La théorie de l'unification

Définition :

- Une substitution est une fonction $: \mathcal{X} \to \mathcal{T}_{\Sigma,\mathcal{X}}$.
- Le domaine d'une substitution est l'ensemble $Dom(\ ) = \{x \in \mathcal{X} \mid \ (x) \neq x\}$.
- Le codomaine d'une substitution est l'ensemble $Codom(\ ) = \{VI(\ (x)) \mid x \in Dom(\ )\}$.
- Un renommage est une substitution injective t.q. $(x) = y$ $\forall x \in Dom(\ )$.
- Si le domaine d'une substitution est fini on note $= \{x_1 \leftarrow t_1; : : : ; x_n \leftarrow t_n\}$ si $(x_i) = t_i$ et $x_i \in Dom(\ )$.
- L'application d'une substitution à un terme est l'extension de aux termes donnée par $(f(t_1; : : : ; t_n)) = f(\ (t_1); : : : ; \ (t_n))$.

Composition de deux substitutions

Soient et deux substitution. La composition de avec est donnée par $\circ\ (x) = \ (\ (x))$.

Exemple : Soit $= \{x \leftarrow f(y); w \leftarrow g(z; z)\}$ et $= \{y \leftarrow f(a); z \leftarrow g(x; b)\}$. La substitution $\circ$ est donnée par $\{x \leftarrow f(f(a)); y \leftarrow f(a); w \leftarrow g(g(x; b); g(x; b)); z \leftarrow g(x; b)\}$ et la substitution $\circ$ est donnée par $\{y \leftarrow f(a); z \leftarrow g(f(y); b); x \leftarrow f(y); w \leftarrow g(z; z)\}$.

Comparer deux substitutions

La substitution est une instance de la substitution (ou est plus générale que), ce que l'on écrit $\leq$, ss'il existe une substitution t.q. pour toute variable $x \in \mathcal{X}$, $(x) = (\circ)(x)$.

Exemple : $\{x \leftarrow f(y); y \leftarrow z\}$ est plus générale que $\{x \leftarrow f(b); y \leftarrow h(c); z \leftarrow h(c)\}$

Identifier deux substitutions

Remarque : La relation $\leq$ n'est pas antisymétrique.

Exemple : Soient $_1 = \{x \leftarrow y\}$ et $_2 = \{y \leftarrow x\}$. On a $_1 \leq \ _2$ et $_2 \leq \ _1$ et $_1 \neq \ _2$.

Lemme : La relation d'équivalence engendrée par $\leq$ est donnée par: $\sim \ '$ ssi $\exists$ un renommage t.q. $= \ \circ \ '$.

Alors, $_1 \sim \ _2$ dans l'exemple précédent car: $_1 = \ _1 \circ \ _2$ et $_2 = \ _2 \circ \ _1$.

Substitution(s) principale(s)

Soit $\mathcal{S}$ en ensemble de substitutions et $\in \mathcal{S}$. On dit que est principale ssi toute substitution $\in \mathcal{S}$ est une instance de .

Exemple : Soit $\mathcal{S} = \{ {}_1; {}_2; {}_3; {}_4; {}_5\}$, où ${}_1 = \{x \leftarrow y\}$, ${}_2 = \{y \leftarrow x\}$, ${}_3 = \{x \leftarrow y; z \leftarrow x\}$, ${}_4 = \{x \leftarrow z; y \leftarrow z\}$ et ${}_5 = \{x \leftarrow a; y \leftarrow a\}$.

Alors ${}_1$, ${}_2$ et ${}_3$ sont principales pour $\mathcal{S}$. En effet,
${}_2; {}_3; {}_4; {}_5 \leq {}_1$ et ${}_1; {}_3; {}_4; {}_5 \leq {}_2$ et ${}_1; {}_2; {}_4; {}_5 \leq {}_3$
Mais ${}_1 \not\leq {}_4$ car ${}_1 \neq \{x \leftarrow y; z \leftarrow y\} = \{z \leftarrow y\} \circ {}_4$. De même, ${}_1 \not\leq {}_5$ (entre autres).

Unification comme solution d'un système d'équations

Une équation est une paire de termes de la forme $s \doteq t$, elle est unifiable ssi il existe une substitution t.q. $(s) = (t)$.
Cette substitution est un unificateur ou une solution de l'équation $s \doteq t$.

Un système fini ou problème fini d'équations $\mathcal{P}$ est un ensemble $\{s_1 \doteq t_1; \ldots; s_n \doteq t_n\}$ d'équations, il est unifiable ssi il existe une substitution qui est unificateur de toutes les équations de $\mathcal{P}$. Cette substitution est un unificateur ou une solution de l'ensemble $\mathcal{P}$.

Définition :

- L'ensemble de variables de $\mathcal{P}$ est notée $Var(\mathcal{P})$.
- L'application d'une substitution à $\mathcal{P} = \{s_1 \doteq t_1; \ldots; s_n \doteq t_n\}$ donne le système $(\mathcal{P}) = \{ (s_1) \doteq (t_1); \ldots; (s_n) \doteq (t_n)\}$.

L'unicité

1. On identifie deux unificateurs et $'$ d'un problème $\mathcal{P}$ s'ils ne différent que par des renommage de variables, c'est à dire, si $\sim$ $'$.
2. On considère uniquement comme unificateurs de $\mathcal{P}$ les substitutions t.q. $Dom(\ ) \subseteq Var(\mathcal{P})$.

Exemple : Soit $\mathcal{S} = \{x \doteq y\}$. Prenons trois unificateurs principaux de $\mathcal{S}$:
${}_1 = \{x \leftarrow y\}$, ${}_2 = \{y \leftarrow x\}$ et ${}_3 = \{x \leftarrow y; z \leftarrow w\}$.
Alors ${}_1 = {}_2$ (car $[{}_1]_\sim = [{}_2]_\sim$) et ${}_3$ n'est plus considéré comme un unificateur de $\mathcal{S}$.

Modulo ces considérations, l'unificateur pricipal d'un problème $\mathcal{P}$ est unique modulo renommage, c'est à dire :
Si et $'$ sont deux unificateurs principaux de $\mathcal{P}$, alors $\sim$ $'$.

Les formes résolues

Définition : Un problème d'unification $\mathcal{P}$ est en forme résolue ssi il est de la forme $\{x_1 \doteq t_1; \ldots; x_n \doteq t_n\}$, où

1. toutes les variables x_i sont distinctes ($i \neq j$ implique $x_i \neq x_j$)
2. aucune x_i n'apparaît dans un t_j ($\forall i\ \forall j\ x_i \notin Vl(t_j)$)

Notation : Si $\mathcal{P}$ est un système en forme résolue $\{x_1 \doteq t_1; \ldots; x_n \doteq t_n\}$ on note $\vec{\mathcal{P}}$ la substitution $\{x_1 \leftarrow t_1; \ldots; x_n \leftarrow t_n\}$.

Les règles de transformation

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{s \doteq s\}}{\mathcal{P}} \quad \text{(effacer)} \qquad \frac{\mathcal{P} \cup \{t \doteq x\} \quad t \notin \mathcal{X}}{\mathcal{P} \cup \{x \doteq t\}} \quad \text{(orienter)}$$

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{f(s_1, \ldots, s_n) \doteq f(t_1, \ldots, t_n)\}}{\mathcal{P} \cup \{s_1 \doteq t_1, \ldots, s_n \doteq t_n\}} \quad \text{(décomposer)}$$

$$\frac{\mathcal{P} \cup \{x \doteq s\} \quad x \in Var(\mathcal{P}) \quad x \notin Vl(s)}{\{x \leftarrow s\}(\mathcal{P}) \cup \{x \doteq s\}} \quad \text{(remplacer)}$$

Algorithme d'unification d'un problème $\mathcal{P}$

1. On démarre avec un problème $\mathcal{P}$
2. On applique les règles de transformation tant qu'on peut, on obtient un problème $\mathcal{S}$
3. Si le problème $\mathcal{S}$ est en forme résolue
    - alors renvoyer $\mathcal{S}$
    - sinon échec

Exemple

Soit $\mathcal{P} = \{f(x; h(b); c) \doteq f(g(y); y; c)\}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{f(x; h(b); c) \doteq f(g(y); y; c)}{x \doteq g(y); h(b) \doteq y; c \doteq c}\,\mathrm{d}}{x \doteq g(y); h(b) \doteq y}\,\mathrm{e}}{x \doteq g(y); y \doteq h(b}\,\mathrm{o} \quad \Big(\mathrm{f}\,(\mathrm{x}; h(b); c \quad \mathrm{f}\,(\quad \mathrm{g}($$

Vers la correction et la complétude de l'algorithme

Lemme :

1. L'algorithme termine.
2. Si est un unificateur d'un problème $\mathcal{P} = \{x_1 \doteq t_1; \ldots ; x_n \doteq t_n\}$, alors $\;=\; \circ \mathcal{P}$.
3. Si une règle transforme un problème $\mathcal{P}$ dans un problème $\mathcal{S}$, alors les unificateur de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$ sont les mêmes.
4. Si $\mathcal{P}$ est en forme résolue, alors $\mathcal{P}$ est solution du problème $\mathcal{P}$.

Correction et complétude de l'algorithme

Théorème : (Correction) Si l'algorithme trouve une substitution $\mathfrak{S}$ pour le problème P, alors P est unifiable et $\mathfrak{S}$ est un unificateur principal de P.
Autrement dit,
Si P n'est pas unifiable, l'algorithme échoue.

Théorème : (Complétude) Si le système P est unifiable, alors l'algorithme calcule l'unificateur principal de P.
Autrement dit,
Si l'algorithme échoue, alors le système P n'est pas unifiable.

La résolution pour le calcul des prédicats

Résolution

Méthode par réfutation :
On suppose que A est close (pas de variables libres).
Dans ce cas, avoir un modèle et être satisfaisable est la même notion.
A est valide ssi $\neg A$ est insatisfaisable (n'a pas de modèle) ssi
en appliquant la méthode de résolution à $\neg A$ on obtient une contradiction (réfutation).

Résolution

- Forme prénexe
- Skolemisation
- Forme clausale
- Règles de résolution
- Correction et complétude

Quelques équivalences logiques (rappel)

$$
\begin{array}{lcl}
\forall x\colon A & \equiv & \neg\exists x\colon \neg A \\
\neg\forall x\colon A & \equiv & \exists x\colon \neg A \\
\exists x\colon A & \equiv & \neg\forall x\colon \neg A \\
\neg\exists x\colon A & \equiv & \forall x\colon \neg A \\
\forall x\colon (A \land B) & \equiv & \forall x\colon A \land \forall x\colon B \\
\exists x\colon (A \lor B) & \equiv & \exists x\colon A \lor \exists x\colon B \\
\exists x\colon (A \rightarrow B) & \equiv & \forall x\colon A \rightarrow \exists x\colon B \\
\forall x\colon \forall y\colon A & \equiv & \forall y\colon \forall x\colon A \\
\exists x\colon \exists y\colon A & \equiv & \exists y\colon \exists x\colon A
\end{array}
$$

D'autres exemples d'équivalence lorsque $x \in VI(A)$

$$
\begin{array}{lcll}
\forall x\colon A & \equiv & \exists x\colon A & \equiv A \\
\forall x\colon (A \wedge B) & \equiv & A \wedge \forall x\colon B & \\
\exists x\colon (A \wedge B) & \equiv & A \wedge \exists x\colon B & \\
\forall x\colon (A \vee B) & \equiv & A \vee \forall x\colon B & \\
\exists x\colon (A \vee B) & \equiv & A \vee \exists x\colon B & \\
\exists x\colon (A \rightarrow B) & \equiv & A \rightarrow \exists x\colon B & \\
\forall x\colon (A \rightarrow B) & \equiv & A \rightarrow \forall x\colon B & \\
\exists x\colon (B \rightarrow A) & \equiv & \forall x\colon B \rightarrow A & \\
\forall x\colon (B \rightarrow A) & \equiv & \exists x\colon B \rightarrow A &
\end{array}
$$

Forme prénexe

Définition : Une formule G est dite en forme prénexe ssi elle est de la forme $Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \; A$, où chaque Q_i est un quantificateur $\forall$ ou $\exists$ et A ne contient pas de quantificateur.

Théorème : Pour toute formule G il existe une formule G' en forme prénexe t.q $G \equiv G'$.

Exemples

$$
\begin{array}{lcl}
(\forall x\ p(x)) \wedge r(x) & \equiv & \forall y\ (p(y) \wedge r(x)) \\
(\forall x\ p(x)) \wedge (\forall x\ r(x)) & \equiv & \forall x\ (p(x) \wedge r(x)) \\
(\forall x\ p(x)) \wedge (\forall x\ r(x)) & \equiv & \forall x\ \forall y\ (p(x) \wedge r(y)) \\
(\forall x\ p(x)) \vee (\forall x\ r(x)) & \equiv & \forall x\ \forall y\ (p(x) \vee r(y)) \\
(\forall x\ p(x)) \rightarrow (\exists y\ r(y)) & \equiv & \exists x\ \exists y\ (p(x) \rightarrow r(y)) \\
\neg[(\forall x\ p(x)) \rightarrow (\exists y\ r(y))] & \equiv & \forall x\ \forall y\ \neg(p(x) \rightarrow r(y))
\end{array}
$$

Skolemisation partielle

Définition : Soit G une formule prénexe de la forme $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists x_{n+1} Q_{n+2} x_{n+2} Q_{n+i} x_{n+i}\ A$. Soit f un nouveau symbole de fonction n-aire. La formule $\forall x_1 \dots \forall x_n Q_{n+2} x_{n+2} Q_{n+i} x_{n+i}\ \{x_{n+1} \leftarrow f(x_1, \dots, x_n)\}(A)$ est la skolemisation partielle de G.

Lemme : Soit G une formule prénexe et soit G' sa skolemisation partielle. Alors G a un modèle ssi G' a un modèle.

Exemples

G' est la skolemisation partielle de G.

G	G'
$\forall x\ \forall y\ \exists z\ r(x; z)$	$\forall x\ \forall y\ r(x; f(x; y))$
$\forall x\ \exists z\ \forall y\ \exists w\ \exists w'\ s(w'; x; h(z))$	$\forall x\ \forall y\ \exists w\ \exists w'\ s(w'; x; h(g(x)))$
$\exists x\ \exists z\ \forall y\ s(x; x; z)$	$\exists z\ \forall y\ s(a; a; z)$

Skolemisation

Définition : Soit G une formule prénexe ayant n quantificateurs $\exists$. La Skolemisation de G est la formule obtenue par n applications successives de la skolemisation partielle.

Théorème : Soit G' la Skolemisation de la formule G. Alors

- Si G contient n quantificateurs $\exists$, G' contient au plus n nouveaux symboles de fonction.
- G' ne contient pas de quantificateurs $\exists$.
- G a un modèle ssi G' a un modèle.

Exemples

G' est la Skolemisation de G.

G	G'
$\forall x\ \forall y\ \exists z\ r(x;z)$	$\forall x\ \forall y\ r(x;f(x;y))$
$\forall x\ \exists z\ \forall y\ \exists w\ \exists w'\ s(w';x;h(z))$	$\forall x\ \forall y\ s(i(x;y);x;h(g(x)))$
$\exists x\ \exists z\ \forall y\ s(x;x;z)$	$\forall y\ s(a;a;b)$

Forme normal conjonctive pour le calcul des prédicats

Définition :

- Un littéral est une formule de la forme $r(t_1; \ldots; t_n)$ ou $\neg r(t_1; \ldots; t_n)$.
- Une clause est une formule de la forme $L_1 \vee \ldots \vee L_q$, $q \geq 0$, où chaque L_i est un littéral. La clause vide s'écrit $\perp$.
- Une formule est en forme normal conjonctive (FNC) ssi elle est de la forme $C_1 \wedge \ldots \wedge C_n$, $n \geq 0$, où chaque C_i est une clause. La FNC vide s'écrit $\top$.

Exemples

$\top$ est une FNC. $\bot$ est une FNC.
$\neg p(h(x))$ est une FNC.
$\neg p(h(x)) \vee p(y)$ est une FNC.
$(\neg p(h(x)) \vee p(y)) \wedge p(z)$ est une FNC.
$(\neg p(h(x)) \vee p(y)) \wedge (p(z) \vee \neg p(h(x)))$ est une FNC.
$\neg(p(x) \vee \neg p(z))$ n'est pas une FNC.
$p(x) \wedge (\neg p(z) \rightarrow p(h(z)))$ n'est pas une FNC.
$p(x) \vee (\neg p(z) \wedge p(h(z)))$ n'est pas une FNC.

Existence de la FNC

Théorème : Pour toute formule A sans quantificateurs, il existe une formule A' en FNC telle que $A' \equiv A$.

Preuve : Comme dans le cas propositionnel : utiliser les équivalences suivantes:

$A \rightarrow B$	$\equiv$	$\neg A \vee B$
$\neg\neg A$	$\equiv$	A
$\neg(A \wedge B)$	$\equiv$	$\neg A \vee \neg B$
$\neg(A \vee B)$	$\equiv$	$\neg A \wedge \neg B$
$A \vee (B \wedge C)$	$\equiv$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Unicité

La FNC d'une formule n'est pas unique.
Exemple:
$p \vee \neg p \equiv p \vee p \vee \neg p \equiv \top$.
Donc,
$p \vee \neg p$, $p \vee p \vee \neg p$ et $\top$ sont trois FNC de la formule $p \vee \neg p$.

Vers la mise sous forme clausale

Lemme : Soit $\quad = \{A_1; : : : ; A_n\}$ un ensemble de formules sans quantificateurs. Soit $FNC_\Delta = \{E_1; : : : ; E_n\}$ un ensemble de formules où chaque E_i est une FNC de A_i. Soit C_Δ l'ensemble de clauses de FNC_Δ construit comme
$\bigcup_{1 \leq i \leq n}\{D_{i_1}; : : : ; D_{i_k} \mid E_i \in FNC_\Delta$ et $E_i = D_{i_1} \wedge : : : \wedge D_{i_k}\}$.

Alors l'ensemble de formules $\quad$ a un modèle ssi l'ensemble de clauses C_Δ a un modèle.

Mise sous forme clausale

Théorème : Pour toute formule G il existe un ensemble de clauses $\mathcal{C}_G$ t.q

- $VI(C_1) \cap VI(C_2) = \emptyset$ si $C_1; C_2 \in \mathcal{C}_G$ et $C_1 \neq C_2$
- G a un modèle ssi $\mathcal{C}_G$ a un modèle.

Preuve :

1. Utiliser l'équivalence $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ pour éliminer les implications de G. On obtient une formule $G_1 \equiv G$.
2. Calculer G_2, la forme prénexe de G_1. On a $G_2 \equiv G_1$.
3. Calculer $G_3 = \forall x_1 \; ::: \forall x_m \; A \; (m \geq 0)$, la Skolemisation de G_2. On a que G_3 a un modèle ssi G_2 a un modèle
4. Calculer la forme normal conjonctive de A. On obtient $G_4 = \forall x_1 \; ::: \forall x_m \; (C_1 \wedge ::: \wedge C_n) \; (m \geq 0; n \geq 0)$. On a $G_4 \equiv G_3$.
5. Donner comme résultat $\mathcal{C}_G = \{C'_1; ::: ; C'_n\}$ qui est un renommage de $\{C_1; ::: ; C_n\}$ afin d'eviter les variables communes. On a que G a un modèle ssi $\mathcal{C}_G$ a un modèle.

Exemple

$$G = \neg[[Q(a) \wedge (\forall x\ Q(x) \rightarrow Q(f(x)))] \rightarrow \exists z\ Q(f(f(z)))]$$

1. $G_1 = \neg[\neg[Q(a) \wedge (\forall x\ (\neg Q(x) \vee Q(f(x))))] \vee \exists z\ Q(f(f(z)))]$.
2. $G_2 = \forall z\ \forall x\ \neg[\neg[Q(a) \wedge (\neg Q(x) \vee Q(f(x)))] \vee Q(f(f(z)))]$.
3. $G_3 = G_2$.
4. $G_4 = \forall z\ \forall x\ [[Q(a) \wedge (\neg Q(x) \vee Q(f(x)))] \wedge \neg Q(f(f(z)))]$.
5. $\mathcal{C}_G = \{Q(a); \neg Q(x) \vee Q(f(x)); \neg Q(f(f(z)))\}$.

Exemple

$G = (\exists y \ r(x; y) \vee \forall z \ q(z; z)) \wedge (\neg \forall x \ p(x))$.

1. $G_1 = G$.
2. $G_2 = \exists x' \ \exists y \ \forall z \ (r(x; y) \vee q(z; z)) \wedge (\neg p(x'))$.
3. $G_3 = \forall z \ (r(x; b) \vee q(z; z)) \wedge (\neg p(a))$.
4. $G_4 = G_3$.
5. $\mathcal{C}_G = \{r(x; b) \vee q(z; z); \neg p(a)\}$.

Résolution pour le calcul des prédicats

Axiomes : aucun

Règles d'inférence :

$$\frac{D \vee r(s_1; : : : ; s_n) \qquad C \vee \neg r(t_1; : : : ; t_n)}{(D \vee C)} \ (coupure)$$

où   est l'unificateur principal du problème $\{s_1 \doteq t_1; : : : ; s_n \doteq t_n\}$

$$\frac{D \vee L \vee L'}{(D \vee L)} \ (factorisation)$$

où

- $L = r(s_1; : : : ; s_n)$ (resp. $L = \neg r(s_1; : : : ; s_n)$) et $L' = r(t_1; : : : ; t_n)$ (resp. $L' = \neg r(t_1; : : : ; t_n)$)
-     est l'unificateur principal du problème $\{s_1 \doteq t_1; : : : ; s_n \doteq t_n\}$

Rappel : Le cas particulier de la règle coupure lorsque $r(s_1;:::;s_n)$ et $r(t_1;:::;t_n)$ sont unifiables :

$$\frac{r(s_1;:::;s_n) \qquad \neg r(t_1;:::;t_n)}{\perp}$$

Notation : Comme dans le cas propositionnel, on écrit $\vdash_R A$ si A est dérivée à partir de l'ensemble par résolution et $\vdash_R \perp$ si $\perp$ est dérivée à partir de l'ensemble par résolution.

Notion de réfutation

Un ensemble de formules est **réfutable** ssi en lui appliquant la méthode de résolution on obtient $\perp$.

Exemple I

Montrer que l'ensemble suivant est contradictoire.

H_1: $\exists x_0 \; t(x_0)$
H_2: $\forall x_2 \; (d(x_2) \to \forall x_1 r(x_1; x_2))$
H_3: $\forall x_3 \forall x_4 \; \neg(t(x_3) \to \neg q(x_4)) \to \neg r(x_3; x_4)$
H_4: $\neg \forall x_5 \; (\neg d(x_5) \vee \neg q(x_5))$

D'abord, on donne un ensemble de clauses C équivalent à $\{H_1; H_2; H_3; H_4\}$.

$$C = \{t(a); \neg d(x_2) \vee r(x_1; x_2); \neg t(x_3) \vee \neg q(x_4) \vee \neg r(x_3; x_4); d(b); q(b)\}$$

Puis on donne une réfutation de l'ensemble C par la méthode de résolution.

$$\dfrac{d(b) \qquad \dfrac{\neg d(x_2) \vee r(x_1; x_2) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg t(x_3) \vee \neg q(x_4) \vee \neg r(x_3; x_4) \qquad t(a)}{\neg q(x_4) \vee \neg r(a; x_4)} \qquad q(b)}{\neg r(a; b)}}{\neg d(b)}}{\perp}$$

Exemple II

Montrer que la formule J_4 est conséquence logique de la formule $J_1 \wedge J_2 \wedge J_3$.

J_1: $\exists x_0 \; t(x_0)$

J_2: $\forall x_2 \; (d(x_2) \rightarrow \forall x_1 r(x_1; x_2))$

J_3: $\forall x_3 \forall x_4 \; \neg(t(x_3) \rightarrow \neg q(x_4)) \rightarrow \neg r(x_3; x_4)$

J_4: $\forall x_5 \; (\neg d(x_5) \vee \neg q(x_5))$

D'abord on utilise le fait que $J_1 \wedge J_2 \wedge J_3 \models J_4$ ssi $J_1 \wedge J_2 \wedge J_3; \neg J_4$ est réfutable. Ceci car les formules n'ont pas de variables libres.
On donne donc un ensemble de clauses C équivalent à $\{J_1 \wedge J_2 \wedge J_3; \neg J_4\}$.

$$C = \{t(a); \neg d(x_2) \vee r(x_1; x_2); \neg t(x_3) \vee \neg q(x_4) \vee \neg r(x_3; x_4); d(b); q(b)\}$$

On donne une réfutation de l'ensemble C par la méthode de résolution.

Exemple II

$$\dfrac{d(b) \qquad \dfrac{\neg d(x_2) \vee r(x_1; x_2) \qquad \dfrac{\dfrac{\neg t(x_3) \vee \neg q(x_4) \vee \neg r(x_3; x_4) \qquad t(a)}{\neg q(x_4) \vee \neg r(a; x_4)} \qquad q(b)}{\neg r(a; b)}}{\neg d(b)}}{\bot}$$

Exemple III

Montrer que la formule $J : \forall x\ p(x) \vee \exists y \neg p(y)$ est valide.
D'abord on utilise le fait que J est valide ssi $\neg J$ est réfutable.
On donne donc un ensemble de clauses C équivalent à $\{\neg J\}$.

$$C = \{\neg p(a); p(y)\}$$

On donne une réfutation de l'ensemble C par la méthode de résolution.

$$\frac{\neg p(a) \qquad p(y)}{\perp}$$

Autres exemples avec formalisation : au tableau

Propriétés de la résolution

Théorème : La résolution est correcte, i.e., si $\vdash_R A$, alors le séquent $\vdash A$ est valide et si $\vdash_R \bot$, alors n'a pas de modèle.

Théorème : La résolution est complète pour la réfutation, i.e., si n'a pas de modèle, alors $\vdash_R \bot$.