

Travaux Dirigés (Jeudi - 9 heures)

personnelles. Les ordinateurs et les téléphones mobiles sont interdits.

Il est recommandé de lire le sujet.

Problème (temps recommandé : 2 heures)

a) Sémantique du calcul propositionnel (temps recommandé : 40 minutes)

Soit \oplus un nouveau connecteur logique, ayant la table de vérité suivante :

| p | q | $p \oplus q$ |
|---|---|--------------|
| V | V | F |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

- Donnez les tables de vérité des formules suivantes :
 - $p \oplus (q \oplus p)$
 - $(\neg p \wedge q) \oplus p$
 - $p \oplus (p \wedge \neg q)$
- Indiquez une formule A en forme normale disjonctive telle que $A \equiv p \oplus q$, et prouvez l'équivalence des deux formules.
- Prouvez que toute formule A peut être transformée en formule B ne contenant aucun connecteurs \oplus telle que $A \equiv B$.

b) Dédution Naturelle (temps recommandé : 1 heure)

Soit $DN_{\text{prop}}^{\oplus}$ le système DN_{prop} augmenté des trois règles suivantes :

$$\frac{\Delta \vdash A \oplus B \quad \Delta \vdash A}{\Delta \vdash \neg B} \oplus e$$

$$\frac{\Delta \vdash A \oplus B \quad \Delta \vdash \neg A}{\Delta \vdash B} \oplus e$$

$$\frac{\Delta, A \vdash \neg B \quad \Delta, \neg A \vdash B}{\Delta \vdash A \oplus B} \oplus i$$

- Montrez les propositions suivantes :

(a) $\vdash_{DN_{\text{prop}}^{\oplus}} \neg p \rightarrow ((p \oplus q) \rightarrow q)$

(b) $\vdash_{DN_{\text{prop}}^{\oplus}} \neg(p \vee q) \rightarrow ((p \oplus q) \rightarrow q)$

(c) $\vdash_{DN_{\text{prop}}^{\oplus}} (p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (p \oplus q))$

(d) **(Bonus, plus difficile)** $\vdash_{DN_{\text{prop}}^{\oplus}} (p \oplus q) \rightarrow (q \oplus p)$

Indice pour ce point 1d : on pourra admettre $\vdash_{DN_{\text{prop}}^{\oplus}} \underline{p \vee \neg p}$

2. On rappelle qu'une règle $\frac{\Delta_1 \vdash A_1 \quad \dots \quad \Delta_n \vdash A_n}{\Delta \vdash A}$ est dite admissible quand la propriété suivante est vérifiée : si $\Delta_i \vdash A_i$ est dérivable pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ alors $\Delta \vdash A$ est dérivable.

Prouvez que les trois règles suivantes sont admissibles dans DN_{prop} :

$$(a) \frac{\Delta \vdash (A \rightarrow \neg B) \wedge (\neg A \rightarrow B) \quad \Delta \vdash A}{\Delta \vdash \neg B}$$

$$(b) \frac{\Delta \vdash (A \rightarrow \neg B) \wedge (\neg A \rightarrow B) \quad \Delta \vdash \neg A}{\Delta \vdash B}$$

$$(c) \frac{\Delta, A \vdash \neg B \quad \Delta, \neg A \vdash B}{\Delta \vdash (A \rightarrow \neg B) \wedge (\neg A \rightarrow B)}$$

3. Montrez que $A \oplus B \equiv (A \rightarrow \neg B) \wedge (\neg A \rightarrow B)$. En déduire que pour toute formule de A , il existe une formule B ne contenant aucun connecteur \oplus telle que $A \equiv B$.
4. Montrez que toute preuve dans $DN_{\text{prop}}^{\oplus}$ d'une formule A peut être transformée en une preuve dans DN_{prop} d'une formule B ne contenant aucun connecteur \oplus telle que $A \equiv B$.

c) **Système de Hilbert (temps recommandé : 20 minutes)**

1. Proposez trois axiomes à rajouter au système de Hilbert pour simuler les trois règles précédentes.
2. Dans H_{prop} augmenté de ces trois axiomes, prouvez la formule $\neg p \rightarrow ((p \oplus q) \rightarrow q)$.

~~Vous pouvez vous aider du théorème de la déduction.~~

~~\square~~