TD de Logique n° 5

Calcul des séquents de Gentzen

Exercice 1 Montrer dans $\mathcal{G}$ les séquents suivants :

1. $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to \mathbf{r},\ \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{s}) \vdash \neg\mathbf{p},\ \neg\mathbf{s}$
2. $(\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{p}) \vdash$
3. $\vdash (\neg\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}) \to ((\mathbf{p} \vee \mathbf{r}) \wedge \mathbf{s} \wedge \mathbf{m})$

Exercice 2

1. Montrez dans DN le séquent suivant : $\vdash (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to (\mathbf{q} \vee \mathbf{p})$
2. Montrez dans $\mathcal{G}$ le séquent suivant : $\vdash (\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to (\mathbf{q} \vee \mathbf{p})$

Exercice 3

1. Montrer que pour les règles $(\to d)$ et $(\to g)$ du système $\mathcal{G}$, une interprétation satisfait la formule associée au séquent conclusion si et seulement si elle satisfait toutes les (formules associées aux) prémisses.
2. Montrer que pour toute formule F, et tous ensembles de formules Γ et Δ, il existe une preuve de $\Delta,\ F \vdash \Gamma,\ F$ telle que les règles axiomes ne soient appliqués qu'à des atomes.
3. La propriété montrée en 1 est en fait vraie pour toutes les règles du système $\mathcal{G}$. En déduire une méthode automatique de démonstration qui retourne une démonstration d'un séquent si cela est possible, ou une interpretation qui falsifie la formule associée au sequent dans le cas contraire. L'ordre d'application des règles a-t-il une importance ?
4. En utilisant cet algorithme, dites si les formules suivantes sont valides ou non.
   (a) $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to \mathbf{r},\ \neg(\mathbf{p} \wedge \mathbf{s}) \vdash \neg\mathbf{p},\ \neg\mathbf{s}$
   (b) $(\mathbf{p} \vee \mathbf{q}) \to \mathbf{r},\ \neg(\mathbf{p} \vee \mathbf{s}) \vdash$
   (c) $\vdash (\neg\mathbf{p} \wedge \mathbf{p}) \to ((\mathbf{p} \vee \mathbf{r}) \wedge \mathbf{s} \wedge \mathbf{m})$
   (d) $\vdash ((\neg\mathbf{p} \vee \mathbf{p}) \to (\neg\mathbf{r} \wedge \mathbf{r}) \wedge \mathbf{p} \wedge \mathbf{p})$

Exercice 4 *(À faire chez vous)* Soient M, N deux formules quelconques.

1. Montrer que s'il existe une preuve du séquent $\Gamma \vdash M \wedge N,\ \Delta$, alors il existe une preuve des séquents $\Gamma \vdash M,\ \Delta$ et $\Gamma \vdash N,\ \Delta$.
2. Montrer que s'il existe une preuve du séquent $\Gamma,\ M \wedge N \vdash \Delta$, alors il existe une preuve du séquent $\Gamma,\ M,\ N \vdash \Delta$.