Logique
L3 Informatique

Peter Habermehl

Université Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité
UFR Informatique
Laboratoire LIAFA
Peter.Habermehl@liafa.univ-paris-diderot.fr

Systèmes logiques axiomatiques

- Un ensemble de formules.
- Un sous-ensemble de formules distinguées appelées axiomes.
- Un ensemble de règles d'inférence de la forme:

$$\frac{\texttt{Hyp1} \quad \texttt{Hypn}}{\texttt{Concl}}$$

Exemple : système $H_{\rightarrow}$

- Formules : l'ensemble inductif construit à partir de toutes les lettres propositionnelles et du symbole binaire $\rightarrow$.
- Axiome 1 : toutes les formules de la forme $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- Axiome 2 : toutes les formules de la forme $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
- Règle de dérivation :

$$\frac{A \rightarrow B \qquad A}{B} \text{ (Modus Ponens)}$$

Dérivation sous forme de séquence (premier exemple)

(a) Axiome 2 : $(p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p))$
(b) Axiome 1 : $(p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p))$
(c) Modus ponens sur a et b : $(p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p)$
(d) Axiome 1 : $(p \rightarrow (p \rightarrow p))$
(e) Modus ponens sur c et d : $(p \rightarrow p)$

Notation : $\emptyset \vdash_{H_{\rightarrow}} (p \rightarrow p)$ ou $\vdash_{H_{\rightarrow}} (p \rightarrow p)$

Dérivation sous forme de séquence (deuxième exemple)

On fixe un ensemble d'hypothèses. Par exemple $= \{p\}$.

(a) Axiome 1 : $(p \rightarrow (p \rightarrow p))$
(b) Formule dans : p
(c) Modus ponens sur a et b : $(p \rightarrow p)$

Notation : $\{p\} \vdash_{H_{\rightarrow}} (p \rightarrow p)$ ou $p \vdash_{H_{\rightarrow}} (p \rightarrow p)$

Notion de dérivation sous forme de séquence

Une dérivation de la formule A à partir d'un ensemble d'hypothèses est une séquence de formules $F_1; : : : ; F_n$ telle que pour chaque i :

- F_i est une hypothèse de , ou
- F_i est une instance d'axiome, ou
- F_i est obtenue par une règle d'inférence à partir de $F_{e_1}; : : : ; F_{e_k}$ avec $e_1; : : : ; e_k < i$ et
- la dernière formule de la séquence est A.

Notation : S'il y a une dérivation de A à partir de , nous écrivons $\vdash_{H_\rightarrow} A$. Nous écrivons $; B \vdash_{H_\rightarrow} A$ pour $\cup \{B\} \vdash_{H_\rightarrow} A$.

Dérivation sous forme d'arbre

$$\dfrac{\dfrac{(p \rightarrow (p \rightarrow p))\,(ax1) \quad p \in}{(p \rightarrow p)} \qquad p \in}{p}$$

Nous avons $p \vdash_{H_\rightarrow} p$.

Notion de dérivation sous forme d'arbre

Définition : La dérivation de la formule A à partir d'un ensemble d'hypothèses est un arbre fini de *formules* tel que

- chaque feuille est soit une hypothèse de soit un axiome
- si B est le père des $B_1 : : : B_n$, alors B est obtenu par l'application d'une règle d'inférence sur les formules $B_1 : : : B_n$.
- la formule A est la racine de l'arbre.

La notion de *théorème*

La formule A est un théorème ssi il existe une dérivation de la formule A à partir d'un ensemble d'hypothèses vide.

Exemple : La formule $p \rightarrow p$ est un théorème dans le système $H_\rightarrow$.

Théorème de la déduction

Théorème : Soit H un système de Hilbert quelconque tel que

- l'ensemble d'axiomes de H contient au moins Axiome 1 + Axiome 2
- la seule règle d'inférence de H est le Modus Ponens.

Alors, $\vdash_H A \to B$ ssi $;A \vdash_H B$.

Preuve : au tableau

Exemple : Montrer que $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$ est un théorème : par la propriété précédante, on démontre que r est dérivable à partir de $= \{p \to (q \to r); q; p\}$.

Dérivation comme séquence

$= \{p \to (q \to r); p; q\}$

(a) Élément dans : $p \to (q \to r)$

(b) Élément dans : p

(c) Modus Ponens sur a et b : $q \to r$

(d) Élément dans : q

(e) Modus Ponens sur c et d : r

Dérivation comme arbre

$= \{p \to (q \to r); p; q\}$

$$\dfrac{\dfrac{p \to (q \to r) \in \qquad p \in}{(q \to r)} \qquad q \in}{r}$$

Un autre exemple : système H_{prop}

- Axiome 1 : $A \to (B \to A)$
- Axiome 2 : $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
- Axiome 3 : $A \to (B \to (A \wedge B))$
- Axiome 4 : $A \to (A \vee B)$
- Axiome 5 : $B \to (A \vee B)$
- Axiome 6 : $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
- Axiome 7 : $(A \wedge B) \to A$
- Axiome 8 : $(A \wedge B) \to B$
- Axiome 9 : $(A \to B) \to ((C \to B) \to ((A \vee C) \to B))$
- Axiome 10 : $\neg\neg A \to A$
- Règle de dérivation : Modus Ponens

Exemple de dérivation

Soit $D = A \vee \neg A$ et $= \{\neg D\}$.

(a) Axiome 4 : $A \to (A \vee \neg A)$ (i.e. $A \to D$)

(b) Axiome 1 : $\neg D \to (A \to \neg D)$

(c) : $\neg D$

(d) Modus ponens b et c : $A \to \neg D$

(e) Axiome 6 : $(A \to D) \to ((A \to \neg D) \to \neg A)$

(f) Modus ponens a,e :$(A \to \neg D) \to \neg A$

(g) Modus ponens d,f : $\neg A$

(h) Axiome 5 : $\neg A \to (A \vee \neg A)$

(i) Modus ponens g, h : $(A \vee \neg A)$

Donc, $\neg D \vdash_{H_{prop}} D$

Exemple de dérivation

Par le théorème de la déduction nous avons une dérivation de $\neg D \to D$ à partir de l'ensemble vide. Pareil pour $\neg D \to \neg D$. On construit maintenant une nouvelle dérivation comme suit :

(a) Obs prec : $\neg D \to D$

(b) Obs prec : $\neg D \to \neg D$

(c) Axiome 6 : $(\neg D \to D) \to ((\neg D \to \neg D) \to \neg\neg D)$

(d) Modus ponens, c, a, b : $\neg\neg D$

(e) Axiome 10 : $\neg\neg D \to D$

(f) Modus ponens e, d : D

Enfin, nous avons une dérivation de D à partir de l'ensemble vide, donc $D = A \vee \neg A$ est un théorème dans H_{prop}.

Théorème de l'a□aiblissement

Théorème : Si $\vdash A$ est dérivable dans le système H_{prop}, alors $; B \vdash A$ est aussi dérivable dans le système H_{prop} pour toute formule B.

Dit autrement,
Si $\vdash_{H_{prop}} A$, alors $; B \vdash_{H_{prop}} A$ pour toute formule B.

Propriétés du système H_{prop}

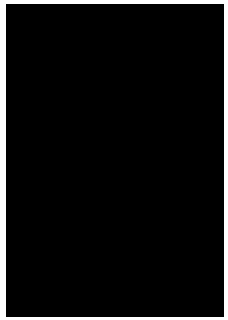
Théorème : Le système H_{prop} est correct, i.e., si $\vdash_{H_{prop}} A$, alors $\models A$.

Preuve : Par induction sur l'arbre de derivation de $\vdash_{H_{prop}} A$.

Théorème : Le système H_{prop} est complet, i.e., si $\models A$, alors $\vdash_{H_{prop}} A$.

Preuve : Dans la suite du cours.

Les séquents en logique



Gerhard Gentzen: mathématicien allemand (1909 - 1945)

La notion de séquent

Définition : Un séquent est un couple de la forme $\vdash$, où et sont des *multi-ensembles* de formules.

La formule associée à un séquent de la forme $A_1; \ldots; A_n \vdash B_1; \ldots; B_k$ est donnée par :

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_k$$

Rappel : une conjonction vide est vraie, une disjonction vide est fausse.

Sémantique d'un séquent

Définition : Un séquent $A_1; \ldots; A_n \vdash B_1; \ldots; B_k$ est valide ssi sa formule associée $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow (B_1 \vee \ldots \vee B_k)$ est valide.

Les ingrédients d'un calcul de séquents

Pour définir un calcul de séquents :

- On fixe des séquents axiomes (des séquents particuliers)
- On fixe des règles d'inférence de la forme $\dfrac{{}_1 \vdash \quad {}_1 \ldots \quad {}_n \vdash \quad {}_n}{\vdash}$

Systèmes avec séquents

Définition : La dérivation du séquent $\vdash$ dans un système $\mathcal{S}$ quelconque, ou $\mathcal{S}$-dérivation de $\vdash$, est un arbre fini de *séquents* tel que

- chaque feuille est un axiome de $\mathcal{S}$.
- si $\vdash$ est le père de n séquents $_1 \vdash {}_1$ et $\cdots$ et $_n \vdash {}_n$, alors $\vdash$ est obtenu par l'application d'une règle d'inférence de $\mathcal{S}$ sur ses enfants $_1 \vdash {}_1$ et $\cdots$ et $_n \vdash {}_n$.
- la racine de l'arbre est le séquent $\vdash$.

Notation : On écrit $\vdash_{\mathcal{S}}$ pour dire que le séquent $\vdash$ est $\mathcal{S}$-dérivable et on écrit simplement $\vdash$ pour parler du séquent en tant qu'objet.

Preuves et théorèmes

Définition : Soit $\mathcal{S}$ un système avec séquents. Une preuve d'un séquent $\vdash$ dans $\mathcal{S}$ est une dérivation de $\vdash$ dans $\mathcal{S}$. Un théorème de $\mathcal{S}$ est un séquent de la forme $\emptyset \vdash$ ayant une preuve dans $\mathcal{S}$.

Remarque

Un système axiomatique peut aussi se voir comme un calcul avec séquents. Ainsi par exemple, pour $H_{\rightarrow}$:

- Les séquents axiomes sont de la forme

$$\begin{array}{l} \vdash A \text{ (si } A \in \quad) \\ \vdash A \rightarrow (B \rightarrow A) \\ \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \end{array}$$

- La règle d'inférence est de la forme

$$\frac{\vdash A \rightarrow B \qquad \vdash A}{\vdash B}$$

Système $DN_{\rightarrow}$: déduction naturelle pour $\rightarrow$

Formules : l'ensemble inductif construit à partir de toutes les lettres propositionnelles et du symbole binaire $\rightarrow$.
Axiome : $; A \vdash A$
Règles d'inférence :

$$\frac{; A \vdash B}{\vdash A \rightarrow B}\ (\rightarrow i) \qquad \frac{\vdash A \qquad \vdash A \rightarrow B}{\vdash B}\ (\rightarrow e)$$

Exemple de dérivation dans $DN_{\to}$

$$\dfrac{\dfrac{A; B \vdash A \quad (axiome)}{A \vdash B \to A}\,(\to\ i)}{\vdash A \to (B \to A)}\,(\to\ i)$$

Notation : $\emptyset \vdash_{DN_{\to}} A \to (B \to A)$ ou $\vdash_{DN_{\to}} A \to (B \to A)$

Nous avons démontré l'axiome 1 de $H_{\to}$ dans le système $DN_{\to}$.
De manière similaire on peut démontrer
$\vdash_{DN_{\to}} A \to (B \to A)$ pour tout .

Un autre exemple de dérivation dans $DN_{\to}$

Soit = $A \to (B \to C); A \to B; A$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{`\ A\ !\ (B\ !\ C) \qquad `\ A}{`\ B\ !\ C}\,(!\ e) \qquad \dfrac{`\ A\ !\ B \qquad `\ A}{`\ B}\,(!\ e)}{(A\ !\ (B\ !\ C))\ (A\ !\ B)\ A\ `\ C}}{(A\ !\ (B\ !\ C))\ (A\ !\ B)\ `\ A\ !\ C}}{(A\ !\ (B\ !\ C))\ `\ (A\ !\ B)\ !\ (A\ !\ C)}}{`\ (A\ !\ (B\ !\ C))\ !\ ((A\ !\ B)\ !\ (A\ !\ C))}$$

Nous avons démontré l'axiome 2 de $H_{\to}$ dans $DN_{\to}$.
De manière similaire on peut démontrer
$\vdash_{DN_{\to}} (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ pour tout .

Équivalence entre $H_{\to}$ et $DN_{\to}$ (i)

Théorème : Si $\vdash_{H_{\to}} A$, alors $\vdash_{DN_{\to}} A$.

Preuve : Par induction sur la dérivation de A à partir de dans le système $H_{\to}$.

- $A \in$
- A est une instance d'axiome dans $H_{\to}$
- La dernière règle est le modus ponens.

Équivalence entre $H_{\to}$ et $DN_{\to}$ (ii)

Théorème : Si $\vdash_{DN_{\to}} A$, alors $\vdash_{H_{\to}} A$.

Preuve : Par induction sur la $DN_{\to}$-dérivation de $\vdash A$.

- Si A est axiome dans $DN_{\to}$, alors c'est trivial.
- Si l'arbre se termine par $\to$ i, alors on utilise le théorème de la déduction.
- Si l'arbre se termine par $\to$ e, alors on utilise modus ponens.

Système DN_{prop} : déduction naturelle pour $\rightarrow, \vee, \wedge, \neg$

Axiome : $; A \vdash A$

Règles d'inférence :

$$\frac{; A \vdash B}{\vdash A \rightarrow B}\ (\rightarrow\ i) \qquad \frac{\vdash A \qquad \vdash A \rightarrow B}{\vdash B}\ (\rightarrow\ e)$$

$$\frac{\vdash A \qquad \vdash B}{\vdash A \wedge B}\ (\wedge\ i)$$

$$\frac{\vdash A \wedge B}{\vdash A}\ (\wedge\ e) \qquad \frac{\vdash A \wedge B}{\vdash B}\ (\wedge\ e)$$

$$\frac{\vdash A}{\vdash A \vee B}\ (\vee i) \qquad \frac{\vdash B}{\vdash A \vee B}\ (\vee i)$$

$$\frac{\vdash A \vee B \qquad ; A \vdash C \qquad ; B \vdash C}{\vdash C}\ (\vee e)$$

$$\frac{; A \vdash B \qquad ; A \vdash \neg B}{\vdash \neg A}\ (\neg i)$$

$$\frac{\vdash A \qquad \vdash \neg A}{\vdash B}\ (\neg e) \qquad \frac{\vdash \neg\neg A}{\vdash A}\ (\neg e)$$

La dernière règle $\neg e$ est connue sous le nom de raisonnement par l'absurde.

Exemple de dérivation dans DN_{prop}

Tiers exclu

$B = A \vee \neg A$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg B; A \vdash A}{\neg B; A \vdash B}\ (\vee i) \qquad \neg B; A \vdash \neg B}{\neg B \vdash \neg A}\ (\neg i)}{\neg B \vdash B}\ (\vee i) \qquad \neg B \vdash \neg B}{\vdash \neg\neg B}\ (\neg i)}{\vdash B}\ (\neg e)$$

Un autre exemple de dérivation dans DN_{prop}

Loi de Peirce

$G = (H \to A) \to A$, $H = A \to B$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{:G\ H\ !\ A \vdash H\ !\ A \qquad :G\ H\ !\ A \vdash H}{:G\ H\ !\ A \vdash A}\,(!\ e)}{:G \vdash G}\,(!\ i) \qquad :G \vdash :G}{\vdash :\,:G}\,(:e)}{\vdash G}\,(:e)$$

$G = (H \to A) \to A$, $H = A \to B$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg G; H \to A; A; H \to A \vdash A}{\neg G; H \to A; A \vdash G}\,(\to\ i) \qquad \neg G; H \to A; A \vdash \neg G}{\neg G; H \to A; A \vdash B}\,(\neg e)}{\neg G; H \to A \vdash H}\,(\to\ i)$$

Comment transformer des dérivations dans DN_{prop}

Théorème : (A□aiblissement) Si $\vdash A$ est dérivable dans le système DN_{prop}, alors $; B \vdash A$ l'est aussi (et la hauteur de l'arbre de dérivation ne change pas).

Théorème : (Contraction) Si $; B; B \vdash A$ est dérivable dans le système DN_{prop}, alors $; B \vdash A$ l'est aussi.

Observations

Le raisonnement par l'absurde entraîne le tiers exclu et la loi de Peirce.
Mais, aussi

Le tiers exclu entraîne la loi de Peirce.
Soit $F = (A \to B) \to A$.

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \vee \neg A \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma; F; A \vdash A}{\Gamma; A \vdash F \to A} \qquad \dfrac{\Gamma; \neg A; F \vdash F \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma; \neg A; F; A \vdash A \qquad \Gamma; \neg A; F; A \vdash \neg A}{\Gamma; \neg A; F; A \vdash B}}{\Gamma; \neg A; F \vdash A \to B}}{\Gamma; \neg A; F \vdash A}}{\Gamma; \neg A \vdash F \to A}}{\Gamma \vdash ((A \to B) \to A) \to A}$$

Dérivation dans $\mathcal{G}$

On note $\vdash_{\mathcal{G}}$ si le séquent $\vdash$ est dérivable dans le système $\mathcal{G}$.

Premier exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

Tiers exclu

$$\dfrac{\dfrac{p \vdash p\ (ax)}{\vdash p; \neg p}\ (\neg\ d)}{\vdash p \vee \neg p}\ (\vee\ d)$$

Deuxième exemple de dérivation dans $\mathcal{G}$

Loi de Peirce

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash q; p\ (ax)}{\vdash p \to q; p}\ (\to\ d) \qquad p \vdash p\ (ax)}{(p \to q) \to p \vdash p}\ (\to\ g)}{\vdash ((p \to q) \to p) \to p}\ (\to\ d)$$

Comment transformer quelques dérivations dans $\mathcal{G}$

Théorème : (A□aiblissement) Si $\vdash_{\mathcal{G}}$, alors $; A \vdash_{\mathcal{G}}$ et $\vdash_{\mathcal{G}} A;$.

Théorème : (Contraction) Si $; A; A \vdash_{\mathcal{G}}$, alors $; A \vdash_{\mathcal{G}}$. Si $\vdash_{\mathcal{G}}$ $; A; A$, alors $\vdash_{\mathcal{G}}$ $; A$ l'est aussi.

Théorème : (Élimination de coupures) Si $\vdash_{\mathcal{G}}$, alors il existe une dérivation de $\vdash_{\mathcal{G}}$ qui n'utilise pas la règle de coupure.

Équivalence entre LK et $\mathcal{G}$

Théorème : Si $\vdash$ est dérivable en LK, alors $\vdash$ est dérivable en $\mathcal{G}$.

Théorème : Si $\vdash$ est dérivable en $\mathcal{G}$, alors $\vdash$ est dérivable en LK.

Équivalence entre DN et $\mathcal{G}$

Théorème : Si $\vdash_{DN_{prop}} A$, alors $\vdash_{\mathcal{G}} A$.

Remarque : Si $\vdash_{\mathcal{G}}$, alors soit soit n'est pas vide.

Théorème : Si $\vdash_{\mathcal{G}}$, alors

- Si $= \emptyset$, alors $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee$.
- Si $= \emptyset$, alors $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg$.
- Sinon, $\vdash_{DN_{prop}} \bigvee \neg \vee \bigvee$

Propriétés du système $\mathcal{G}$

Théorème : Toute règle de $\mathcal{G}$ de la forme $\dfrac{S_1 ::: S_n}{S}$ est réversible, i.e., $S_1 \wedge ::: \wedge S_n$ est valide ssi S est valide.

Théorème : Le système $\mathcal{G}$ est correct, i.e., si $\vdash_{\mathcal{G}}$, alors $\vdash$ est valide.

Preuve : Par induction sur la dérivation du séquent $\vdash$ dans le système $\mathcal{G}$ à l'aide de la réversibilité et du fait que les axiomes sont des séquents valides.

Propriétés du système $\mathcal{G}$

Théorème : Le système $\mathcal{G}$ est complet, i.e., si $\vdash$ est valide, alors $\vdash_{\mathcal{G}}$.

Preuve :

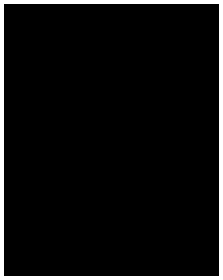
- On construit un arbre de dérivation pour le séquent $\vdash$ dans le système $\mathcal{G}$ sans coupures, en appliquant les règles du système "du bas vers le haut" aussi longtemps que possible.
- Ce processus s'arrête nécessairement car tout séquent "hypothèse" est plus petit que le séquent "conclusion" (propriété de sous-formule).
- Puisque le séquent de la racine est valide, tous les séquents introduits par cette construction sont valides d'après le théorème de réversibilité.

Suite de la preuve

- Pour conclure il faut montrer que la construction s'arrête sur des séquents axiomes, c'est à dire, que toute feuille de l'arbre de dérivation est un axiome.
- On raisonne par l'absurde.
- Si le séquent d'une *feuille* contient encore un connecteur logique, alors on peut toujours appliquer une règle du système, ce qui est en contradiction avec le fait que c'était une feuille.
- Si le séquent d'une feuille n'a plus de connecteur logique mais il n'est pas un axiome, il est de la forme $p_1; \ldots; p_m \vdash q_1; \ldots q_n$, avec $p_i \neq q_j$, pour tout $i; j$.
- L'interprétation qui donne V à toutes les lettres p_i et F à toutes les lettres q_j falsifie ce séquent. Contradiction avec le fait que ce séquent soit valide.

La résolution en calcul propositionnel

Résolution



John Alan Robinson: philosophe, mathématicien, informaticien anglais/américain (1930 -)

Résolution

Méthode par réfutation :

$\models A$ ssi A s'obtient à partir de par résolution

$\models A$ ssi $\cup \{\neg A\}$ insatisfaisable ssi $\cup \{\neg A\}$ est réfutable

Forme Normale Conjonctive (FNC)

Définition :

- Un littéral est une formule de la forme p ou $\neg p$, où p est une lettre propositionnelle quelconque.
- Une clause est une formule de la forme $l_1 \vee ::: \vee l_n$, $n \geq 0$, où chaque l_i est un littéral. La clause vide ($n = 0$) s'écrit $\perp$.
- Une formule est en forme normal conjonctive ssi elle est de la forme $D_1 \wedge ::: \wedge D_n$, $n \geq 0$, où chaque D_i est une clause.

Forme Normale Disjonctive (FND)

Définition :

- Une conjonction élémentaire est une formule de la forme $l_1 \wedge ::: \wedge l_n$, $n \geq 0$, où chaque l_i est un littéral.La conjonction élémentaire vide ($n = 0$) s'écrit $\top$.
- Une formule est en forme normal disjonctive ssi elle est de la forme $C_1 \vee ::: \vee C_n$, $n \geq 0$, où chaque C_i est une conjonction élémentaire.

Existence de la FND et de la FNC

Théorème : Soit A une formule.

- Il existe une formule A_1 en FND telle que $A_1 \equiv A$.
- Il existe une formule A_2 en FNC telle que $A_2 \equiv A$.

Lemme : Soit $= \{A_1; :::; A_n\}$ et $FNC_\Delta = \{E_1; :::; E_n\}$ où chaque E_i est une FNC de A_i. Pour chaque E_i de la forme $D_{i_1} \wedge ::: \wedge D_{i_k}$ on construit $C_{E_i} = \{D_{i_1}; :::; D_{i_k}\}$. Soit $C_\Delta = \bigcup_{1 \leq i \leq n} C_{E_i}$. Alors est satisfaisable ssi C_Δ est satisfaisable.

Formes normales et tables de vérité

p	q	r	A
V	V	V	F
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

$A \equiv \quad (p \wedge q \wedge \neg r \qquad F \qquad d$

Règles de la résolution

Axiomes : aucun
Règles d'inférence :
(D et C sont deux clauses)

$$\frac{D \vee p \quad C \vee \neg p}{D \vee C}\ (coupure) \qquad \frac{p \quad \neg p}{\bot}\ \text{(cas particulier)}$$

$$\frac{D \vee p \vee p}{D \vee p}\ (factorisation)$$

Dérivation par résolution

Exemple :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{p \vee r \vee s \quad r \vee \neg s}{p \vee r \vee r}}{p \vee r} \qquad \neg r}{p}$$

Notation : Une dérivation de la clause p à partir de l'ensemble $\{p \vee r \vee s; r \vee \neg s; \neg r\}$ s'écrit

$$\{p \vee r \vee s; r \vee \neg s; \neg r\} \vdash_R p$$

Réfutation

Définition : Un ensemble de clauses est réfutable ssi $\vdash_R \bot$.

Exemple :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{p \vee r \vee s \quad r \vee \neg s}{p \vee r \vee r}}{p \vee r} \qquad \neg r}{p} \qquad \neg p}{\bot}$$

$$\{p \vee r \vee s; r \vee \neg s; \neg r; \neg p\} \vdash_R \bot$$

Propriétés de la résolution

Théorème : La résolution est correcte, i.e., si $\vdash_R A$, alors $\models A$ et si $\vdash_R \bot$, alors est insatisfaisable.

Théorème : La résolution est complète pour la refutation, i.e., si est insatisfaisable, alors $\vdash_R \bot$.