

TD de Logique n° 9

Calcul des prédicats de Gentzen

Exercice 1 (Quelques dérivations dans \mathcal{G})

Prouvez les séquents suivants dans \mathcal{G} :

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)); P(a) \vdash Q(a) \quad (1)$$

$$\forall x P(x) \vdash \exists x P(x) \quad (2)$$

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \exists x P(x) \quad (3)$$

$$\exists x \forall y P(x; y) \vdash \forall y \exists x P(x; y) \quad (4)$$

$$\forall x(P \vee Q(x)) \vdash P \vee \forall x Q(x) \quad (5)$$

$$\forall x \forall y P(x; y) \vdash \forall x \forall y P(y; x) \quad (6)$$

$$\vdash \exists x(P(f(x)) \rightarrow P(x)) \quad (7)$$

$$\vdash \exists x \exists y(P(x; f(y)) \rightarrow P(f(x); y)) \quad (8)$$

$$P(0); \forall x(P(x) \rightarrow I(s(x))); \forall x(I(x) \rightarrow P(s(x))) \vdash I(s(s(0))) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \forall x P(0; x; x); \forall x \forall y \forall z(P(x; y; z) \rightarrow P(x; s(y); s(z))); \\ \forall x \forall y \forall z(P(x; y; z) \rightarrow P(y; x; z)) \vdash \forall x P(x; 0; x) \end{aligned} \quad (10)$$

Quelles réciproques vous paraissent valides ? Lesquelles sont seulement satisfaisables ?

Exercice 2 L'ordre des règles est-il important dans le système \mathcal{G} des prédicats ? Trouvez des exemples dans l'exercice précédent.

Exercice 3 Que pouvez-vous dire du séquent $\vdash \exists x((P(x) \rightarrow P(f(x))) \rightarrow P(g(x)))$?

Exercice 4 (Réversibilité)

Montrez que pour chaque règle de quantificateur du système \mathcal{G} , une interprétation est un modèle pour la formule associée au séquent conclusion si et seulement si elle est un modèle pour la formule associée à la prémisse. (À faire à la maison.)