

Analyse de performance & Simulations

VLADY RAVELOMANANA

vl ad@l i afa. j ussi eu. fr

- 0/ Probabilités, statistiques comme outils informatiques.
- 1/ Rappels de probabilités.
- 2/ Génération aléatoire (principes et méthodes).
- 3/ Rappels et éléments de statistiques (**si nécessaire**).
- 4/ Evaluation de performances.
- 5/ Modèles mathématiques et analyse.
- 6/ Simulation.
- 7/ Méthodologie de l'évaluation de performances

Probabilités, statistiques et informatique

Un premier exemple issu de la théorie des graphes

Un *graphe* G est donné par un couple (V, E) où $V = \{1, 2, \dots, n\}$ est l'ensemble des sommets et E est l'ensemble des arêtes reliant chacune une paire de sommets (on parle alors de *sommets adjacents*).

Une *coloration propre* d'un graphe est donnée par l'affectation de *couleurs* aux sommets de ce graphe de telle sorte qu'aucune paire de sommets adjacents n'aient la même couleur. Le *nombre chromatique* d'un graphe G est le plus petit nombre de couleurs nécessaire pour avoir une coloration propre. Ce nombre est noté $\chi(G)$

La *circonférence* d'un graphe G , notée $g(G)$, est la longueur du *plus petit cycle* de G .

On se pose alors la question, existe-t-il des graphes de circonférence et de nombre chromatique *arbitrairement grands*? A vue d'oeil, la réponse serait **non**!

On se pose alors la question, existe-t-il des graphes de circonférence et de nombre chromatique *arbitrairement grands*? A vue d'oeil, la réponse serait **non**!

Et pourtant, ...

Théorème. [ERDŐS 1959]

Pour tout $g, k > 0$ il existe un graphe G tel que $\chi(G) \geq k$ et $g(G) \geq g$.

L'idée principale est issue de la méthode dite *probabiliste*.

Preuve du théorème d'Erdős (1/3)

L'idée principale est issue de la méthode dite *probabiliste*.

On considère un **graphe aléatoire** avec n sommets $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ où chacune des $\binom{n}{2}$ arêtes est présente avec une probabilité p . Ce graphe est noté $G(n, p)$. Si un graphe a un nombre chromatique égal à k alors il existe au moins un ensemble de taille $\frac{n}{k}$ sans arête (ensemble indépendant).

L'idée principale est issue de la méthode dite *probabiliste*.

On considère un **graphe aléatoire** avec n sommets $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ où chacune des $\binom{n}{2}$ arêtes est présente avec une probabilité p . Ce graphe est noté $G(n, p)$. Si un graphe a un nombre chromatique égal à k alors il existe au moins un ensemble de taille $\frac{n}{k}$ sans arête (ensemble indépendant).

Pour montrer que $\chi(G) \geq k$ il suffirait alors de prouver qu'avec une probabilité suffisamment grande, la taille de tout ensemble indépendant est au plus $\frac{n}{k}$.

L'idée principale est issue de la méthode dite *probabiliste*.

On considère un *graphe aléatoire* avec n sommets $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ où chacune des $\binom{n}{2}$ arêtes est présente avec une probabilité p . Ce graphe est noté $G(n, p)$. Si un graphe a un nombre chromatique égal à k alors il existe au moins un ensemble de taille $\frac{n}{k}$ sans arête (ensemble indépendant).

Pour montrer que $\chi(G) \geq k$ il suffirait alors de prouver qu'avec une probabilité suffisamment grande, la taille de tout ensemble indépendant est au plus $\frac{n}{k}$.

On majore la probabilité suivante

$$\mathbb{P} \left[G(n, p) \text{ ait un ens. ind. de taille } \frac{n}{2k} \right] \leq \binom{n}{\frac{n}{2k}} (1-p)^{\binom{n/2k}{2}}$$

en choisissant $p = \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}$ pour $\varepsilon > 0$. On trouve alors que la probabilité est au plus $e^{n \log 2 - pn^2/8k}$ (tendant vers 0 quand n est grand).

Preuve du théorème d'Erdős (2/3)

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de cycles de longueur au plus g . Par linéarité, nous avons

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^g \binom{n}{i} \frac{(i-1)!}{2} p^i.$$

On montre alors que ($0 < \varepsilon < 1/g$)

$$\mathbb{E}(X) \leq g(np)^g = gn^{\varepsilon g}.$$

Donc, pour n suffisamment grand, on a $\mathbb{E}(X) < 1/4$. En utilisant l'inégalité de Markov on a alors

$$\mathbb{P}(X > n/2) \leq \mathbb{P}(X > 2\mathbb{E}(X)) < 1/2.$$

Ainsi, en choisissant n grand, $p = \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}$ $0 < \varepsilon < 1/g$, la probabilité que $G(n, p)$ ait un ens. ind. de taille $n/2k$ OU un nombre de cycles (plus grand que $n/2$) de taille au plus g est strictement plus petit que 1.

On finit en construisant un graphe G' en enlevant un sommet de chaque petit cycle de G .

On finit en construisant un graphe G' en enlevant un sommet de chaque petit cycle de G .

- Le nombre de sommets de G' est au moins $\frac{n}{2}$.

On finit en construisant un graphe G' en enlevant un sommet de chaque petit cycle de G .

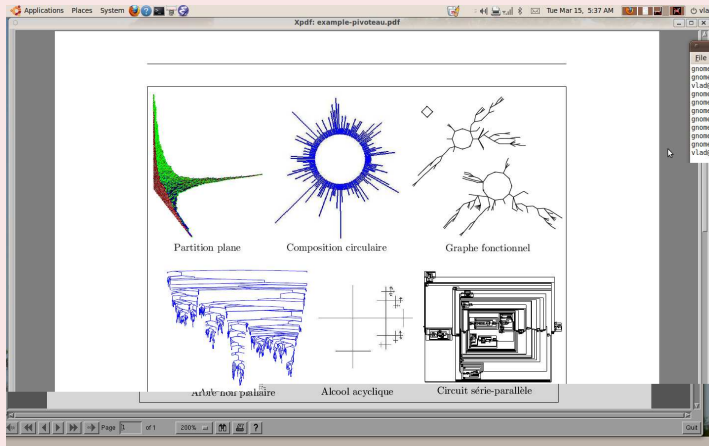
- Le nombre de sommets de G' est au moins $\frac{n}{2}$.
- La taille de l'ens. ind. de taille maximum n'est pas plus grand que $\frac{n}{2k}$.

On finit en construisant un graphe G' en enlevant un sommet de chaque petit cycle de G .

- Le nombre de sommets de G' est au moins $\frac{n}{2}$.
- La taille de l'ens. ind. de taille maximum n'est pas plus grand que $\frac{n}{2k}$.
- Il n'y a plus de cycles de taille plus petite que g .

A quoi on veut arriver?

Exemples de générations aléatoires (cf. [K. PIVOTEAU])



- [LUC DEVROYE] "Non-Uniform Random Variate Generation" Voir <http://cg.scs.carleton.ca/~luc/rnbookindex.html>
- [JEAN-YVES LE BOUDEC] "Performance Evaluation Lecture Notes (Methods, Practice and Theory for the Performance Evaluation of Computer and Communication Systems)" (Version online <http://ica1www.epfl.ch/perfeval/printMe/perf.pdf>)
- [ALON NOGA, JOEL SPENCER] The probabilistic method (2ed). New York: Wiley-Interscience (2000).
- [PHILIPPE FLAJOLET, ROBERT SEDGEWICK] Analytic Combinatorics. Online version <http://algo.inria.fr/flajolet/Publications/book.pdf>

- Un **projet** à rendre par e-mail avec soutenance (vers fin Mai 2012).
- Un **examen** (vers mi-Mai 2012).
- Des notes éventuelles de participation aux TDs et aux cours.