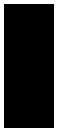
Logique
L3 Informatique

Peter Habermehl



Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité
UFR Informatique
Laboratoire LIAFA
Peter.Habermehl@liafa.jussieu.fr

La théorie de l'unification

Retour sur la notion de substitution

Définition :

- Une substitution est une fonction $\sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{T}_{,\mathcal{X}}$.
- Le domaine d'une substitution σ est l'ensemble $Dom(\sigma) = \{x \in \mathcal{X} \mid \sigma(x) \neq x\}$.
- Le codomaine d'une substitution σ est l'ensemble $Codom(\sigma) = \{VI(\sigma(x)) \mid x \in Dom(\sigma)\}$.
- Un renommage est une substitution injective σ t.q. $\sigma(x) = y$ $\forall x \in Dom(\sigma)$.
- Si le domaine d'une substitution σ est fini on note $\sigma = \{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_n \leftarrow t_n\}$ si $\sigma(x_i) = t_i$ et $x_i \in Dom(\sigma)$.
- L'application d'une substitution à un terme est l'extension de σ aux termes donnée par $\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$.

Composition de deux substitutions

Soient σ et τ deux substitution. La composition de σ avec τ est donnée par $\sigma \circ \tau(x) = \sigma(\tau(x))$.

Exemple : Soit $\sigma = \{x \leftarrow f(y), w \leftarrow g(z, z)\}$ et $\tau = \{y \leftarrow f(a), z \leftarrow g(x, b)\}$. La substitution $\tau \circ \sigma$ est donnée par $\{x \leftarrow f(f(a)), y \leftarrow f(a), w \leftarrow g(g(x, b), g(x, b)), z \leftarrow g(x, b)\}$ et la substitution $\sigma \circ \tau$ est donnée par $\{y \leftarrow f(a), z \leftarrow g(f(y), b), x \leftarrow f(y), w \leftarrow g(z, z)\}$.

Comparer deux substitutions

La substitution σ est une instance de la substitution τ (ou τ est plus générale que σ), ce que l'on écrit $\sigma \leq \tau$, ss'il existe une substitution ρ t.q. pour toute variable $x \in \mathcal{X}$, $\sigma(x) = (\rho \circ \tau)(x)$.

Exemple : $\{x \leftarrow f(y), y \leftarrow z\}$ est plus générale que $\{x \leftarrow f(b), y \leftarrow h(c), z \leftarrow h(c)\}$

Identifier deux substitutions

Remarque : La relation $\leq$ n'est pas antisymétrique.

Exemple : Soient $\sigma_1 = \{x \leftarrow y\}$ et $\sigma_2 = \{y \leftarrow x\}$. On a $\sigma_1 \leq \sigma_2$ et $\sigma_2 \leq \sigma_1$ et $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

Lemme : La relation d'équivalence engendrée par $\leq$ est donnée par: $\sigma \sim \sigma'$ ssi $\exists$ un renommage ρ t.q. $\sigma = \rho \circ \sigma'$.

Alors, $\sigma_1 \sim \sigma_2$ dans l'exemple précédent car: $\sigma_1 = \sigma_1 \circ \sigma_2$ et $\sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$.

Substitution(s) principale(s)

Soit $\mathcal{S}$ en ensemble de substitutions et $\tau \in \mathcal{S}$. On dit que τ est principale ssi toute substitution $\sigma \in \mathcal{S}$ est une instance de τ.

Exemple : Soit $\mathcal{S} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5\}$, où $\sigma_1 = \{x \leftarrow y\}$, $\sigma_2 = \{y \leftarrow x\}$, $\sigma_3 = \{x \leftarrow y, z \leftarrow x\}$, $\sigma_4 = \{x \leftarrow z, y \leftarrow z\}$ et $\sigma_5 = \{x \leftarrow a, y \leftarrow a\}$.

Alors σ_1, σ_2 et σ_3 sont principales pour $\mathcal{S}$. En effet, $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5 \leq \sigma_1$ et $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5 \leq \sigma_2$ et $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4, \sigma_5 \leq \sigma_3$
Mais $\sigma_1 \not\leq \sigma_4$ car $\sigma_1 \neq \{x \leftarrow y, z \leftarrow y\} = \{z \leftarrow y\} \circ \sigma_4$. De même, $\sigma_1 \not\leq \sigma_5$ (entre autres).

Unification comme solution d'un système d'équations

Une équation est une paire de termes de la forme $s \doteq t$, elle est unifiable ssi il existe une substitution σ t.q. $\sigma(s) = \sigma(t)$. Cette substitution est un unificateur ou une solution de l'équation $s \doteq t$.

Un système fini ou problème fini d'équations $\mathcal{P}$ est un ensemble $\{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}$ d'équations, il est unifiable ssi il existe une substitution qui est unificateur de toutes les équations de $\mathcal{P}$. Cette substitution est un unificateur ou une solution de l'ensemble $\mathcal{P}$.

Notations

Définition :

- L'ensemble de variables de $\mathcal{P}$ est notée $Var(\mathcal{P})$.
- L'application d'une substitution σ à $\mathcal{P} = \{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}$ donne le système $\sigma(\mathcal{P}) = \{\sigma(s_1) \doteq \sigma(t_1), \ldots, \sigma(s_n) \doteq \sigma(t_n)\}$.

L'unicité

1. On identifie deux unificateurs σ et σ' d'un problème $\mathcal{P}$ s'ils ne différent que par des renommage de variables, c'est à dire, si $\sigma \sim \sigma'$.
2. On considère uniquement comme unificateurs de $\mathcal{P}$ les substitutions σ t.q. $Dom(\sigma) \subseteq Var(\mathcal{P})$.

Exemple : Soit $\mathcal{S} = \{x \doteq y\}$. Prenons trois unificateurs principaux de $\mathcal{S}$: $\sigma_1 = \{x \leftarrow y\}$, $\sigma_2 = \{y \leftarrow x\}$ et $\sigma_3 = \{x \leftarrow y, z \leftarrow w\}$.
Alors $\sigma_1 = \sigma_2$ (car $[\sigma_1]_\sim = [\sigma_2]_\sim$) et σ_3 n'est plus considéré comme un unificateur de $\mathcal{S}$.

L'unicité

Module ces considérations, l'unificateur pricipal d'un problème $\mathcal{P}$ est unique modulo renommage, c'est à dire :
Si σ et σ' sont deux unificateurs principaux de $\mathcal{P}$, alors $\sigma \sim \sigma'$.

Les formes résolues

Définition : Un problème d'unification $\mathcal{P}$ est en forme résolue ssi il est de la forme $\{x_1 \doteq t_1, \ldots, x_n \doteq t_n\}$, où

1. toutes les variables x_i sont distinctes ($i \neq j$ implique $x_i \neq x_j$)
2. aucune x_i n'apparaît dans un t_j ($\forall i\ \forall j\ x_i \notin VI(t_j)$)

Notation : Si $\mathcal{P}$ est un système en forme résolue $\{x_1 \doteq t_1, \ldots, x_n \doteq t_n\}$ on note $\vec{\mathcal{P}}$ la substitution $\{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_n \leftarrow t_n\}$.

Les règles de transformation

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{s \doteq s\}}{\mathcal{P}} \text{ (effacer)} \qquad \frac{\mathcal{P} \cup \{t \doteq x\} \quad t \notin \mathcal{X}}{\mathcal{P} \cup \{x \doteq t\}} \text{ (orienter)}$$

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{f(s_1, \ldots, s_n) \doteq f(t_1, \ldots, t_n)\}}{\mathcal{P} \cup \{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}} \text{ (décomposer)}$$

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{x \doteq s\} \quad x \in Var(\mathcal{P}) \quad x \notin VI(s)}{\{x \leftarrow s\}(\mathcal{P}) \cup \{x \doteq s\}} \text{ (remplacer)}$$

Algorithme d'unification d'un problème $\mathcal{P}$

1. On démarre avec un problème $\mathcal{P}$
2. On applique les règles de transformation tant qu'on peut, on obtient un problème $\mathcal{S}$
3. Si le problème $\mathcal{S}$ est en forme résolue
   - alors renvoyer $\vec{\mathcal{S}}$
   - sinon échec

Exemple

Soit $\mathcal{P} = \{f(x, h(b), c) \doteq f(g(y), y, c)\}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{f(x, h(b), c) \doteq f(g(y), y, c)}{x \doteq g(y), h(b) \doteq y, c \doteq c}\,\mathrm{d}}{x \doteq g(y), h(b) \doteq y}\,\mathrm{e}}{x \doteq g(y), y \doteq h(b)}\,\mathrm{o}}{x \doteq g(h(b)), y \doteq h(b)}\,\mathrm{r}$$

L'unificateur principal de P est $\sigma = \{x \leftarrow g(h(b)), y \leftarrow h(b)\}$.
Ainsi, $\sigma f(x, h(b), c) = f(g(h(b)), h(b), c) = \sigma f(g(y), y, c)$.

Vers la correction et la complétude de l'algorithme

Lemme :

1. L'algorithme termine.
2. Si σ est un unificateur d'un problème $\mathcal{P} = \{x_1 \doteq t_1, \ldots, x_n \doteq t_n\}$, alors $\sigma = \sigma \circ \vec{\mathcal{P}}$.
3. Si une règle transforme un problème $\mathcal{P}$ dans un problème $\mathcal{S}$, alors les unificateur de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$ sont les mêmes.
4. Si $\mathcal{P}$ est en forme résolue, alors $\vec{\mathcal{P}}$ est solution du problème $\mathcal{P}$.

Correction et complétude de l'algorithme

Théorème : (Correction) Si l'algorithme trouve une substitution $\vec{S}$ pour le problème P, alors P est unifiable et $\vec{S}$ est un unificateur principal de P.
Autrement dit,
Si P n'est pas unifiable, l'algorithme échoue.

Théorème : (Complétude) Si le système P est unifiable, alors l'algorithme calcule l'unificateur principal de P.
Autrement dit,
Si l'algorithme échoue, alors le système P n'est pas unifiable.

La résolution pour le calcul des prédicats

Résolution

Méthode par réfutation :
On suppose que A est close (pas de variables libres).
Dans ce cas, avoir un modèle et être satisfaisable est la même notion.
A est valide ssi $\neg A$ est insatisfaisable (n'a pas de modèle) ssi
en appliquant la méthode de résolution à $\neg A$ on obtient une contradiction (réfutation).

Résolution

- Forme prénexe
- Skolemisation
- Forme clausale
- Règles de résolution
- Correction et complétude

Quelques équivalences logiques (rappel)

$$
\begin{array}{lcl}
\forall x.\ A & \equiv & \neg\exists x.\ \neg A \\
\neg\forall x.\ A & \equiv & \exists x.\ \neg A \\
\exists x.\ A & \equiv & \neg\forall x.\ \neg A \\
\neg\exists x.\ A & \equiv & \forall x.\ \neg A \\
\forall x.\ (A \wedge B) & \equiv & \forall x.\ A \wedge \forall x.\ B \\
\exists x.\ (A \vee B) & \equiv & \exists x.\ A \vee \exists x.\ B \\
\exists x.\ (A \to B) & \equiv & \forall x.\ A \to \exists x.\ B \\
\forall x.\ \forall y.\ A & \equiv & \forall y.\ \forall x.\ A \\
\exists x.\ \exists y.\ A & \equiv & \exists y.\ \exists x.\ A
\end{array}
$$

D'autres exemples d'équivalence lorsque $x \in VI(A)$

$$
\begin{array}{lcll}
\forall x.\ A & \equiv & \exists x.\ A & \equiv A \\
\forall x.\ (A \wedge B) & \equiv & A \wedge \forall x.\ B & \\
\exists x.\ (A \wedge B) & \equiv & A \wedge \exists x.\ B & \\
\forall x.\ (A \vee B) & \equiv & A \vee \forall x.\ B & \\
\exists x.\ (A \vee B) & \equiv & A \vee \exists x.\ B & \\
\exists x.\ (A \to B) & \equiv & A \to \exists x.\ B & \\
\forall x.\ (A \to B) & \equiv & A \to \forall x.\ B & \\
\exists x.\ (B \to A) & \equiv & \forall x.\ B \to A & \\
\forall x.\ (B \to A) & \equiv & \exists x.\ B \to A &
\end{array}
$$

Forme prénexe

Définition : Une formule G est dite en forme prénexe ssi elle est de la forme $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n\ A$, où chaque Q_i est un quantificateur $\forall$ ou $\exists$ et A ne contient pas de quantificateur.

Théorème : Pour toute formule G il existe une formule G' en forme prénexe t.q $G \equiv G'$.

Exemples

$$
\begin{array}{lcl}
(\forall x\ p(x)) \wedge r(x) & \equiv & \forall y\ (p(y) \wedge r(x)) \\
(\forall x\ p(x)) \wedge (\forall x\ r(x)) & \equiv & \forall x\ (p(x) \wedge r(x)) \\
(\forall x\ p(x)) \wedge (\forall x\ r(x)) & \equiv & \forall x\ \forall y\ (p(x) \wedge r(y)) \\
(\forall x\ p(x)) \vee (\forall x\ r(x)) & \equiv & \forall x\ \forall y\ (p(x) \vee r(y)) \\
(\forall x\ p(x)) \to (\exists y\ r(y)) & \equiv & \exists x\ \exists y\ (p(x) \to r(y)) \\
\neg[(\forall x\ p(x)) \to (\exists y\ r(y))] & \equiv & \forall x\ \forall y\ \neg(p(x) \to r(y))
\end{array}
$$

Skolemisation partielle

Définition : Soit G une formule prénexe de la forme $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists x_{n+1} Q_{n+2} x_{n+2} Q_{n+i} x_{n+i}\ A$. Soit f un nouveau symbole de fonction n-aire. La formule $\forall x_1 \ldots \forall x_n Q_{n+2} x_{n+2} Q_{n+i} x_{n+i}\ \{x_{n+1} \leftarrow f(x_1, \ldots, x_n)\}(A)$ est la skolemisation partielle de G.

Lemme : Soit G une formule prénexe et soit G' sa skolemisation partielle. Alors G a un modèle ssi G' a un modèle.

Exemples

G' est la skolemisation partielle de G.

G	G'
$\forall x\ \forall y\ \exists z\ r(x, z)$	$\forall x\ \forall y\ r(x, f(x, y))$
$\forall x\ \exists z\ \forall y\ \exists w\ \exists w'\ s(w', x, h(z))$	$\forall x\ \forall y\ \exists w\ \exists w'\ s(w', x, h(g(x)))$
$\exists x\ \exists z\ \forall y\ s(x, x, z)$	$\exists z\ \forall y\ s(a, a, z)$

Skolemisation

Définition : Soit G une formule prénexe ayant n quantificateurs $\exists$. La Skolemisation de G est la formule obtenue par n applications successives de la skolemisation partielle.

Théorème : Soit G' la Skolemisation de la formule G. Alors

- Si G contient n quantificateurs $\exists$, G' contient au plus n nouveaux symboles de fonction.
- G' ne contient pas de quantificateurs $\exists$.
- G a un modèle ssi G' a un modèle.

Exemples

G' est la Skolemisation de G.

G	G'
$\forall x\ \forall y\ \exists z\ r(x, z)$	$\forall x\ \forall y\ r(x, f(x, y))$
$\forall x\ \exists z\ \forall y\ \exists w\ \exists w'\ s(w', x, h(z))$	$\forall x\ \forall y\ s(i(x, y), x, h(g(x)))$
$\exists x\ \exists z\ \forall y\ s(x, x, z)$	$\forall y\ s(a, a, b)$

Forme normal conjonctive pour le calcul des prédicats

Définition :

- Un littéral est une formule de la forme $r(t_1, \ldots, t_n)$ ou $\neg r(t_1, \ldots, t_n)$.
- Une clause est une formule de la forme $L_1 \vee \ldots \vee L_q$, $q \geq 0$, où chaque L_i est un littéral. La clause vide s'écrit $\bot$.
- Une formule est en forme normal conjonctive (FNC) ssi elle est de la forme $C_1 \wedge \ldots \wedge C_n$, $n \geq 0$, où chaque C_i est une clause. La FNC vide s'écrit $\top$.

Exemples

$\top$ est une FNC. $\bot$ est une FNC.
$\neg p(h(x))$ est une FNC.
$\neg p(h(x)) \vee p(y)$ est une FNC.
$(\neg p(h(x)) \vee p(y)) \wedge p(z)$ est une FNC.
$(\neg p(h(x)) \vee p(y)) \wedge (p(z) \vee \neg p(h(x)))$ est une FNC.
$\neg(p(x) \vee \neg p(z))$ n'est pas une FNC.
$p(x) \wedge (\neg p(z) \rightarrow p(h(z)))$ n'est pas une FNC.
$p(x) \vee (\neg p(z) \wedge p(h(z)))$ n'est pas une FNC.

Existence de la FNC

Théorème : Pour toute formule A sans quantificateurs, il existe une formule A' en FNC telle que $A' \equiv A$.

Preuve : Comme dans le cas propositionnel : utiliser les équivalences suivantes:

$A \rightarrow B$	$\equiv$	$\neg A \vee B$
$\neg\neg A$	$\equiv$	A
$\neg(A \wedge B)$	$\equiv$	$\neg A \vee \neg B$
$\neg(A \vee B)$	$\equiv$	$\neg A \wedge \neg B$
$A \vee (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Unicité

La FNC d'une formule n'est pas unique.
Exemple:
$p \vee \neg p \equiv p \vee p \vee \neg p \equiv \top$.
Donc,
$p \vee \neg p$, $p \vee p \vee \neg p$ et $\top$ sont trois FNC de la formule $p \vee \neg p$.

Vers la mise sous forme clausale

Lemme : Soit $\quad = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un ensemble de formules sans quantificateurs. Soit *FNC* $\quad = \{E_1, \ldots, E_n\}$ un ensemble de formules où chaque E_i est une *FNC* de A_i. Soit C l'ensemble de clauses de *FNC* construit comme
$\bigcup_{1 \leq i \leq n} \{D_{i_1}, \ldots, D_{i_k} \mid E_i \in FNC \quad \text{et } E_i = D_{i_1} \wedge \ldots \wedge D_{i_k}\}$.

Alors l'ensemble de formules $\quad$ a un modèle ssi l'ensemble de clauses C a un modèle.

Mise sous forme clausale

Théorème : Pour toute formule G il existe un ensemble de clauses $\mathcal{C}_G$ t.q

- $VI(C_1) \cap VI(C_2) = \emptyset$ si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}_G$ et $C_1 \neq C_2$
- G a un modèle ssi $\mathcal{C}_G$ a un modèle.

Preuve :

1. Utiliser l'équivalence $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ pour éliminer les implications de G. On obtient une formule $G_1 \equiv G$.
2. Calculer G_2, la forme prénexe de G_1. On a $G_2 \equiv G_1$.
3. Calculer $G_3 = \forall x_1 \ \ldots \forall x_m \ A \ (m \geq 0)$, la Skolemisation de G_2. On a que G_3 a un modèle ssi G_2 a un modèle
4. Calculer la forme normal conjonctive de A. On obtient $G_4 = \forall x_1 \ \ldots \forall x_m \ (C_1 \wedge \ldots \wedge C_n) \ (m \geq 0, n \geq 0)$. On a $G_4 \equiv G_3$.
5. Donner comme résultat $\mathcal{C}_G = \{C'_1, \ldots, C'_n\}$ qui est un renommage de $\{C_1, \ldots, C_n\}$ afin d'eviter les variables communes. On a que G a un modèle ssi $\mathcal{C}_G$ a un modèle.

Exemple

$G = \neg[[Q(a) \wedge (\forall x \ Q(x) \rightarrow Q(f(x)))] \rightarrow \exists z \ Q(f(f(z)))]$

1. $G_1 = \neg[\neg[Q(a) \wedge (\forall x \ (\neg Q(x) \vee Q(f(x))))] \vee \exists z \ Q(f(f(z)))]$.
2. $G_2 = \forall z \ \forall x \ \neg[\neg[Q(a) \wedge (\neg Q(x) \vee Q(f(x)))] \vee Q(f(f(z)))]$.
3. $G_3 = G_2$.
4. $G_4 = \forall z \ \forall x \ [[Q(a) \wedge (\neg Q(x) \vee Q(f(x)))] \wedge \neg Q(f(f(z)))]$.
5. $\mathcal{C}_G = \{Q(a), \neg Q(x) \vee Q(f(x)), \neg Q(f(f(z)))\}$.

Exemple

$G = (\exists y \ r(x, y) \vee \forall z \ q(z, z)) \wedge (\neg \forall x \ p(x))$.

1. $G_1 = G$.
2. $G_2 = \exists x' \ \exists y \ \forall z \ (r(x, y) \vee q(z, z)) \wedge (\neg p(x'))$.
3. $G_3 = \forall z \ (r(x, b) \vee q(z, z)) \wedge (\neg p(a))$.
4. $G_4 = G_3$.
5. $\mathcal{C}_G = \{r(x, b) \vee q(z, z)), \neg p(a)\}$.

Résolution pour le calcul des prédicats

Axiomes : aucun
Règles d'inférence :

$$\frac{D \vee r(s_1, \ldots, s_n) \qquad C \vee \neg r(t_1, \ldots, t_n)}{\sigma(D \vee C)} \ (\textit{coupure})$$

où σ est l'unificateur principal du problème $\{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}$

$$\frac{D \vee L \vee L'}{\sigma(D \vee L)} \ (\textit{factorisation})$$

où

- $L = r(s_1, \ldots, s_n)$ (resp. $L = \neg r(s_1, \ldots, s_n)$) et $L' = r(t_1, \ldots, t_n)$ (resp. $L' = \neg r(t_1, \ldots, t_n)$)
- σ est l'unificateur principal du problème $\{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}$

Rappel : Le cas particulier de la règle coupure lorsque $r(s_1, \ldots, s_n)$ et $r(t_1, \ldots, t_n)$ sont unifiables :

$$\frac{r(s_1, \ldots, s_n) \qquad \neg r(t_1, \ldots, t_n)}{\bot}$$

Notation : Comme dans le cas propositionnel, on écrit $\vdash_R A$ si A est dérivée à partir de l'ensemble par résolution et $\vdash_R \bot$ si $\bot$ est dérivée à partir de l'ensemble par résolution.

Notion de réfutation

Un ensemble de formules est réfutable ssi en lui appliquant la méthode de résolution on obtient $\bot$.

Exemple I

Montrer que l'ensemble suivant est contradictoire.

H_1: $\exists x_0\ t(x_0)$
H_2: $\forall x_2\ (d(x_2) \to \forall x_1 r(x_1, x_2))$
H_3: $\forall x_3 \forall x_4\ \neg(t(x_3) \to \neg q(x_4)) \to \neg r(x_3, x_4)$
H_4: $\neg\forall x_5\ (\neg d(x_5) \vee \neg q(x_5))$

D'abord, on donne un ensemble de clauses C équivalent à $\{H_1, H_2, H_3, H_4\}$.

$$C = \{t(a), \neg d(x_2) \vee r(x_1, x_2), \neg t(x_3) \vee \neg q(x_4) \vee \neg r(x_3, x_4), d(b), q(b)\}$$

Puis on donne une réfutation de l'ensemble C par la méthode de résolution.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg t(x_3) \vee \neg q(x_4) \vee \neg r(x_3, x_4) \quad t(a)}{\neg q(x_4) \vee \neg r(a, x_4)} \quad q(b)}{\neg d(x_2) \vee r(x_1, x_2) \qquad \neg r(a, b)} \quad d(b)}{\neg d(b)}}{\bot}$$

Exemple II

Montrer que la formule J_4 est conséquence logique de la formule $J_1 \wedge J_2 \wedge J_3$.

J_1: $\exists x_0\ t(x_0)$
J_2: $\forall x_2\ (d(x_2) \to \forall x_1 r(x_1, x_2))$
J_3: $\forall x_3 \forall x_4\ \neg(t(x_3) \to \neg q(x_4)) \to \neg r(x_3, x_4)$
J_4: $\forall x_5\ (\neg d(x_5) \vee \neg q(x_5))$

D'abord on utilise le fait que $J_1 \wedge J_2 \wedge J_3 \models J_4$ ssi $J_1 \wedge J_2 \wedge J_3, \neg J_4$ est réfutable. Ceci car les formules n'ont pas de variables libres.
On donne donc un ensemble de clauses C équivalent à $\{J_1 \wedge J_2 \wedge J_3, \neg J_4\}$.

$$C = \{t(a), \neg d(x_2) \vee r(x_1, x_2), \neg t(x_3) \vee \neg q(x_4) \vee \neg r(x_3, x_4), d(b), q(b)\}$$

On donne une réfutation de l'ensemble C par la méthode de résolution.

Exempe II

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg t(x_3) \vee \neg q(x_4) \vee \neg r(x_3, x_4) \quad t(a)}{\neg q(x_4) \vee \neg r(a, x_4)} \quad q(b)}{\neg d(x_2) \vee r(x_1, x_2) \qquad \neg r(a, b)} \quad d(b)}{\neg d(b)}}{\bot}$$

Exemple III

Montrer que la formule $J : \forall x\ p(x) \vee \exists y \neg p(y)$ est valide.
D'abord on utilise le fait que J est valide ssi $\neg J$ est réfutable.
On donne donc un ensemble de clauses C équivalent à $\{\neg J\}$.

$$C = \{\neg p(a), p(y)\}$$

On donne une réfutation de l'ensemble C par la méthode de résolution.

$$\dfrac{\neg p(a) \quad p(y)}{\bot}$$

Autres exemples

avec formalisation : au tableau

Propriétés de la résolution

Théorème : La résolution est correcte, i.e., si $\vdash_R A$, alors le séquent $\vdash A$ est valide et si $\vdash_R \bot$, alors n'a pas de modèle.

Théorème : La résolution est complète pour la réfutation, i.e., si n'a pas de modèle, alors $\vdash_R \bot$.

Vers la complétude de la résolution

Soit une signature contenant au moins une constante.

Définition :

- L'univers d'Herbrand de est l'ensemble des termes clos sur .
- La base d'Herbrand est l'ensemble d'atomes clos sur .
- Une interprétation de Herbrand de est une interprétation t.q.
  - Son domaine est l'univers d'Herbrand
  - Pour chaque $f \in$ $_F$ d'arité n, $\mathcal{I}(f)(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$
  - Pour chaque $p \in$ $_P$ d'arité n, on se donne un sous-ensemble $\mathcal{S}_p$ de la base de Herbrand t.q. $\mathcal{I}(p)(t_1, \ldots, t_n) = \mathbf{V}$ ssi $p(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{S}_p$.

Lemmes pour le Théorème de Herbrand

Lemme : Soit t un terme dont les variables libres appartiennent à $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Soit $\mathcal{I}$ une interprétation ayant $\mathcal{D}$ comme domaine et σ une valuation dans le domaine $\mathcal{D}$. Soit la substitution $\tau = \{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_n \leftarrow t_n\}$ et soient $d_1 \ldots d_n$ t.q. $[t_i]_{\mathcal{I},\sigma} = d_i$. Alors $[t]_{\mathcal{I},\sigma[x_1:=d_1]\ldots[x_n:=d_n]} = [\tau(t)]_{\mathcal{I},\sigma}$.

Lemme : Soit G une formule dont les variables libres appartiennent à $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Soit $\mathcal{I}$ une interprétation ayant $\mathcal{D}$ comme domaine et σ une valuation dans le domaine $\mathcal{D}$. Soit la substitution $\tau = \{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_n \leftarrow t_n\}$ et soient $d_1 \ldots d_n$ t.q. $[t_i]_{\mathcal{I},\sigma} = d_i$. Alors $[G]_{\mathcal{I},\sigma[x_1:=d_1]\ldots[x_n:=d_n]} = [\tau(G)]_{\mathcal{I},\sigma}$.

Exercice : Soit $G = r(x_1, x_2)$ et $\tau = \{x_1 \leftarrow a, x_2 \leftarrow s(a)\}$. Soit $\mathcal{I}(r)(n, m) = \mathbf{V}$ ssi $n < m$, $\mathcal{I}(a) = 0$ et $\mathcal{I}(s)(n) = n + 1$. Vérifier le résultat précédent.

Théorème de Herbrand

Théorème : Un ensemble de clauses $\mathcal{C}$ admet un modèle ssi il existe une interprétation $\mathcal{I}_H$ de Herbrand t.q. $\mathcal{I}_H$ est un modèle de $\mathcal{C}$.

Preuve : Si il existe une interprétation de Herbrand qui est un modèle de $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{C}$ admet un modèle.
Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de clauses qui admet un modèle. Alors il existe une interprétation $\mathcal{I}$ qui est un modèle de $\mathcal{C}$. On va montrer qu'il existe une interprétation $\mathcal{I}_H$ de Herbrand qui est un modèle de $\mathcal{C}$.
En effet, pour chaque symbole de prédicat p, on construit $\mathcal{I}_H(p)$ comme suit :

$\mathcal{I}_H(p)(t_1, \ldots, t_n) = \mathbf{V}$ ssi $\mathcal{I}$ est un modèle de la formule $p(t_1, \ldots, t_n)$

Preuve du théorème de Herbrand

$\mathcal{I}_H(p)(t_1, \ldots, t_n) = \mathbf{V}$ ssi $\mathcal{I}$ est un modèle de la formule $p(t_1, \ldots, t_n)$

Soit une clause quelconque $E = \forall x_1 \ldots \forall x_n (A_1 \vee \ldots \vee A_k)$ où chaque A_i est un littéral. On veut montrer que $\mathcal{I}_H$ est un modèle de E.
Par hypothèse $[E]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$ pour tout σ
ssi
(1) $[(A_1 \vee \ldots \vee A_k)]_{\mathcal{I},\sigma[x_1:=a_1]\ldots[x_n:=a_n]} = \mathbf{V}$ pour tout $\sigma, a_1, \ldots, a_n$
Soient $t_1, \ldots, t_n$ une suite de termes clos. (cette suite existe car l'univers de Herbrand n'est pas vide). Soient $d_i = [t_i]_{\mathcal{I},\sigma}$
(1) implique
(2) $[(A_1 \vee \ldots \vee A_k)]_{\mathcal{I},\sigma[x_1:=d_1]\ldots[x_n:=d_n]} = \mathbf{V}$ pour tout σ
implique
$[A_i]_{\mathcal{I},\sigma[x_1:=d_1]\ldots[x_n:=d_n]} = \mathbf{V}$ pour tout σ
ssi (lemme avec $\tau = \{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_n \leftarrow t_n\}$)
(3) $[\tau(A_i)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$ pour tout σ

Preuve du théorème de Herbrand

(3) $[\tau(A_i)]_{\mathcal{I},\sigma} = \mathbf{V}$ pour tout σ
ssi
$\mathcal{I}$ est un modèle de $\tau(A_i)$
ssi (def. Herbrand)
$\mathcal{I}_H$ est un modèle de $\tau(A_i)$
ssi
$[\tau(A_i)]_{\mathcal{I}_H,\sigma_H} = \mathbf{V}$ pour tout σ_H
implique
$[\tau(A_1 \vee \ldots \vee A_k)]_{\mathcal{I}_H,\sigma_H} = \mathbf{V}$ pour tout σ_H
ssi (lemme, où $[t_i]_{\mathcal{I}_H,\sigma_H} = t_i$)
$[A_1 \vee \ldots \vee A_k]_{\mathcal{I}_H,\sigma_H}[x_1 := t_1] \ldots [x_n := t_n] = \mathbf{V}$ pour tout σ_H
ssi (les t_i sont arbitraires)
$[\forall x_1 \ldots \forall x_n (A_1 \vee \ldots \vee A_k)]_{\mathcal{I}_H,\sigma_H} = \mathbf{V}$ pour tout σ_H
ssi
$[E]_{\mathcal{I}_H,\sigma_H} = \mathbf{V}$ pour tout σ_H
ssi $\mathcal{I}_H$ est un modèle de E

Arbres sémantiques complets

Définition : Soit $B_0, B_1, B_2, \ldots$ une énumération de tous les atomes clos d'une signature . L'arbre sémantique complet associé à cette énumération est un arbre (binaire et équilibré) t.q.

- la racine est B_0
- chaque nœud B_i possède un arc gauche **V** et un arc droit **F**
- tous les successeurs de B_i sont étiquetés par B_{i+1}

Exercice :

1. Construire un arbre sémantique complet A_1 pour l'énumération finie $q(a), q(b), r(a), r(b)$.
2. Construire un arbre sémantique complet A_2 pour l'énumération infinie $q(a), q(b), q(s(a)), q(s(b)), q(s(s(a))), q(s(s(b))), \ldots$.

Nœud d'échec pour un ensemble de clauses

Définition : Soit A un arbre sémantique complet et soit $\mathcal{C}$ un ensemble de clauses. Un nœud n de A est dit nœud d'échec pour $\mathcal{C}$ ssi le segment de la branche qui va de la racine de A jusqu'à n suffit à falsifier au moins une instance close d'une clause de $\mathcal{C}$ et si aucun prédécesseur de n n'est un nœud d'échec de A.

Exercice : Identifier dans les arbres A_1 et A_2 au moins un nœud d'échec pour l'ensemble de clauses $\{\neg r(x) \vee q(x), q(a), r(a)\}$.

Exercice : Si $\bot \in \mathcal{C}$, qu'est-ce qu'on peut dire par rapport aux nœuds d'échec pour $\mathcal{C}$?

Arbres sémantiques partiels

Définition : Soit A un arbre sémantique complet et soit $\mathcal{C}$ un ensemble de clauses. Un arbre sémantique partiel associé à $\mathcal{C}$ est un arbre obtenu à partir de A en éliminant les sous-arbres issus des nœuds d'échec.

Définition : Un arbre sémantique partiel A est clos s'il est fini et si toute feuille de A est un nœud d'échec.

Exercice : Construire un arbre sémantique partiel clos associé à $\mathcal{C} = \{\neg r(x) \vee q(s(x)), r(a), \neg q(s(a))\}$.

Corollaire du théorème de Herbrand

Théorème : Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de clauses. Aucune interprétation de Herbrand ne satisfait $\mathcal{C}$ ssi il existe un arbre sémantique partiel associé à $\mathcal{C}$ qui est clos.

Corollaire : Un ensemble de clauses $\mathcal{C}$ n'a pas de modèle ssi il existe un arbre sémantique partiel associé à $\mathcal{C}$ qui est clos.

Complétude de la résolution

Lemme : Soient C_1 et C_2 deux clauses. Soient C_1' et C_2' deux instances de C_1 et C_2 respectivement. Soit C'_{res} la clause obtenue par appliquation d'un pas de résolution (coupure ou factorisation) à C_1' et C_2'. Alors il existe une clause C_{res} t.q.

- C'_{res} est une instance de C_{res}
- C_{res} est obtenue par résolution à partir de C_1 et C_2.

Théorème : La résolution est complète pour la réfutation, i.e., si n'a pas de modèle, alors $\vdash_R \bot$.