

Algorithmique — M1
Examen du 18 juin 2009
Université Paris Diderot

Documents autorisés : Deux feuilles de papier format A4
Durée : 3h

On applique les cours

Exercice 1 – Multiplication

En utilisant l'algorithme de Karatsuba-Offman multipliez 2 nombres binaires : 10011011 et 10111010.

Exercice 2 – Récurrence

Étant donné que

$$T(n) = 8T(\lfloor n/2 \rfloor) + n^3 + 3$$

trouvez le comportement asymptotique de $T(n)$. Justifiez votre réponse.

Exercice 3 – Les mariages

5 enseignants (A,B,C,D,E) doivent enseigner 5 cours (I,J,K,L,M). Il faut avoir un enseignant pour chaque cours et un cours pour chaque enseignant. Les compétences des enseignants sont représentées par un tableau suivant :

	I	J	K	L	M
A	✓		✓		✓
B		✓	✓	✓	
C	✓	✓			
D				✓	✓
E		✓		✓	

Pour affecter les cours aux enseignants :

1. choisissez un algorithme de cours ;
2. appliquez l'algorithme (écrivez/dessinez toutes ses étapes) ;
3. donnez le résultat final : quel enseignant fait quel cours.

On invente des algorithmes

Exercice 4 – Méthode imposée

On cherche le maximum d'un tableau de B de n éléments.

1. Écrivez un algorithme de type diviser-pour-régner qui résout ce problème.
2. Analysez sa complexité.

Exercice 5 – Un mauvais algorithme

Étant donné un graphe non-orienté $G = (V, E)$ (de N sommets) représenté par une matrice d'adjacence $M[i, j]$ (de taille $N \times N$) et un entier M on cherche une clique de C sommets. Dans cet exercice il faut trouver un algorithme retour-arrière qui résout ce problème. On va appeler une solution partielle un tableau d'entiers $[i_1, \dots, i_k]$ dans l'ordre croissant tel que les sommets $[v_{i_1}, \dots, v_{i_k}]$ forment une clique.

1. Écrivez une fonction booléenne $\text{test}(B, k, M, N)$ qui teste est-ce que le tableau $B[k]$ est une solution partielle pour un graphe représenté par un tableau (matrice d'adjacence) $M[N, N]$.
2. Comment trouver une solution partielle de taille 0 ? Comment à partir d'une solution partielle de taille k passer à ses extensions de taille $k + 1$? Comment dire est-ce qu'on a déjà trouvé la clique de taille C ?
3. Écrivez un algorithme retour-arrière de recherche de clique.
4. Estimez la complexité de votre algorithme.

Exercice 6 – La somme

Dans un tableau d'entiers B on cherche un sous-ensemble de B qui a la somme S donnée. Par exemple pour $B = [3, 4, 5, 11]$ et $S = 16$ il y a une solution $16 = 11 + 5$. Pour le même B et pour $S = 10$ il n'y a pas de solution.

Le problème algorithmique à résoudre dans cet exercice est le suivant : étant donné $B = p_1, p_2, \dots, p_m$ (trié) et S répondre (VRAI ou FAUX) est-ce que B a une partie de somme S . On utilisera la programmation dynamique pour concevoir un algorithme qui résolve ce problème.

1. Soit $P(i, j)$ un booléen qui est vrai ssi on peut obtenir j comme somme d'une partie de i premiers éléments de tableau : p_1, \dots, p_i . Écrivez les équations de récurrence pour cette fonction sans oublier les cas de base.
2. Écrivez un algorithme efficace (récursif avec "marquage" ou itératif) pour calculer P .
3. Analysez la complexité de votre algorithme.
4. Appliquez votre algorithme à l'exemple ci-dessus ($B = [3, 4, 5, 11]$ et $S = 9$).