Le système de Gentzen pour le calcul des prédicats

Le système G pour le calcul des prédicats

Axiome : $\Delta, A \quad \Gamma, A$ (A es tune formule du calcul des prédicats)

Règles d'inférence logiques :

$$\frac{\Delta \quad \Gamma, A}{\Delta, \neg A \quad \Gamma}\ (\neg\, g) \qquad \frac{\Delta, A \quad \Gamma}{\Delta \quad \Gamma, \neg A}\ (\neg\, d)$$

$$\frac{\Delta \quad A, \Gamma \qquad \Delta, B \quad \Gamma}{\Delta, A \rightarrow B \quad \Gamma}\ (\rightarrow\ g) \qquad \frac{\Delta, A \quad B, \Gamma}{\Delta \quad A \rightarrow B, \Gamma}\ (\rightarrow\ d)$$

$$\frac{\Delta, A, B \quad \Gamma}{\Delta, A \quad B \quad \Gamma}\ (\ \ g) \qquad \frac{\Delta \quad A, \Gamma \qquad \Delta \quad B, \Gamma}{\Delta \quad A \quad B, \Gamma}\ (\ \ d)$$

$$\frac{\Delta, A \quad \Gamma \qquad \Delta, B \quad \Gamma}{\Delta, A \quad B \quad \Gamma}\ (\ \ g) \qquad \frac{\Delta \quad A, B, \Gamma}{\Delta \quad A \quad B, \Gamma}\ (\ \ d)$$

$$\frac{\Gamma, \{x/t\}A, \ \ x.A \quad \Delta}{\Gamma, \ \ x.A \quad \Delta}\ (\ \ g) \qquad \frac{\Gamma \quad A, \Delta}{\Gamma \quad \ \ x.A, \Delta}\ (\ \ d)$$

$$\frac{\Gamma, A \quad \Delta}{\Gamma, \ \ x.A \quad \Delta}\ (\ \ g) \qquad \frac{\Gamma \quad \{x/t\}A, \ \ x.A, \Delta}{\Gamma \quad \ \ x.A, \Delta}\ (\ \ d)$$

Dans les règles (d) et (g) x n'est pas libre dans Γ, Δ.

Dans les règles (g) et (d) l'opération $\{x/t\}A$ ne capture pas des variables.

Dérivation dans G

On note $\Delta \ \ _G\, \Gamma$ si le séquent $\Delta \quad \Gamma$ est dérivable dans le système G.

Premier exemple de dérivation dans G

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p(x) \quad p(x),\ y\neg p(y)}{p(x), \neg p(x),\ y\neg p(y)}}{p(x),\ y\neg p(y)}}{x.p(x),\ y\neg p(y)}}{(\ x.p(x)) \quad (\ y\neg p(y))}$$

Deuxième exemple de dérivation dans G

$$\dfrac{\dfrac{p(a) \quad p(a),\ x.p(x)}{p(a) \quad x.p(x)} \quad \dfrac{p(b) \quad p(b),\ x.p(x)}{p(b) \quad x.p(x)}}{p(a) \quad p(b) \quad x.p(x)}$$

Troisième exemple de dérivation dans G

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \quad p,\ z.q(z) \qquad \dfrac{p, q(x) \quad q(x),\ z.q(z)}{p, q(x) \quad z.q(z)}}{p \to q(x), p \quad z.q(z)}}{p \to q(x) \quad p \to \quad z.q(z)}}{x.(p \to q(x)) \quad p \to \quad z.q(z)}}{x.(p \to q(x)) \to (p \to \quad z.q(z))}$$

Quatrième exemple de dérivation dans G

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p(a), p(f(a)) \quad p(f(a)), p(f(f(a))),\ x.(p(x) \to p(f(x)))}{p(a) \quad p(f(a)), p(f(a)) \to p(f(f(a))),\ x.(p(x) \to p(f(x)))}}{p(a) \quad p(f(a)),\ x.(p(x) \to p(f(x)))}}{p(a) \to p(f(a)),\ x.(p(x) \to p(f(x)))}}{x.(p(x) \to p(f(x)))}$$

Cinquième exemple de dérivation dans G

$$
\begin{array}{c}
p(x), p(y) \quad p(y), p(y\ ), \ \ x.\ \ y.(p(x) \to p(y)) \\
\hline
p(x) \quad p(y), p(y) \to p(y\ ), \ \ x.\ \ y.(p(x) \to p(y)) \\
\hline
p(x) \quad p(y), \ \ y\ .(p(y) \to p(y\ )), \ \ x.\ \ y.(p(x) \to p(y)) \\
\hline
p(x) \quad p(y), \ \ x.\ \ y.(p(x) \to p(y)) \\
\hline
p(x) \to p(y), \ \ x.\ \ y.(p(x) \to p(y)) \\
\hline
y.(p(x) \to p(y)), \ \ x.\ \ y.(p(x) \to p(y)) \\
\hline
x.\ \ y.(p(x) \to p(y))
\end{array}
$$

Sixième exemple de dérivation dans G

Soit $A = \quad x\ \neg(\neg p(x) \quad \neg Q(x))$, $B = \quad x\ p(x)$ et $C = \quad x\ Q(x)$.

$$
\begin{array}{cc}
p(y), B, \neg q(y) \quad p(y), A & q(y), C, \neg p(y) \quad q(y), A \\
\hline
p(y), B, \neg p(y), \neg q(y) \quad A & q(y), C, \neg p(y), \neg q(y) \quad A \\
\hline
x\ p(x), \neg p(y), \neg q(y) \quad A & x\ q(x), \neg p(y), \neg q(y) \quad A \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{x\ p(x) \qquad x\ q(x), \neg p(y), \neg q(y) \quad A} \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{x\ p(x) \qquad x\ q(x), \neg p(y) \quad \neg q(y) \quad A} \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{x\ p(x) \qquad x\ q(x) \qquad \neg(\neg p(y) \quad \neg q(y)), A} \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{x\ p(x) \qquad x\ q(x) \qquad x\ \neg(\neg p(x) \quad \neg q(x))}
\end{array}
$$

Remarques

- Retarder au maximum le choix des témoins (règles $\ g$ et $\ d$).
- Renommer des variables (si nécessaire) pour éviter la capture de variables.

Comment transformer quelques dérivations dans G

Théorème : (Affaiblissement) Si $\Delta \quad \Gamma$ est dérivable dans le système G, alors $\Delta, A \quad \Gamma$ et $\Delta \quad A, \Gamma$ le sont aussi.

Théorème : (Contraction) Si $\Delta, A, A \quad \Gamma$ est dérivable dans le système G, alors $\Delta, A \quad \Gamma$ l'est aussi. Si $\Delta \quad \Gamma, A, A$ est dérivable dans le système G, alors $\Delta \quad \Gamma, A$ l'est aussi.

Rappel

Définition : Un séquent $A_1, \ldots, A_n \quad B_1, \ldots, B_m$ est valide ssi sa formule associée $(A_1 \quad \ldots \quad A_n) \rightarrow (B_1 \quad \ldots \quad B_m)$ est valide.

Propriétés du système G pour le calcul des prédicats

Théorème : Le système G est correct, i.e., si $\Delta \quad_G \Gamma$, alors $\Delta \quad \Gamma$ est valide.

Théorème : Le système G est complet, i.e., si $\Delta \quad \Gamma$ est valide, alors $\Delta \quad_G \Gamma$.