

TD de Logique n° 7

Calcul des prédicats. Syntaxe et Sémantique

Exercice 1 (Formalisation)

En utilisant les symboles de prédicat suivants

$A(x)$ « x est anglais »

$H(x, y)$ « x hait y »

$C(x, y)$ « x connaît y »

et les symboles de fonction suivants

$e(x)$ dénot le pirate ennemi de x

n dénot Napoléon

traduis les énoncés suivants dans le calcul des prédicats du premier ordre :

1. Tout anglais hait son pirate ennemi.
2. Napoléon connaît son pirate ennemi.
3. C lui qui connaît son pirate ennemi ne l hait pas.
4. Personne connaît le pirate ennemi de Napoléon.
5. Le pirate ennemi de Napoléon est anglais.
6. Quiconque hait quelqu'un, ne hait pas son pirate ennemi.
7. Quiconque est anglais hait tout ceux qui connaissent Napoléon.

Exercice 2 (Substitutions)

1. Soit $t = p(x, y)$. On considère les substitutions $\sigma_1 = fx \mapsto f(a)g$ et $\sigma_2 = fy \mapsto f(x)g$.
Calcul $z : \sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_1(\sigma_2(t))$ et $\sigma_2(\sigma_1(t))$.
Calcul $z : \sigma_1 \circ \sigma_2$ et $\sigma_2 \circ \sigma_1$. (Rappel : $\sigma \circ \sigma'(x) = \sigma(\sigma'(x))$ pour toute variable x).
La composition de substitutions comporte-t-elle bien vis à vis des termes ? En particulier, a-t-on $(\sigma_1 \circ \sigma_2)(t) = \sigma_1(\sigma_2(t))$ pour le t précédent ?
2. Soit $\sigma_1 = fx \mapsto yg$ et soit $\sigma_2 = fy \mapsto xg$. Calculer $\sigma_1 \circ \sigma_2$.
3. Soit si le terme $r(x, y, z)$ et les substitutions

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= fx \mapsto f(a), y \mapsto f(x), z \mapsto bg \\ \sigma_2 &= fx \mapsto f(z), y \mapsto f(b), z \mapsto bg \\ \sigma_3 &= fw \mapsto z, z \mapsto bg \quad fx \mapsto f(w), y \mapsto ag\end{aligned}$$

Calculer $\sigma_1(s), \sigma_2(s)$ et $\sigma_3(s)$.

Exercice 3 (Variables libres, liées)

Dans la formule suivante, indiquez pour chaque variable, si elle est libre ou liée, et le cas échéant à quel connecteur elle est liée.

$$F = \exists x [\exists y (p(x, y)) \wedge \exists x (q(y, x) \wedge \exists y r(y, y))]$$

Appliquez à F la substitution $\sigma = fx \mapsto f(a), y \mapsto f(f(a))g$.

Transformez F pour la rendre plus lisible.

Exercice 4 (Satisfaisabilité, Validité, Modèle) Pour chacun des formules suivantes dites qu'elles sont celles qui sont satisfaisables, valides, contradictoires (i.e. non satisfaisables) et celles qui ont un modèle :

- | | | |
|-----------------------------------------------|----------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| (1) $\exists x. (p(x) \rightarrow \neg p(x))$ | (3) $\exists x. \exists y. (p(x) \rightarrow \neg p(y))$ | (5) $\neg p(x) \wedge (\exists x. p(x))$ |
| (2) $\exists x. (p(x) \rightarrow p(z))$ | (4) $\exists x. (p(x) \rightarrow q(x))$ | (6) $\exists x. (p(x) \rightarrow p(a) \wedge p(b))$ |

Pour chaque formule qui n'est ni valide ni contradictoire, prouvez-le.

Exercice 5 (Indépendance) Soient les formules :

1. $F_1 = \exists x. p(x, x)$
2. $F_2 = \exists x. \exists y. (p(x, y) \rightarrow p(y, x))$
3. $F_3 = \exists x. \exists y. \exists z. ((p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z))$

Montrez qu'aucun des formules n'est conséquence logique des deux autres. Quel est le sens intuitif de chacun des formules ?