

- 0/ Probabilités, statistiques comme outils informatiques.
- 1/ Rappels de probabilités
- 2/ Génération aléatoire (principes et méthodes).
- 3/ Rappels et éléments de statistiques.
- 4/ Evaluation de performances.
- 5/ Modèles mathématiques et analyse **ON EST ICI.**
- 6/ Simulation.
- 7/ Méthodologie de l'évaluation de performances

Modèles combinatoires

Modèles combinatoires

- 1 Objets combinatoires.
- 2 Séries génératrices exponentielles.
- 3 Génération aléatoire.

Description

La spécification de **structures combinatoires** consiste en un ensemble de règles de production construites à partir

- d'objets de base: " (de taille 0) et **atome** (de taille 1)
- d'opérateurs: **union**, **produit**, **cycle**, **séquence**, **ensemble**, ...
- d'un ensemble de **contraintes**.

Description

La spécification de **structures combinatoires** consiste en un ensemble de règles de production construites à partir

- d'objets de base: " (de taille 0) et **atome** (de taille 1)
- d'opérateurs: **union**, **produit**, **cycle**, **séquence**, **ensemble**, ...
- d'un ensemble de **contraintes**.

Exemples de structures récursives

- Arbre binaire complet et non vide.

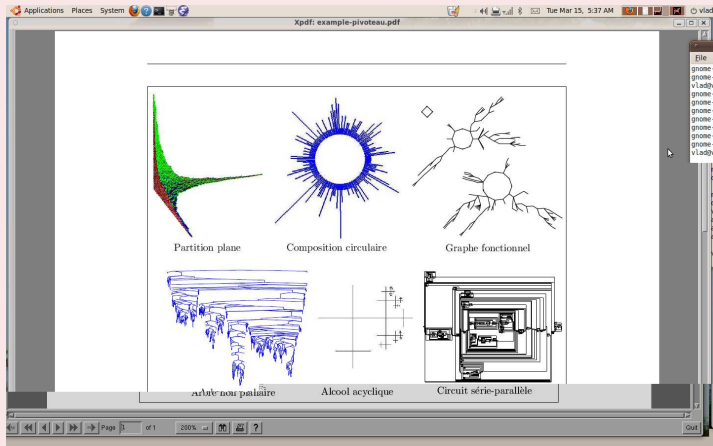
$$\mathcal{A} = \text{Root} + \text{Root} : \mathcal{A} : \mathcal{A} :$$

- Mots de Dyck sur l'alphabet à deux lettres $\{a; b\}$:

$$\mathcal{D} = " | a \mathcal{D} b \mathcal{D} :$$

Quelques images de structures combinatoires aléatoires

Exemples de générations aléatoires (cf. [K. PIVOTEAU])



Spécifications et descriptions (dessins au tableau)

Dans ce qui suit, Z est un atome (de taille 1).

Spécification	Objets
$\mathcal{A} = Z:\text{Set}(\mathcal{A})$	NON PLANE TREES

Spécifications et descriptions (dessins au tableau)

Dans ce qui suit, Z est un atome (de taille 1).

Spécification	Objets
$\mathcal{A} = Z:\text{Set}(\mathcal{A})$	NON PLANE TREES
$\mathcal{B} = Z + \mathcal{B}:\mathcal{B}$	PLANE BINARY TREES

Spécifications et descriptions (dessins au tableau)

Dans ce qui suit, Z est un atome (de taille 1).

Spécification	Objets
$\mathcal{A} = Z:\text{Set}(\mathcal{A})$	NON PLANE TREES
$\mathcal{B} = Z + \mathcal{B}:\mathcal{B}$	PLANE BINARY TREES
$\mathcal{C} = Z:\text{Sequence}(\mathcal{C})$	PLANE GENERAL TREES

Spécifications et descriptions (dessins au tableau)

Dans ce qui suit, Z est un atome (de taille 1).

Spécification	Objets
$\mathcal{A} = Z:\text{Set}(\mathcal{A})$	NON PLANE TREES
$\mathcal{B} = Z + \mathcal{B}:\mathcal{B}$	PLANE BINARY TREES
$\mathcal{C} = Z:\text{Sequence}(\mathcal{C})$	PLANE GENERAL TREES
$\mathcal{D} = \text{Set}(\text{Cycle}(Z))$	PERMUTATIONS

Spécifications et descriptions (dessins au tableau)

Dans ce qui suit, Z est un atome (de taille 1).

Spécification	Objets
$\mathcal{A} = Z:\text{Set}(\mathcal{A})$	NON PLANE TREES
$\mathcal{B} = Z + \mathcal{B}:\mathcal{B}$	PLANE BINARY TREES
$\mathcal{C} = Z:\text{Sequence}(\mathcal{C})$	PLANE GENERAL TREES
$\mathcal{D} = \text{Set}(\text{Cycle}(Z))$	PERMUTATIONS
$\mathcal{F} = \text{Set}(\text{Set}(Z; \text{card} \geq 1))$	SET PARTITIONS

Spécifications et descriptions (dessins au tableau)

Dans ce qui suit, Z est un atome (de taille 1).

Spécification	Objets
$\mathcal{A} = Z:\text{Set}(\mathcal{A})$	NON PLANE TREES
$\mathcal{B} = Z + \mathcal{B}:\mathcal{B}$	PLANE BINARY TREES
$\mathcal{C} = Z:\text{Sequence}(\mathcal{C})$	PLANE GENERAL TREES
$\mathcal{D} = \text{Set}(\text{Cycle}(Z))$	PERMUTATIONS
$\mathcal{F} = \text{Set}(\text{Set}(Z; \text{card} \geq 1))$	SET PARTITIONS
$\mathcal{M} = \text{Sequence}(\text{Set}(Z; \text{card} \geq 1))$	SURJECTIONS

Modèles combinatoires

Modèles combinatoires

- 1 Objets combinatoires.
- 2 Séries génératrices exponentielles. **ON EST ICI.**
- 3 Génération aléatoire.

SGE d'une classe

Soit \mathcal{C} une classe d'objets combinatoires étiquetés et C_n le nombre d'objets de \mathcal{C} de taille n . La série génératrice exponentielle associée à \mathcal{C} est donnée par

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{z^n}{n!} :$$

SGE d'une classe

Soit \mathcal{C} une classe d'objets combinatoires étiquetés et C_n le nombre d'objets de \mathcal{C} de taille n . La série génératrice exponentielle associée à \mathcal{C} est donnée par

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{z^n}{n!} :$$

Spécifications, descriptions et SGE

Spécification	Objets	SGE
$\mathcal{A} = \mathbb{Z}:\text{Set}(\mathcal{A})$	NON PLANE TREES	$A(z) = z \exp(A(z))$

Spécifications, descriptions et SGE

Spécification	Objets	SGE
$\mathcal{A} = Z:\text{Set}(\mathcal{A})$	NON PLANE TREES	$A(z) = z \exp(A(z))$
$\mathcal{B} = Z + \mathcal{B}:\mathcal{B}$	PLANE BINARY TREES	$B(z) = z + B(z)^2$

Spécifications, descriptions et SGE

Spécification	Objets	SGE
$\mathcal{A} = Z:\text{Set}(\mathcal{A})$	NON PLANE TREES	$A(z) = z \exp(A(z))$
$\mathcal{B} = Z + \mathcal{B}:\mathcal{B}$	PLANE BINARY TREES	$B(z) = z + B(z)^2$
$\mathcal{C} = Z:\text{Sequence}(\mathcal{C})$	PLANE GENERAL TREES	$C(z) = z/(1 - C(z))$

Spécifications, descriptions et SGE

Spécification	Objets	SGE
$\mathcal{A} = \mathcal{Z}:\text{Set}(\mathcal{A})$	NON PLANE TREES	$A(z) = z \exp(A(z))$
$\mathcal{B} = \mathcal{Z} + \mathcal{B}:\mathcal{B}$	PLANE BINARY TREES	$B(z) = z + B(z)^2$
$\mathcal{C} = \mathcal{Z}:\text{Sequence}(\mathcal{C})$	PLANE GENERAL TREES	$C(z) = z/(1 - C(z))$
$\mathcal{D} = \text{Set}(\text{Cycle}(\mathcal{Z}))$	PERMUTATIONS	$D(z) = \frac{1}{1-z}$

Quelques exemples de constructions et leur SGE

Spécifications, descriptions et SGE

Spécification

Spécifications, descriptions et SGE

Spécification	Objets	SGE
$\mathcal{A} = \mathbb{Z}:\text{Set}(\mathcal{A})$	NON PLANE TREES	$A(z) = z \exp(A(z))$
$\mathcal{B} = \mathbb{Z} + \mathcal{B}:\mathcal{B}$	PLANE BINARY TREES	$B(z) = z + B(z)^2$
$\mathcal{C} = \mathbb{Z}:\text{Sequence}(\mathcal{C})$	PLANE GENERAL TREES	$C(z) = z/(1 - C(z))$
$\mathcal{D} = \text{Set}(\text{Cycle}(\mathbb{Z}))$	PERMUTATIONS	$D(z) = \frac{1}{1-z}$
$\mathcal{F} = \text{Set}(\text{Set}(\mathbb{Z}; \text{card} \geq 1))$	SET PARTITIONS	$F(z) = e^{(e^z - 1)}$
$\mathcal{M} = \text{Sequence}(\text{Set}(\mathbb{Z}; \text{card} \geq 1))$	SURJECTIONS	$M(z) = \frac{1}{1 - (e^z - 1)}$

Spécifications, descriptions et SGE

Spécification	Objets	SGE
$\mathcal{A} = \mathbb{Z}:\text{Set}(\mathcal{A})$	NON PLANE TREES	$A(z) = z \exp(A(z))$
$\mathcal{B} = \mathbb{Z} + \mathcal{B}:\mathcal{B}$	PLANE BINARY TREES	$B(z) = z + B(z)^2$
$\mathcal{C} = \mathbb{Z}:\text{Sequence}(\mathcal{C})$	PLANE GENERAL TREES	$C(z) = z/(1 - C(z))$
$\mathcal{D} = \text{Set}(\text{Cycle}(\mathbb{Z}))$	PERMUTATIONS	$D(z) = \frac{1}{1-z}$
$\mathcal{F} = \text{Set}(\text{Set}(\mathbb{Z}; \text{card} \geq 1))$	SET PARTITIONS	$F(z) = e^{(e^z-1)}$
$\mathcal{M} = \text{Sequence}(\text{Set}(\mathbb{Z}; \text{card} \geq 1))$	SURJECTIONS	$M(z) = \frac{1}{1-(e^z-1)}$

Premiers termes

On développe sur **MAPLE** (ou **SAGE** ou ...) pour obtenir les premiers termes

$$A(z) = z + z^2 + \frac{3}{2}z^3 + \frac{8}{3}z^4 + \frac{125}{24}z^5 + O(z^6) :$$

$$F(z) = 1 + z + z^2 + \frac{5}{6}z^3 + \frac{5}{8}z^4 + \frac{13}{30}z^5 + O(z^6) :$$

Modèles combinatoires

Modèles combinatoires

- 1 Objets combinatoires.
- 2 Séries génératrices exponentielles.
- 3 Génération aléatoire. **ON EST ICI.**

Génération uniforme

On note `GENC` la procédure pour générer une classe combinatoire \mathcal{C} . Notons que

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{z^n}{n!}$$

est la série SGE associée à \mathcal{C} . On voudrait générer uniformément un élément de taille n de cette classe.

Génération uniforme

On note **GENC** la procédure pour générer une classe combinatoire \mathcal{C} . Notons que

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{z^n}{n!}$$

est la série SGE associée à \mathcal{C} . On voudrait générer uniformément un élément de taille n de cette classe.

Un premier exemple: génération pour l'Union Disjointe

```
GENC := procedure(n: integer)
  if n=0 then return(1) endif
  if n=1 then return(Z) endif
  /?       $C(z) = A(z) + B(z); \quad C_n = A_n + B_n$       ?/
  U := UNIFORME (0,1);
  if U <  $\frac{A_n}{C_n}$ 
    then return( GENA (n))
    else return( GENB (n))
end.
```

Spécification et probabilité

On a comme spécification $\mathcal{C} = \mathcal{A}:\mathcal{B}$. Et donc, $C(z) = A(z):B(z)$. On a comme probabilité d'obtenir une structure de taille n avec une \mathcal{A} -composante de taille k et une \mathcal{B} -composante de taille $n - k$:

Spécification et probabilité

On a comme spécification $\mathcal{C} = \mathcal{A}:\mathcal{B}$. Et donc, $C(z) = A(z):B(z)$. On a comme probabilité d'obtenir une structure de taille n avec une \mathcal{A} -composante de taille k et une \mathcal{B} -composante de taille $n - k$:

$$\frac{n!}{k} \frac{A_k \cdot B_{n-k}}{C_n} ;$$

Procédure

```
GENC := procedure(n: integer)
  U := UNIFORME (0,1);
  K:=0; S:=  $\frac{n!}{C_n} \frac{A_0}{0!} \frac{B_n}{n!}$ ;
  While U > S do {
    K:=K+1;
    S:=S+  $\frac{n!}{k} \frac{A_k \cdot B_{n-k}}{C_n}$  ;
  }
  EndWhile
  Return( GENA (k). GENB (n-k));
end.
```

[FLAJOLET, VAN CUTSEM, ZIMMERMAN 91] . Voir aussi [PIVOTEAU] .

L'exemple des arbres

Les arbres enracinés sont définis par la spécification

$$\mathcal{A} = Z:\text{Set}(\mathcal{A})$$

ou encore

$$A(z) = ze^{A(z)} = z: 1 + A(z) + \frac{A(z)^2}{2!} + \dots$$

[FLAJOLET, VAN CUTSEM, ZIMMERMAN 91] . Voir aussi [PIVOTEAU] .

L'exemple des arbres

Les arbres enracinés sont définis par la spécification

$$\mathcal{A} = Z:\text{Set}(\mathcal{A})$$

ou encore

$$A(z) = ze^{A(z)} = z: 1 + A(z) + \frac{A(z)^2}{2!} + \dots$$

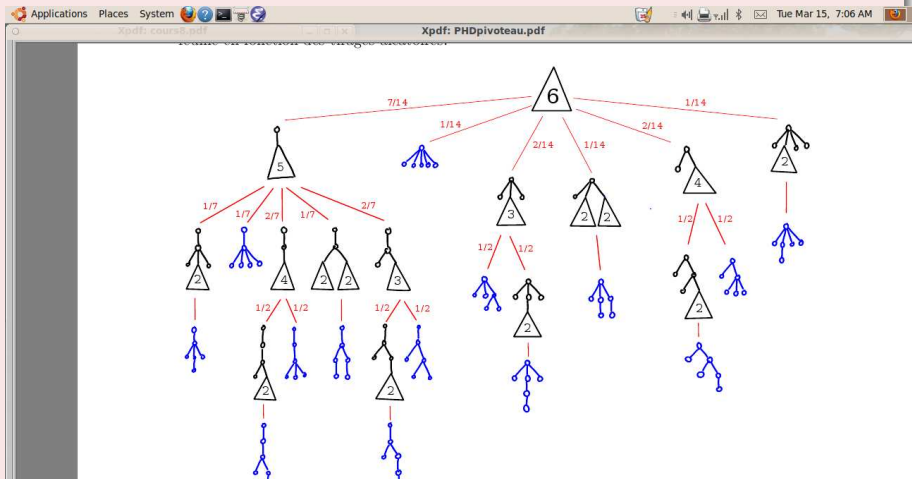
Recursion

```
GENA := procedure(n: integer)
  return(Z. GENF (n-1)).
```

```
GENF := procedure(n: integer)
  if n=0 then return(  $\emptyset$  )
  else {
    choose  $K$  with probability  $\frac{n}{k} \frac{A_k F_{n-k}}{F_n}$ ;
    return ( GENA (k). GENF (n-k) );
  }
```

Illustration sur l'arbre de Cayley à 6 sommets

Dessin de [K. PIVOTEAU]



Directions de recherche

