Univ rsité Paris Did rot - Lic nc 3 — Anné 2012-2013

Devoir Maison de Logique n° 1

(Corr ction)

Induction et logique propositionnelle

Exercice 1 Pour un formul propositionn ll $A, \#_{let}(A)$ st l nombr d'occurr nc s d s l ttr s propositionn ll s qui paraiss nt dans A t $\#_{\wedge}(A)$ l l ttr s

pr1posit1onn(ll)21J2)01.0(1o3d(J10.010.0tr s)J0d(A)J110.0-311,

E6oom7TJ/0.90933(Ma36094Tf 10.1066.777 Td [()]TJ/F17 19.84)]T6094Tf 10.0 Td [(A)]^1J)]TJ/F17 13.874182 0 Td: [(#)])]T

- On veux prouver que $\#_{let}(A \vee B) \geqslant \#_{\wedge}(A \vee B) + 1$. On a

$$\begin{array}{rcll} \#_{let}(A \vee B) & = & \#_{let}(A) + \#_{let}(B) & \text{par définition} \\ & \geqslant & (\#_{\wedge}(A) + 1) + (\#_{\wedge}(B) + 1) & \text{par hypothèse d'induction} \\ & = & (\#_{\wedge}(A) + \#_{\wedge}(B)) + 1 + 1 & \text{par l'algèbre du collège} \\ & = & \#_{\wedge}(A \vee B) + 2 & \text{par définition} \\ & \geqslant & \#_{\wedge}(A \vee B) + 1 & \end{array}$$

  ce qui montre ce qu'on voulait prouver.
- On veux prouver que $\#_{let}(A \to B) \geqslant \#_{\wedge}(A \to B) + 1$. On a

$$\begin{array}{rcll} \#_{let}(A \to B) & = & \#_{let}(A) + \#_{let}(B) & \text{par définition} \\ & \geqslant & (\#_{\wedge}(A) + 1) + (\#_{\wedge}(B) + 1) & \text{par hypothèse d'induction} \\ & = & (\#_{\wedge}(A) + \#_{\wedge}(B)) + 1 + 1 & \text{par l'algèbre du collège} \\ & = & \#_{\wedge}(A \to B) + 2 & \text{par définition} \\ & \geqslant & \#_{\wedge}(A \to B) + 1 & \end{array}$$

  ce qui montre ce qu'on voulait prouver.

Exercice 2 Dir pour chacun d s formul s suivant s si ll st valid ou pas. Justifi z vos répons s : si vous p ns z qu la formul st valid , montr z la tabl d v rité, si vous p ns z qu la formul n' st pas valid donn z un int rprétation qui n satisfait pas la formul .

La formul $A \leftrightarrow B$ st défini comm $(A \to B) \wedge (B \to A)$. Ell st satisfait par un int rprétation a si a satisfait A t B ou bi n si a n satisfait ni A, ni B.

1. $(((p \to q) \to p) \to p)$
2. $((q \to (p \to r)) \leftrightarrow (p \to (q \to r)))$
3. $((p \to (q \to r)) \leftrightarrow ((p \to q) \to r))$

Correction:

1. oui : c'est la Loi de Peirce. Il suffit de dessiner la table de vérité sans faire des erreurs !

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \to p$	$((p \to q) \to p) \to p$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

2. oui : il suffit de dessiner la table de vérité sans faire des erreurs !

p	q	r	$p \to r$	$q \to r$	$q \to (p \to r)$	$p \to (q \to r)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

   Les deux dernières colonnes étant égales, cela prouve que l'équivalence est valide.

3. non : Si $a(p) = a(q) = a(r) = 0$ alors a ne satisfait pas l'équivalence. En effet cette affectation satisfait l'implication $((p \to (q \to r))$, car la premisse p n'est pas satisfaite ; mais elle ne satisfait pas l'implication $((p \to q) \to r))$, car la premisse $p \to q$ est satisfaite (car p n'est pas satisfaite) mais la conclusion r n'est pas satisfaite.