

TD de Logique n° 6

Calcul des prédicats. Sémantique

Exercice 1 (Validité) Montrez que :

1. $\exists y \forall x p(y, x) \models \forall x \exists y p(y, x)$
2. $\forall x \exists y p(y, x) \not\models \exists y \forall x p(y, x)$
3. $p(x) \models \forall x p(x)$.
4. $\neg(\forall x A) \equiv \exists x (\neg A)$
5. $(\exists x A) \vee B \equiv \exists x (A \vee B)$ si $x \notin VI(B)$.
6. $\forall x (A \vee B) \not\equiv (\forall x A) \vee (\forall x B)$, $\exists x (A \wedge B) \not\equiv (\exists x A) \wedge (\exists x B)$

Exercice 2 (Symboles de fonction et égalité) Soit un langage \mathcal{L} avec le prédicat d'égalité \doteq et un symbole de fonction binaire f . Pour chacune des formule suivantes, caractériser les interprétations qui la satisfont :

1. $\forall x \forall y \forall z \forall w f(x, y) \doteq f(z, w)$
2. $\forall x \forall y \forall z f(x, z) \doteq f(y, z)$
3. $\forall x \forall y f(x, y) \doteq f(y, y)$
4. $\forall x \forall y \exists z f(x, y) \doteq f(z, y)$
5. $\forall x \forall y \forall z f(x, f(y, z)) \doteq f(f(x, y), z)$

Exercice 3 Soit Σ la signature avec $\Sigma_P = \{p/2, q/1\}$ et $\Sigma_F = \{a/0, f/1, g/2\}$.

Soit \mathcal{I} une interprétation telle que son domaine est $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, $\mathcal{I}(a) = 0$, $\mathcal{I}(f)(n) := n + 1$, $\mathcal{I}(p)(n, m) :\Leftrightarrow (n = m)$. Pour chacun des ensemble de formules T suivants, complétez \mathcal{I} en deux façons différentes afin qu'elle soit un modèle de T .

1. $T_1 = \{ \forall x \forall y (p(g(x, y), g(y, x))) \}$;
2. $T_2 = \{ \exists x (q(x)), \exists x (\neg q(x)), \forall x (q(x) \rightarrow q(f(f(x)))) \}$;
3. $T_3 = T_1 \cup T_2 \cup \{ \forall x \forall y (q(x) \wedge \neg q(y) \rightarrow q(g(x, y))) \}$;
4. $T_4 = T_1 \cup \{ \forall x [q(x) \leftrightarrow (\neg p(x, a) \wedge \neg p(x, f(a)) \wedge \forall y \forall z (p(x, g(y, z)) \rightarrow (p(x, y) \vee p(x, z))))] \}$.