

TD n°3

Diviser pour Régner

La multiplication de polynômes

1. Combien de multiplications scalaires sont necessaires pour multiplier deux polynômes $(ax + b) \cdot (cx + d)$? Posez $u = (a + b)(c + d)$. Combien faut-il faire de multiplications supplementaires pour obtenir tous les coefficients du polynôme recherche?
2. Donnez un algorithme diviser pour regner pour multiplier deux polynômes de degre au plus n en utilisant ce que vous avez fait dans la partie precedente.
3. Analysez la complexite de votre algorithme pour en utilisant le "master theorem".
4. Si votre algorithme utilisait les multiplications $ac; ad; bc; bd$, quelle serait la complexite, en nombre de multiplications, de l'algorithme diviser pour regner?
5. Comparer l'algorithme de la question precedente a l'algorithme qui consiste a calculer tous les coefficients un a un en developant la multiplication de polynômes avec la methode traditionnelle.

La multiplication de matrices

1. On peut utiliser une approche diviser pour regner pour le probleme de la multiplication matricielle en decoupant chaque matrice en quatre sous-matrices et en effectuant la multiplication bloc par bloc.

Les matrices a multiplier sont A et B . On partitionne A et B en blocs :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

- (a) Donner les expressions pour C_{ij} en fonction des matrices A_{ij} et B_{ij} .
 - (b) Donner un algorithme de type diviser pour regner qui calcule C .
 - (c) Calculer sa complexite. Comparez la complexite obtenue a la complexite de l'algorithme de multiplication matricielle traditionnelle.
2. (Algorithme de Strassen) En utilisant les matrices intermediaires suivantes, donnez un algorithme de multiplication matricielle et analysez sa complexite.

$$\begin{aligned} M_1 &= (A_{11} + A_{22}) \cdot (B_{11} + B_{22}) & M_5 &= (A_{12} - A_{22}) \cdot B_{22} \\ M_2 &= (A_{11} + A_{22}) \cdot B_{11} & M_6 &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}) \\ M_3 &= A_{11} \cdot (B_{12} - B_{22}) & M_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}) \\ M_4 &= A_{22} \cdot (B_{21} - B_{11}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= M_1 + M_4 - M_5 + M_7 \\ C_{12} &= M_3 + M_5 \\ C_{21} &= M_2 + M_4 \\ C_{22} &= M_1 - M_2 + M_3 + M_6 \end{aligned}$$