

TD de Logique n° 10

Calcul des prédicats de Gentzen

Exercice 1 (Quelques dérivations dans \mathcal{G})

Prouv z l s séqu nts suivants dans \mathcal{G} :

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)); P(a) \vdash Q(a) \quad (1)$$

$$\forall x P(x) \vdash \exists x P(x) \quad (2)$$

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \exists x P(x) \quad (3)$$

$$\exists x \forall y P(x; y) \vdash \forall y \exists x P(x; y) \quad (4)$$

$$\forall x(P \vee Q(x)) \vdash P \vee \forall x Q(x) \quad (5)$$

$$\forall x \forall y P(x; y) \vdash \forall x \forall y P(y; x) \quad (6)$$

$$\vdash \exists x(P(f(x)) \rightarrow P(x)) \quad (7)$$

$$\vdash \exists x \exists y(P(x; f(y)) \rightarrow P(f(x); y)) \quad (8)$$

$$P(0); \forall x(P(x) \rightarrow I(s(x))); \forall x(I(x) \rightarrow P(s(x))) \vdash I(s(s(0))) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \forall x P(0; x; x); \forall x \forall y \forall z(P(x; y; z) \rightarrow P(x; s(y); s(z))); \\ \forall x \forall y \forall z(P(x; y; z) \rightarrow P(y; x; z)) \vdash \forall x P(x; 0; x) \end{aligned} \quad (10)$$

Qu ll s réciproqu s vous paraiss nt valid s? L squ ll s sont s ul m nt satisfaisabl s?

Exercice 2 L'ordr d s règl s st-il important dans l systèm \mathcal{G} d s prédicats? Trouv z d s x mpl s dans l' x rcic précéd nt.

Exercice 3 Qu pouv z-vous dir du séqu nt $\vdash \exists x(P(x) \rightarrow P(f(x))) \rightarrow P(g(x))$?

Exercice 4 (Réversibilité)

Montr z qu pour chaqu règl d quantificat ur du systèm \mathcal{G} , un int rprétation st un modèl pour la formul associé au séqu nt conclusion si t s ul m nt si ll st un modèl pour la formul associé à la prémiss .