

## TD de Logique n° 3

## Systèmes à la Hilbert

On rapp ll qu' n cas d'ambiguïté, l'implication «  $\rightarrow$  » st associativ à droit ; par x mpl ,  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}$  signifi  $\mathbf{p} \rightarrow (\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r})$ .  
N'oubliez pas : un théorèm , un fois prouvè, p ut êtr utilisè comm axiom dans l s démonstrations suivant s.

**Exercice 1** Donn z d s dérivation s faits suivants :

1.  $\vdash_{H_{\rightarrow}} \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$
2.  $\vdash_{H_{\rightarrow}} \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}$

**Exercice 2** Dériv z l s faits suivants n vous aidant du théorèm d la déduction :

1.  $\vdash_{H_{\rightarrow}} \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$
2.  $\vdash_{H_{\rightarrow}} (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{r}$

**Exercice 3**

1. Soit  $H_{\rightarrow}^+$  l systèm  $H_{\rightarrow}$  augm nté d la règl suivant :

$$\frac{A \rightarrow B \rightarrow C}{B \rightarrow A \rightarrow C}$$

Montr z qu  $\Delta \vdash_{H_{\rightarrow}} P$  si t s ul m nt si  $\Delta \vdash_{H_{\rightarrow}^+} P$ .

2. Déduez n qu  $\vdash_{H_{\rightarrow}} (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \rightarrow (\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{q}$ .
3. Montr z aussi qu  $\vdash_{H_{\rightarrow}} (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ , sans utilis r l théorèm d la déduction.

**Exercice 4**

1. Montr z qu  $\vdash_{H_{\text{prop}}} ((\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{r}) \rightarrow (\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r})$ . Qu' n st-il d la propriété réciproqu ?
2. Montr z qu  $\vdash_{H_{\text{prop}}} \mathbf{p} \rightarrow \neg \neg \mathbf{p}$ .
3. Montr z qu  $\vdash_{H_{\text{prop}}} \neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow \neg \mathbf{p}$ . Qu' n st-il d la propriété réciproqu ?
4. Montr z qu  $\vdash_{H_{\text{prop}}} \neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \rightarrow (\neg \mathbf{p} \wedge \neg \mathbf{q})$ . Qu' n st-il d la propriété réciproqu ?