est dans $F_{\Sigma,X}$, alors $\neg A$ est une formule dans $F_{\Sigma,X}$.
- Si A et B sont dasn $F_{\Sigma,X}$, $A \rightarrow B$, $A \quad B$, et $A \quad B$ sont des formules dans $F_{\Sigma,X}$.
- Si A est dans $F_{\Sigma,X}$ et x est une variable, alors $\quad x. A$ et $\quad x. A$ sont des formules dans $F_{\Sigma,X}$.

Exemple : $\quad x. (enfant(x) \rightarrow \quad y. mere(y, x))$

Un cas particulier

Le calcul propositionnel peut se voir comme un calcul des prédicats sur une signature Σ t.q.

- l'ensemble Σ_F est vide,
- l'ensemble Σ_P contient uniquement des prédicats 0-aires,
- les quantificateurs ne sont jamais utilisés.

Variables libres et liées

Les variables libres (VI) et liées (VE) d'une formule sont définies comme suit :

- Si A est un atome, $VI(A)$ contient toutes les variables de A, et $VE(A) = \ $.
- Si $A = \neg B$, $VI(A) = VI(B)$ et $VE(A) = VE(B)$.
- Si $A = B \# C$, $VI(A) = VI(B) \quad VI(C)$ et $VE(A) = VE(B) \quad VE(C)$.
- Si $A = \quad x.\ B$ ou $A = \quad x.\ B$, $VI(A) = VI(B) \setminus \{x\}$ et $VE(A) = VE(B) \quad \{x\}$.

Exemple : Si $A = \quad x.\ q(x, f(x, y))$ on a $VI(A) = \{y\}$ et $VE(A) = \{x\}$.

Si $B = r(x) \quad\quad x.\ q(x, f(x, y))$ on a $VI(B) = \{x, y\}$ et $VE(B) = \{x\}$.

Remarque : On suppose que l'on peut toujours renommer les variables liées d'une formule afin de l'écrire sous une forme rectifiée :

- toutes les variables liées d'une formule sont distinctes. On ne peut pas avoir p.e. $\quad x. \quad x.\ A$.
- les variables libres et liées d'une formule A portent des noms distincts, i.e. $VI(A) \cap VE(A) = \ $. On ne peut plus écrire la formule B précédante.

Exemple de renommage

La formule $\quad x \quad y\ p(x, y)$ peut se renommer en $\quad z \quad y\ p(z, y)$ $\quad x \quad z\ p(x, z)$ ou $\quad z \quad w\ p(z, w)$.

La formule $(\quad x\ p(x)) \quad p(x)$ peut se renommer en $(\quad z\ p(z)) \quad p(x)$.

La formule $\quad x \quad x\ p(x)$ peut se renommer en $\quad y \quad x\ p(x)$ ou $\quad x \quad y\ p(y)$ (mais pas en $\quad y \quad x\ p(y)$!!!).

À partir de maintenant on peut assumer qu'une formule est rectifiée si cela est nécessaire. On verra dans la suite (ou en TD) que cette supposition est correcte.

Les substitutions

Définition :

- Une substitution est une fonction $\sigma : X \rightarrow T_{\Sigma,X}$. On note $\{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ si $\sigma(x_i) = t_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.
- L'application d'une substitution à un terme est l'extension de σ aux termes donnée par $\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$.
- Soient σ et τ deux substitution. La composition de σ avec τ est donnée par $\sigma \circ \tau(x) = \sigma(\tau(x))$.
- Si σ est une substitution, alors la substitution $\sigma[x := t]$ est donnée par $\sigma[x := t](y) = \sigma(y)$ si $y = x$ et $\sigma[x := t](x) = t$ sinon.

Substitution d'une formule

Soit Σ une signature et X un ensemble de variables.

Définition : Soit $\sigma = \{x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n\}$ une substitution. La substitution d'une formule A par σ est l'opération qui consiste à remplacer toute occurrence libre de x_i dans A par t_i. Par récurrence sur A :

- $\sigma(r(t_1, \ldots, t_n)) = r(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$
- $\sigma(\neg B) = \neg\sigma(B)$ et $\sigma(B \# C) = \sigma(B) \# \sigma(C)$
- $A = \ x.\ B$, où l'on suppose (grâce au renommage) $x\ /\ VI(t_i)$ et $x = x_i$ pour $i = 1 \ldots n$. Alors $\sigma(\ x.\ B) = \ x.\ \sigma(B)$.
- Pareil pour $\sigma(\ x.\ B)$

Formalisation du langage naturel

- Tous les humains sont méchants.

$$x.\ (H(x) \rightarrow M(x))$$

- Seulement les humains sont méchants.

$$x.\ (M(x) \rightarrow H(x))$$

- Il existe un humain méchant.

$$x.\ (H(x) \quad M(x))$$

- Il n'existe pas d'humain méchant.

$$\neg \ x.\ (H(x) \quad M(x))$$

- Il existe un humain qui aime tous les chiens.
  $x.\ (H(x) \quad Aimetousleschiens(x))$
  $Aimetousleschiens(x) \equiv \ y.\ (Chien(y) \rightarrow Aime(x, y))$

- Chaque humain sait qui le déteste.

$$x.\ (H(x) \rightarrow Connaitdeteste(x))$$

$$Connaitdeteste(x) \equiv \ y.\ (D(y, x) \rightarrow C(x, y))$$

– Chaque personne aime quelqu'un et personne n'aime tout le monde ou bien quelqu'un aime tout le monde et quelqu'un n'aime personne.

$$(A_1 \quad B_1) \quad (A_2 \quad B_2)$$

$$aimetoutlemonde(x) \equiv \quad y.\ Aime(x,y)$$

$$aimepersonne(x) \equiv \quad y.\ \neg Aime(x,y)$$

$$A_1 \equiv \quad x.\ (H(x) \rightarrow \quad y.\ Aime(x,y))$$

$$B_1 \equiv \neg \quad x.\ (H(x) \quad aimetoutlemonde(x))$$

$$A_2 \equiv \quad x.\ (H(x) \quad aimetoutlemonde(x))$$

$$B_2 \equiv \quad x.\ (H(x) \quad aimepersonne(x))$$

Sémantique du calcul des prédicats

Définition : L'interprétation d'une signature Σ est un triplet D, F_D, P_D t.q.

– Le domaine D est non vide.
– Pour chaque $f \quad \Sigma_F$ d'arité n, il y a une fonction totale $I(f) : D^n \rightarrow D$ dans F_D.
– Pour chaque $p \quad \Sigma_P$ d'arité n, il y a une relation $I(p) \quad D^n$ dans P_D. Cette relation peut aussi se voir comme fonction booléene totale $I(p) : D^n \rightarrow \mathbf{BOOL}$.

Les valuations

Définition : Soit I une interprétation pour Σ ayant D comme domaine et soit X un ensemble de variables. Une assignation ou valuation dans I est une fonction $\sigma : X \rightarrow D$.

Notation : Si σ est une assignation, alors l'assignation $\sigma[x := d]$ vérifie $\sigma[x := d](y) = \sigma(y)$ si $y = x$ et $\sigma[x := d](x) = d$ sinon.

Valeur d'un terme

Définition : Soit I une interprétation de domaine D et soit σ une assignation dans I. Alors la valeur d'un terme dans I pour σ est une fonction $[\_]_{I,\sigma} : T_{\Sigma,X} \rightarrow D$ définie par récurrence comme suit :

– $[x]_{I,\sigma} = \sigma(x)$
– $[f(t_1, \ldots, t_n)]_{I,\sigma} = I(f)([t_1]_{I,\sigma} \ldots [t_n]_{I,\sigma})$

Remarque : Lorsque le symbole de fonction f est 0-aire (d'arité 0), alors $I(f)$ est une fonction constante.

Un ordre sur l'ensemble BOOL

On définit sur l'ensemble $\mathbf{BOOL} = \{\mathbf{F}, \mathbf{V}\}$ les opérations suivantes :

$$
\begin{array}{llll}
\mathbf{V} + \mathbf{V} & := \mathbf{V} & \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} & := \mathbf{V} \\
\mathbf{V} + \mathbf{F} & := \mathbf{V} & \mathbf{V} \cdot \mathbf{F} & := \mathbf{F} \\
\mathbf{F} + \mathbf{V} & := \mathbf{V} & \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} & := \mathbf{F} \\
\mathbf{F} + \mathbf{F} & := \mathbf{F} & \mathbf{F} \cdot \mathbf{F} & := \mathbf{F}
\end{array}
$$

Valeur d'une formule

Définition : Soit I une interprétation de domaine D et soit σ une assignation dans I. La valeur d'une formule dans I pour σ est une opération $[\_]_{I,\sigma} : F_{\Sigma,X} \rightarrow \mathbf{BOOL}$ définie par récurrence comme suit :

- $[p(t_1, \ldots, t_n)]_{I,\sigma} = I(p)([t_1]_{I,\sigma} \ldots [t_n]_{I,\sigma})$
- $[\neg A]_{I,\sigma} = FB_{\neg}([A]_{I,\sigma})$
- $[A\#B]_{I,\sigma} = FB_{\#}([A]_{I,\sigma}, [B]_{I,\sigma})$
- $[\ x.\ A]_{I,\sigma} = \Sigma_{d\ \ D}[A]_{I,\sigma[x:=d]}$
- $[\ x.\ A]_{I,\sigma} = \Pi_{d\ \ D}[A]_{I,\sigma[x:=d]}$

Remarque : Lorsque le symbole de prédicat p est 0-aire (d'arité 0), alors $I(p)$ est $\mathbf{V}$ ou $\mathbf{F}$.

Exemple

Soit $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
$I_F(c) = \{1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 1\}$, $I_F(b) = 2$,
$I_P(p) = \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5)\}$, $I_P(q) = D$ et
$I_P(r) = \{(2, 2)\}$.

Interpréter les formules suivantes :

$(\ x\ \ y\ r(x,y)\quad (\ z\ r(z,z)))$

$(\ x\ p(x,x,x))\quad (\ y\ \ z\ r(y,z))$

$(\ x\ \ y\ r(b,b)) \rightarrow r(b,c(b))$

$x\ (q(x) \rightarrow r(x,x))$

$x\ \neg(q(x)\quad r(x,x))$

Nouvelles notions de satisfiabilité

Définition :

- I satisfait une formule B s'il existe une valuation σ dans I t.q. $[B]_{I,\sigma} = \mathbf{V}$.
- Une formule B est satisfaisable s'il existe I qui satisfait B.

On verra plus tard que pour étudier la satisfiablité d'une formule on peut se limiter à des interprétations d'une forme particulière.

Modèle et validité

Définition :

- L' interprétation I est un modèle d'une formule B ssi $[B]_{I,\sigma} = \mathbf{V}$ pour toute valuation σ dans I.
- L' interprétation I est un modèle d'un ensemble de formules Δ ssi I est un modèle de toutes les formules de Δ.
- La formule B est valide ssi toute interprétation I est un modèle de B.

Conséquence logique

Définition :

- Une formule B est conséquence logique d'un ensemble de formules Δ, noté $\Delta \models B$, si tout modèle de Δ est aussi un modèle de B.
- Deux formules A et B sont équivalentes, noté $A \equiv B$, ssi $\{A\} \models B$ et $\{B\} \models A$.

Quelques exemples de conséquence logique

$$
\begin{array}{lcl}
y.\ \ x.\ A & \models & x.\ \ y.\ A \\
x.\ (A \quad B) & \models & x.\ A \quad x.\ B \\
x.\ A \quad x.\ B & \models & x.\ (A \quad B)
\end{array}
$$

Quelques exemples d'équivalence

$x.\ A$	$\equiv$	$\neg\ \ x.\ \neg A$
$\neg\ \ x.\ A$	$\equiv$	$x.\ \neg A$
$x.\ A$	$\equiv$	$\neg\ \ x.\ \neg A$
$\neg\ \ x.\ A$	$\equiv$	$x.\ \neg A$
$x.\ (A \quad B)$	$\equiv$	$x.\ A \quad\ x.\ B$
$x.\ (A \quad B)$	$\equiv$	$x.\ A \quad\ x.\ B$
$x.\ (A \to B)$	$\equiv$	$x.\ A \to\ \ x.\ B$
$x.\ \ y.\ A$	$\equiv$	$y.\ \ x.\ A$
$x.\ \ y.\ A$	$\equiv$	$y.\ \ x.\ A$

D'autres exemples d'équivalence lorsque $x\ /\ Vl(A)$

$x.\ A$	$\equiv$	$x.\ A \quad \equiv A$
$x.\ (A \quad B)$	$\equiv$	$A \quad\ x.\ B$
$x.\ (A \quad B)$	$\equiv$	$A \quad\ x.\ B$
$x.\ (A \quad B)$	$\equiv$	$A \quad\ x.\ B$
$x.\ (A \quad B)$	$\equiv$	$A \quad\ x.\ B$
$x.\ (A \to B)$	$\equiv$	$A \to\ \ x.\ B$
$x.\ (A \to B)$	$\equiv$	$A \to\ \ x.\ B$
$x.\ (B \to A)$	$\equiv$	$x.\ B \to A$
$x.\ (B \to A)$	$\equiv$	$x.\ B \to A$