

# Remarques sur quelques méthodes asymptotiques élémentaires

# Remarques sur quelques méthodes asymptotiques élémentaires

- ① La méthode de Laplace.
- ② La formule d'Euler-Maclaurin.
- ③ Quelques exemples & applications.



## Formule intégrale : les hypothèses

On veut étudier **asymptotiquement** une intégrale de la forme

$$I = \int_a^b e^{-\lambda g(x)} h(x) dx,$$

où

1.  $\lambda$  est grand;
2.  $h(x)$ ,  $g(x)$  sont des fonctions de  $C^2$  sur  $(a, b)$  et  $g(x)$  a un **minimum local**  $x_0$  sur  $(a, b)$  (avec  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ).

3. L'intégrale

$$\int_a^b |h(x)| e^{g(x)} dx$$

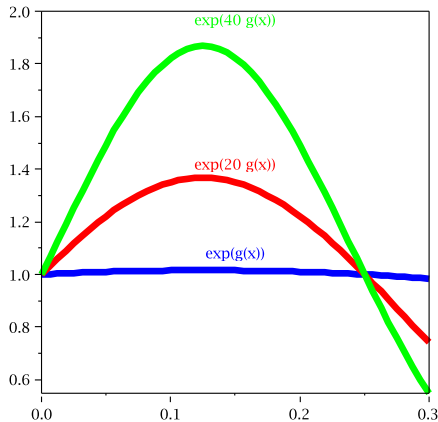
converge.

## L'idée générale de la méthode

Il s'agit de montrer que la contribution de l'intégrale est **essentiellement concentrée** au voisinage de  $x_0$ .

## La méthode de Laplace (2/4)

Derrière l'idée générale, on s'achemine très rapidement vers une “gaussienne”. Ex : pour un certain  $g(x)$  avec  $x_0 = 1/8 = 0.125$  (ici  $\lambda = 20$  puis  $40 \dots$ )



## La méthode de Laplace (3/4)

Autour de  $x_0$  nous avons comme intégrand (Taylor)

$$h(x)e^{-\lambda g(x)} = h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) e^{-\lambda g(x_0) - \frac{\lambda}{2} g''(x_0)(x - x_0)^2 + o(\lambda(x - x_0)^2)}$$

## La méthode de Laplace (3/4)

Autour de  $x_0$  nous avons comme intégrand (Taylor)

$$h(x)e^{-\lambda g(x)} = h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) e^{-\lambda g(x_0) - \frac{\lambda}{2} g''(x_0)(x - x_0)^2 + o(\lambda(x - x_0)^2)}$$

On coupe en trois morceaux, à savoir

$$\int_a^{x_0} f(x) dx = \int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x) dx .$$

Autour de  $x_0$  nous avons comme intégrand (Taylor)

$$h(x)e^{-\lambda g(x)} = h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) e^{-\lambda g(x_0) - \frac{\lambda}{2} g''(x_0)(x - x_0)^2 + o(\lambda(x - x_0)^2)}$$

On coupe en trois morceaux, à savoir

$$\int_a^{x_0} f(x) dx = \int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x) dx .$$

Comme  $g$  est continue, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  nous avons  $g(x_0 \pm \varepsilon) \sim g(x_0)$  et pour  $h$  on a ( $h \in C^2$ )

$$h(x_0 \pm \varepsilon) = h(x_0) \mp \varepsilon h'(x_0) + \frac{\varepsilon^2}{2} h''(x_0) + o(\varepsilon^2), \varepsilon \rightarrow 0 .$$



## La méthode de Laplace (3/4)

Autour de  $x_0$  nous avons comme intégrand (Taylor)

$$h(x)e^{-\lambda g(x)} = h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) e^{-\lambda g(x_0) - \frac{\lambda}{2} g''(x_0)(x - x_0)^2 + o(\lambda(x - x_0)^2)}$$

On coupe en trois morceaux, à savoir

$$\int_a^{x_0} f(x) dx = \int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x) dx .$$

Comme  $g$  est continue, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  nous avons  $g(x_0 \pm \varepsilon) \sim g(x_0)$  et pour  $h$  on a ( $h \in C^2$ )

$$h(x_0 \pm \varepsilon) = h(x_0) \mp \varepsilon h'(x_0) + \frac{\varepsilon^2}{2} h''(x_0) + o(\varepsilon^2), \varepsilon \rightarrow 0 .$$

On choisit  $\varepsilon = \varepsilon(\lambda)$  de telle sorte à ce que  $\lambda \varepsilon^2 \rightarrow \infty$  (par ex.  $\varepsilon = \lambda^{-1/4}$ ). On montre alors le résultat suivant (changement de var. dans l'intégrale centrale et majorations des deux bords)

$$I = e^{-\lambda g(x_0)} h(x_0) \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\lambda g''(x_0)}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right),$$

où le terme d'erreur en  $O(\lambda^{-1})$  signifie que l'erreur relative est bornée quand  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

## Asymptotique d'une formule intégrale

Soit l'intégrale

$$I = \int_a^b e^{-\lambda g(x)} h(x) dx,$$

où

1.  $\lambda$  est grand;
2.  $h(x)$ ,  $g(x)$  sont des fonctions de  $C^2$  sur  $(a, b)$  et  $g(x)$  a un **minimum local**  $x_0$  sur  $(a, b)$  (avec  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ).
3. L'intégrale

$$\int_a^b |h(x)| e^{g(x)} dx$$

converge.

**ALORS**

$$I = e^{-\lambda g(x_0)} h(x_0) \frac{2\pi}{\lambda g''(x_0)} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right).$$

Pour déterminer des développements asymptotiques de sommes et de séries, la forme “la plus utile” de la formule est

$$\sum_{n=a}^b f(n) \sim \int_a^b f(x) dx + \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a) ,$$

où  $a$  et  $b$  sont entiers et  $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est donnée par leur fonction génératrice exponentielle :

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} .$$

$$( B_0 = 1, B_1 = -1/2, B_2 = 1/6, B_4 = -1/30 \dots )$$

## Théorème (Cauchy-Maclaurin)

Si  $f(x)$  est positive, continue et décroissante vers 0 alors il existe une constante  $\gamma_f$  appelée **constante d'Euler de  $f$**  définie par

$$\gamma_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n f(i) - \int_1^n f(x) dx \right).$$

## Application 1 : constante d'Euler d'une fonction

### Théorème (Cauchy-Maclaurin)

Si  $f(x)$  est positive, continue et décroissante vers 0 alors il existe une constante  $\gamma_f$  appelée **constante d'Euler de  $f$**  définie par

$$\gamma_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n f(i) - \int_1^n f(x) dx \right).$$

L'exemple le plus connue est la suivante.

### Constante d'Euler-Mascheroni

$$\gamma_f = 0.57721566 \dots \quad \text{avec } f(x) = \frac{1}{x}.$$

La continuité de  $f$  garantit l'existence des intégrales  $I_n = \int_1^n f(x) dx$  pour tout entier positif. On montre que la quantité  $a_n$  définie par

$$a_n = \sum_{i=1}^n f(i) - \int_1^n f(x) dx$$

est décroissante. En effet, on a

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx \leq 0.$$

( $f$  est décroissante!). Mais on a aussi  $a_n \geq 0$  car  
 $a_n = \sum_{i=1}^n f(i) - \int_1^n f(x) dx \geq f(n) \geq 0$  (utiliser la décroissance, c-à-d  
 $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f \leq f(k)$ ).

### Théorème (De Moivre - Stirling)

Quand  $n$  est grand

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

On applique Euler-Maclaurin à la fonction  $f(x) = \log x$  et on trouve

$$\log(n!) = \sum_{i=1}^n \log i = n \log n - n + 1 + \frac{\log n}{2} + \left[ \frac{g(t)}{t} \right]_1^n + \int_1^n \frac{g(t)}{t} dt,$$

où  $g(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 \cos(2i\pi t)}{(2i\pi)^2}$ . Un peu plus de travail, notamment en montrant la formule de Wallis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}$$

conduit à la formule.



## Application 3 : La formule de Stirling avec du Laplace

On définit

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

pour  $x > 0$ . Une intégration par partie donne

## Application 3 : La formule de Stirling avec du Laplace

On définit

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

pour  $x > 0$ . Une intégration par partie donne

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x).$$

## Application 3 : La formule de Stirling avec du Laplace

On définit

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

pour  $x > 0$ . Une intégration par partie donne

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x).$$

En particulier, pour  $x = n \in \mathbb{N}$  c'est comme le factoriel! La méthode de Laplace s'applique sur l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-t+(x-1)\log t} dt \sim \sqrt{\frac{2\pi}{x}} x^x e^{-x}, \quad x \rightarrow \infty.$$

(Toutes les conditions sont vérifiées!)

## Application 4: l'exponentiel tronqué trompe

On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{n^i}{i!} e^{-n} = 1.$$

## Application 4: l'exponentiel tronqué trompe

On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{n^i}{i!} e^{-n} = 1.$$

**Arnaque.**

C'est faux! La vraie limite est  $\frac{1}{2}$ .

Soit

$$\rho_{\chi,n} = e^{-\chi} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\chi^i}{i!}.$$

Soit

$$\rho_{\chi,n} = e^{-\chi} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\chi^i}{i!}.$$

Soit

$$e_n(\chi) = \sum_{i=0}^n \frac{\chi^i}{i!}.$$

Donc on a  $\rho_{\chi,n} = e^{-\chi} e_n(\chi)$ .

Soit

$$\rho_{\chi,n} = e^{-\chi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\chi^i}{i!}.$$

Soit

$$e_n(\chi) = \sum_{i=0}^n \frac{\chi^i}{i!}.$$

Donc on a  $\rho_{\chi,n} = e^{-\chi} e_n(\chi)$ . Soit

$$\Gamma(n, \chi) = \int_{\chi}^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt.$$



Soit

$$\rho_{\chi,n} = e^{-\chi} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\chi^i}{i!}.$$

Soit

$$e_n(\chi) = \sum_{i=0}^n \frac{\chi^i}{i!}.$$

Donc on a  $\rho_{\chi,n} = e^{-\chi} e_n(\chi)$ . Soit

$$\Gamma(n, \chi) = \int_{\chi}^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt.$$

On calcule

$$e_{n-1}(\chi) = \frac{\Gamma(n, \chi)}{\Gamma(n)} e^{\chi}.$$

La quantité qui nous intéresse est

$$\rho_{n,n+1} = e^{-n} \sum_{i=0}^n \frac{n^i}{i!}.$$

La quantité qui nous intéresse est

$$\rho_{n,n+1} = e^{-n} \sum_{i=0}^n \frac{n^i}{i!}.$$

Soit aussi

$$\rho_{n,n+1} = e^{-n} e_n(n) = \frac{\Gamma(n+1, n)}{\Gamma(n+1)}$$

La quantité qui nous intéresse est

$$\rho_{n,n+1} = e^{-n} \sum_{i=0}^n \frac{n^i}{i!}.$$

Soit aussi

$$\rho_{n,n+1} = e^{-n} e_n(n) = \frac{\Gamma(n+1, n)}{\Gamma(n+1)}$$

Sous forme intégrale, nous avons

$$\rho_{n,n+1} = \frac{\int_0^\infty e^{-t} t^n dt}{\int_0^\infty e^{-t} t^n dt} = 1 - \frac{\int_0^n e^{-t} t^n dt}{\int_0^\infty e^{-t} t^n dt}.$$

La quantité qui nous intéresse est

$$\rho_{n,n+1} = e^{-n} \sum_{i=0}^n \frac{n^i}{i!}.$$

Soit aussi

$$\rho_{n,n+1} = e^{-n} e_n(n) = \frac{\Gamma(n+1, n)}{\Gamma(n+1)}$$

Sous forme intégrale, nous avons

$$\rho_{n,n+1} = \frac{\int_0^\infty e^{-t} t^n dt}{\int_0^\infty e^{-t} t^n dt} = 1 - \frac{\int_0^n e^{-t} t^n dt}{\int_0^\infty e^{-t} t^n dt}.$$

Tout comme pour le dénominateur de la fraction, la méthode de Laplace conduit à regarder la fonction

$$\exp(g(t)) = e^{-t+n \log t}. \quad g'(t) = -1 + \frac{n}{t}. \quad g''(t) = -\frac{n}{t^2} \dots$$

## Démo (esquisse 2/2)

La quantité qui nous intéresse est

$$\rho_{n,n+1} = e^{-n} \sum_{i=0}^n \frac{n^i}{i!}.$$

Soit aussi

$$\rho_{n,n+1} = e^{-n} e_n(n) = \frac{\Gamma(n+1, n)}{\Gamma(n+1)}$$

Sous forme intégrale, nous avons

$$\rho_{n,n+1} = \frac{\int_0^\infty e^{-t} t^n dt}{\int_0^\infty e^{-t} t^n dt} = 1 - \frac{\int_0^n e^{-t} t^n dt}{\int_0^\infty e^{-t} t^n dt}.$$

Tout comme pour le dénominateur de la fraction, la méthode de Laplace conduit à regarder la fonction

$$\exp(g(t)) = e^{-t+n \log t}. \quad g'(t) = -1 + \frac{n}{t}. \quad g''(t) = -\frac{n}{t^2} \dots$$

*On peut conclure rapidement en déduisant que c'est centré (au sens gaussien) en  $n$  et donc l'intégrale de 0 à  $n$  représente la moitié de celle de 0 à l'infini!*