

## TD de Logique n° 3

## Systèmes à la Hilbert

On rappelle qu'en cas d'ambiguïté, l'implication " $\rightarrow$ " est associative à droite; par exemple,  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}$  signifie  $\mathbf{p} \rightarrow (\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r})$ .

N'oubliez pas : un théorème, une fois prouvé, peut être utilisé comme axiome dans les démonstrations suivantes.

**Exercice 1** Donnez des dérivations des faits suivants :

1.  $\vdash_{H \rightarrow} \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$
2.  $\vdash_{H \rightarrow} \mathbf{p} \rightarrow (\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q})$

**Exercice 2** Dérivez les faits suivants en vous aidant du théorème de la déduction :

1.  $\vdash_{H \rightarrow} \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$
2.  $\vdash_{H \rightarrow} (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{r}$

**Exercice 3**

1. Soit  $H_{\rightarrow}^+$  le système  $H_{\rightarrow}$  augmenté de la règle suivante :

$$\frac{A \rightarrow B \rightarrow C}{B \rightarrow A \rightarrow C}$$

Montrez que  $\Delta \vdash_{H \rightarrow} P$  si et seulement si  $\Delta \vdash_{H_{\rightarrow}^+} P$ .

2. Dérivez-en que  $\vdash_{H \rightarrow} (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{q}$ .
3. Montrez aussi que  $\vdash_{H \rightarrow} (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ .

**Exercice 4**

1. Montrez que  $\vdash_{H_{\text{prop}}} ((\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{r}) \rightarrow (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r})$ . Qu'en est-il de la propriété réciproque ?
2. Montrez que  $\vdash_{H_{\text{prop}}} \mathbf{p} \rightarrow \neg \neg \mathbf{p}$ .
3. Montrez que  $\vdash_{H_{\text{prop}}} \neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow \neg \mathbf{p}$ . Qu'en est-il de la propriété réciproque ?
4. Montrez que  $\vdash_{H_{\text{prop}}} \neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow (\neg \mathbf{p} \wedge \neg \mathbf{q})$ . Qu'en est-il de la propriété réciproque ?