

## TD n°2

Diviser encore pour régner toujours

### 1 Master Theorem again

Resoudre si possible :

$$\{ T(n) = 3T(n/3) + n \}$$

$$\{ T(n) = 5T(n/8) - 3 \log n \}$$

$$\{ T(n) = 3T(n/2) + n \}$$

$$\{ T(n) = 2T(n/2) + n \log n \}$$

$$\{ T(n) = 16T(n/4) + n! \}$$

### 2 La bâtierre

On considere un tableau a deux dimensions de valeurs entieres positives telles que les valeurs d'une même ligne et celles d'une même colonne sont ordonnees, non strictement. Un tel tableau est appele *bâtierre*. Exemple : le tableau ci-dessous est une bâtierre a 4 lignes et 5 colonnes.

2	14	25	30	69
3	15	28	30	81
7	15	32	43	100
20	28	36	58	101

On etudie la recherche d'une valeur  $v$  xee dans une bâtierre  $B$ . Pour simplifier, on supposera que la bâtierre est un carre de cote  $n = 2^k$ . On distingue les deux valeurs :  $x = B[\frac{n}{2}; \frac{n}{2}]$ ,  $y = B[\frac{n}{2} + 1; \frac{n}{2} + 1]$

**Question 1 :** Montrer que si la valeur recherchee  $v$  est telle que :  $v > x$ , on peut eliminer une partie (a preciser) de la bâtierre pour poursuivre la recherche. Preciser ce qu'il est possible de faire quand  $v < y$ .

**Question 2 :** En deduire un modele de resolution de type "diviser pour regner"

**Question 3 :** Etablir l'ordre de complexite au pire de cette methode (en nombre de comparaisons).

**Question 4 :** Comment adapter cette strategie au cas d'une bâtierre de cote quelconque?

### 3 Les deux points les plus proches.

On cherche un algorithme du type "diviser pour regner" (DpR) pour resoudre le probleme suivant : On a  $n$  points dans un plan. Quels sont les deux plus proches et a quelle distance sont-ils?

Plus formellement : soit l'espace  $\mathbb{R}^2$ , muni de la metrique euclidienne notee  $d$ . Soit  $S$  un ensemble fini de  $n$  points dans  $\mathbb{R}^2$  (on note son cardinal  $|S| = n$ ). On cherche la valeur  $D$  et les deux elements  $y$  et  $z$  de  $S$  tels que :  $D = d(y, z) = \text{Minimum}(d(x_1, x_2))$ , pour  $x_1 \in S$ ,  $x_2 \in S$  et  $x_1 \neq x_2$ .

En notant  $abs(x)$  l'abscisse d'un point  $x$  et  $ord(x)$  son ordonnee, on a :

$$d(u, v) = \sqrt{(abs(u) - abs(v))^2 + (ord(u) - ord(v))^2}$$

**Question 1 :** Quelle est l'ordre de complexité (opération élémentaire : le nombre de calculs de la distance) de l'algorithme naïf de calcul de  $D$ ,  $y$  et  $z$ ?

On trie les  $n$  points par ordonnée croissante. Les données sont rangées dans un tableau  $T[1 : 2; 1 : n]$ , où  $T[1; i]$  est l'abscisse du point numéro  $i$  et  $T[2; i]$  son ordonnée, avec  $T[2; i] \leq T[2; i + 1]$ .

Soit un réel  $m$  et  $S_1 = \{x \in S \mid \text{abs}(x) \leq m\}$  et  $S_2 = \{x \in S \mid \text{abs}(x) > m\}$ .

Le schéma du programme DpR est alors le suivant :

```

1: Procédure PlusProches(S, x, y, D)
2: début
3: si |S| = 2 alors
4:   Soit u et v les deux points de S;
5:   x ← u; y ← v; D ← (u,v);
6: sinon
7:   Choisir m;
8:   PlusProches( $S_1$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $D_1$ );
9:   PlusProches( $S_2$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $D_2$ );
10:  d ← minimum( $D_1$ ;  $D_2$ );
11:  si d =  $D_1$  alors
12:    w ←  $p_1$ ; z ←  $p_2$ ;
13:  sinon
14:    w ←  $q_1$ ; z ←  $q_2$ ;
15:  fin si
16:  Rassembler
17: fin si
18: fin

```

**Question 2 :** Le calcul de étant toujours l'opération élémentaire, quel doit être l'ordre de complexité de Rassembler pour que le programme soit meilleur que le programme naïf, en supposant que  $S_1$  et  $S_2$  sont de même taille? C'est-à-dire en supposant que Rassembler est en  $O(n^\alpha)$ , que peut valoir pour que l'algorithme soit intéressant?

**Question 3 :** Pourquoi Rassembler ne peut-il pas s'écrire simplement :  $D \leftarrow d; x \leftarrow w; y \leftarrow z$ ? Donner un exemple.

Soit  $P_1$  la partie du plan située entre la droite d'équation  $x = m$  et celle d'équation  $x = m - d$ ; soit  $P_2$  celle située entre la droite d'équation  $x = m$  et celle d'équation  $x = m + d$ .

**Question 4 :** Montrer que si deux points  $r_1 \in S_1$  et  $r_2 \in S_2$  sont tels que :  $(r_1; r_2) < d$ , alors  $r_1 \in P_1$  et  $r_2 \in P_2$ .

**Question 5 :** Montrer que la zone du plan où on peut trouver un point  $r_1 \in P_1$  et un point  $r_2 \in P_2$  tel que  $(r_1; r_2) < d$  est incluse dans le rectangle grisé de la figure (à droite).

**Question 6 :** Montrer que ce rectangle contient au plus 6 points de  $S$ .

**Question 7 :** Donner le schéma d'une procédure Rassembler utilisant le tableau  $T$  et les valeurs  $m$  et  $d$ . Montrer que son ordre de complexité est en  $O(n)$ .

NB : Il est recommandé de créer un tableau contenant les points de  $P_1$  et de  $P_2$  triés par ordonnées croissantes.

**Question 8 :** Donner un schéma pour la ligne Choisir m qui ne change pas l'ordre de complexité obtenu.