

TD n°3

Diviser pour Régner

La multiplication de polynômes

1. Combien de multiplications scalaires sont nécessaires pour multiplier deux polynômes $(ax + b) \cdot (cx + d)$? Posez $u = (a + b)(c + d)$. Combien faut-il faire de multiplications supplémentaires pour obtenir tous les coefficients du polynôme recherché?
2. Donnez un algorithme diviser pour régner pour multiplier deux polynômes de degré au plus n en utilisant ce que vous avez fait dans la partie précédente.
3. Analysez la complexité de votre algorithme pour en utilisant le "master theorem".
4. Si votre algorithme utilisait les multiplications $ac; ad; bc; bd$, quelle serait la complexité, en nombre de multiplications, de l'algorithme diviser pour régner?
5. Comparer l'algorithme de la question précédente à l'algorithme qui consiste à calculer tous les coefficients un à un en développant la multiplication de polynômes avec la méthode traditionnelle.

La multiplication de matrices

1. On peut utiliser une approche diviser pour régner pour le problème de la multiplication matricielle en découplant chaque matrice en quatre sous-matrices et en effectuant la multiplication bloc par bloc.

Les matrices à multiplier sont A et B . On partitionne A et B en blocs :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

- (a) Donner les expressions pour C_{ij} en fonction des matrices A_{ij} et B_{ij} .
 - (b) Donner un algorithme de type diviser pour régner qui calcule C .
 - (c) Calculer sa complexité. Comparez la complexité obtenue à la complexité de l'algorithme de multiplication matricielle traditionnelle.
2. (Algorithme de Strassen) En utilisant les matrices intermédiaires suivantes, donnez un algorithme de multiplication matricielle et analysez sa complexité.

$$\begin{aligned} M_1 &= (A_{11} + A_{22}) \cdot (B_{11} + B_{22}) & M_5 &= (A_{12} - A_{22}) \cdot (B_{21} + B_{22}) \\ M_2 &= (A_{11} + A_{22}) \cdot B_{11} & M_6 &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}) \\ M_3 &= A_{11} \cdot (B_{12} - B_{22}) & M_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}) \\ M_4 &= A_{22} \cdot (B_{21} - B_{11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= M_1 + M_4 - M_5 + M_7 \\ C_{12} &= M_3 + M_5 \\ C_{21} &= M_2 + M_4 \\ C_{22} &= M_1 - M_2 + M_3 + M_6 \end{aligned}$$