TD de Logique n^o 8

Calcul des prédicats. Syntaxe et Sémantique

Exercice 1 (Formalisation)
En utilisant l s symbol s d prédicat suivants

$A(x)$	« x st anglais »
$H(x,y)$	« x hait y »
$C(x,y)$	« x connaît y »

 t l s symbol s d fonction suivants

$e(x)$	dénot l pir nn mi d x
n	dénot Napoléon

traduis z l s énoncés suivants dans l calcul d s prédicats du pr mi r ordr :

1. Tout anglais hait son pir   nn mi.
2. Napoléon connaît son pir   nn mi.
3. C lui qui connaît son pir   nn mi n l hait pas.
4. P rsonn n connaît l pir   nn mi d Napoléon.
5. L pir   nn mi d Napoléon st anglais.
6. Quiconqu hait qu lqu'un, n hait pas son pir   nn mi.
7. Quiconqu   st anglais hait tout c ux qui connaiss nt Napoléon.

Exercice 2 (Substitutions)

1. Soit $t = p(x,y)$. On considèr l s substitutions $\sigma_1 = fx\ 7!\ f(a)g$ t $\sigma_2 = fy\ 7!\ f(x)g$.
   Calcul z : $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$, $\sigma_1(\sigma_2(t))$ t $\sigma_2(\sigma_1(t))$.
   Calcul z : $\sigma_1\ \ \sigma_2$ t $\sigma_2\ \ \sigma_1$. (Rapp l : $\sigma\ \ \sigma'(x) = \sigma(\sigma'(x))$ pour tout variabl x).
   Est-c qu la définition d la composition s'ét nd à tous l s t rm s, n particuli r au t rm t : st-c vrai qu $(\sigma_1\ \ \sigma_2)(t) = \sigma_1(\sigma_2(t))$?
2. Soit $\sigma_1 = fx\ 7!\ yg$ t soit $\sigma_2 = fy\ 7!\ xg$. Calcul r $\sigma_1\ \ \sigma_2$.
3. Soit s l t rm $r(x,y,z)$ t l s substitutions

$$\begin{array}{rcl}\sigma_1 & = & fx\ 7!\ f(a),\ y\ 7!\ f(x),\ z\ 7!\ bg \\ \sigma_2 & = & fx\ 7!\ f(z),\ y\ 7!\ f(b),\ z\ 7!\ bg \\ \sigma_3 & = & fw\ 7!\ z,\ z\ 7!\ bg\ \ fx\ 7!\ f(w),\ y\ 7!\ ag\end{array}$$

   Calcul r $\sigma_1(s)$, $\sigma_2(s)$ t $\sigma_3(s)$.

Exercice 3 (Variables libres, liées)
Dans la formul suivant , indiqu z pour chaqu variabl , si ll   st libr ou lié , t l cas échéant à qu l conn ct ur ll   st lié .

$$F = 8x\ [9y\ (p(x,y)) \wedge 9x\ (q(y,x) \wedge 8y\ r(y,y))]$$

Appliqu z à F la substitution $\sigma = fx\ 7!\ f(a), y\ 7!\ f(f(a))g$.
Transform z F pour la r ndr plus lisibl .

Exercice 4 (Satisfaisabilité, Validité, Modèle) Pour chacun d s formul s suivant s dit s qu ll s sont c ll s qui sont satisfaisabl s, valid s, contradictoir s (i. . non satisfaisabl s) t c ll s qui ont un modèl :

(1) $8x.\ (p(x)\ \_\ :p(x))$	(3) $8x.\ 8y.\ (p(x)\ \$\ :p(y))$	(5) $:p(x)\ \hat{}\ (9x.\ p(x))$
(2) $8x.\ (p(x)\ !\ p(z))$	(4) $8x.\ (p(x)\ \_\ q(x))$	(6) $9x.\ (p(x)\ !\ p(a)\ \hat{}\ p(b))$

Pour chaqu formul qui n' st ni valid ni contradictoir , prouv z-l .

Exercice 5 (Indépendance) Soi nt l s formul s :

1. $F_1 \ = \ 8x.\ p(x,x)$
2. $F_2 \ = \ 8x.\ 8y.\ (p(x,y)\ !\ p(y,x))$
3. $F_3 \ = \ 8x.\ 8y.\ 8z.\ ((p(x,y)\ \hat{}\ p(y,z))\ !\ p(x,z))$

Montr z qu'aucun d c s formul s n' st conséqu nc logiqu d s d ux autr s. Qu l st l s ns intuitif d chacun d c s formul s ?