

TD : Feuille 2

Anniversaires

1/ Une salle contient x personnes. Quelle est la probabilité que l'anniversaire de 2 d'entre elles soit le même jour ?

2/ On effectue l'algorithme suivant à l'entrée d'une réception.

$k=0$

répéter

1/ faire entrer une personne dans la salle et regarder sa date d'anniversaire (sans regarder l'année)

2/ $k = k+1$

jusqu'à ce que deux personnes dans la salle aient le même jour d'anniversaire
retourner(k)

Quelle est l'espérance de k ? Sa variance ?

Interprétations algorithmiques

Nous avons l'algorithme suivant.

$k = 0$

$T = \emptyset$

S = ensemble fini non vide

$a = \text{Uniforme}(S)$

Tant que $a \notin T$ faire

$k = k + 1$

$T = T \cup \{a\}$

$a = \text{Uniforme}(S)$

FinTantQue

retourner($k^2/2$)

Soit $n = \text{Card}(S)$.

1/ Quel est l'espace mémoire nécessaire à cet algorithme en fonction n (taille de l'ensemble S) ?

2/ Calculer la variance de $k^2/2$. Soit V cette quantité. Montrer que quand n est grand

$$\mathbb{P} \left[n - V \leq \frac{k^2}{2} \leq n + V \right] = \frac{2}{3} + o(1).$$

3/ Conclure.