

TD n°9

Algorithmes Gloutons

1 Les chansons.

On veut enregistrer n chansons de durée $d_1; d_2; \dots; d_n$ respectivement sur un support sans accès direct (p. ex. une cassette audio), en minimisant le temps de rembobinage (*fast forward*) moyen nécessaire pour accéder à une chanson donnée à partir du début de la cassette. On supposera que la capacité du support est telle qu'il peut contenir toutes les chansons.

Exercice 1 Commencer par donner une expression du temps de rembobinage moyen, c-à-d la grandeur à minimiser.

Exercice 2 Donner un algorithme de type glouton pour résoudre le problème et montrer que la solution S qu'il fournit est bien une solution optimale.

Suggestion. Raisonner sur une autre solution S' qui présente une *inversion*, c'est à dire, un couple $(i; j)$ tel que $i < j$ mais la longueur de la i -ème chansons de la solution S' est plus grande que la longueur de la j -ème chansons et montrer que S' ne peut pas être optimale.

2 Le voyageur dans le désert

Un voyageur veut aller d'une oasis à une autre sans mourir de soif. Il connaît la position des puits sur la route et sait qu'il consomme exactement 1 litre d'eau au kilomètre. Il est muni d'une gourde pleine à son départ. Quand il arrive à un puits, il peut choisir de remplir sa gourde; dans ce cas, il en vide le contenu restant dans le sable et la remplit entièrement au puits. A l'arrivée, il vide aussi ce qui reste dans la gourde.

Exercice 3 À chaque puit, y compris celui de l'oasis d'arrivée, un gardien lui fait payer autant d'unités de la monnaie locale que le nombre de litres d'eau qu'il a versé. Comment doit-il choisir les puits où il doit s'arrêter pour payer le moins possible?

Exercice 4 Le prix à payer par le voyageur à chaque puits est maintenant égal au carré du nombre de litres d'eau qu'il a versé.

1. On considère l'exemple suivant : une gourde de 10 litres et des puits situés à 8, 9, 16, 18, 24 et 27 km de l'oasis de départ. L'arrivée est à 32 km. Montrer sur cet exemple que la stratégie gloutonne de l'exercice ?? n'est plus optimale.
2. Construire une stratégie par programmation dynamique qui utilise les valeurs
 - $P(i)$: somme minimale payée au total depuis le puits numéro 1 (l'oasis de départ) jusqu'au puits numéro i , étant donné que le voyageur vide sa gourde au puits numéro i ;
 - $d(i; j)$: nombre de kilomètres entre le puits numéro i et le puits numéro j ;
 - V : volume de la gourde.

3 Problème du sac à dos

Un voleur dévalisant un magasin trouve n objets, l'objet i valant v_i euros et pesant w_i kilos, v_i et w_i sont des entiers. Le voleur veut bien évidemment emporter un butin de plus grande valeur possible mais il ne peut porter que W kilos dans son sac à dos. Quels objets devra-t-il prendre? Variante "tout ou rien" : ici, le voleur prend un objet tout entier ou le laisse.

Variante fractionnaire : ici, le voleur peut ne prendre qu'une fraction d'un objet.

Exercice 5 Proposez un algorithme glouton pour la variante fractionnaire.

Exercice 6 Montrez que cet algorithme est optimal.

Exercice 7 Quelle est sa complexité?

Exercice 8 Montrez au moyen d'un contre-exemple que l'algorithme glouton équivalent pour la variante "tout ou rien" n'est pas optimal.

Exercice 9 Proposez un algorithme de programmation dynamique résolvant la variante "tout ou rien".

Exercice 10 Quelle est sa complexité?

4 Les chambres d'hôtel

La foudre étant tombée, toutes les ampoules ont grillé à l'hôtel! Le gérant, qui est radin, veut en racheter le moins possible ce mois-ci, car il sait qu'il y aura une grande promotion le mois prochain au Lamporama. Il ne va donc acheter des ampoules que dans les chambres qui seront effectivement occupées par des clients.

Or dans cet hôtel, il est obligatoire de réserver sa chambre au moins un mois à l'avance. Le gérant dispose donc de la liste de toutes les réservations de novembre.

Donc : vous avez n clients. Le client C_i arrive à la date a_i et repart à la date d_i . Chaque client dort dans une chambre différente. On essaye d'utiliser le moins de chambres possible.

Exercice 11 Résolvez le problème sur l'exemple suivant (donner le nombre de chambres, et affectez chaque client à une chambre).

Client	arrive	repart	Client	arrive	repart
1	3	17	6	19	21
2	11	26	7	24	31
3	1	4	8	13	15
4	6	9	9	10	22
5	10	13	10	23	24

Exercice 12 Proposez un algorithme glouton qui résout le problème.

Le choix glouton doit être fait après un certain *pré-traitement* des données, lequel?

Exercice 13 Montrez que votre algorithme minimise bien le nombre de chambres

5 La réunion de crise

Des cadres d'une entreprise de la finance passent par l'aéroport Paris-CDG, en transit, avant d'aller assister à des réunions de crise à Washington, Moscou et ailleurs. Un membre du directoire doit tous les voir pour leur remettre des documents et leur donner des instructions secrètes. Cela ne peut bien sûr se faire que dans le *business lounge* de l'aéroport. Mais la trésorerie de l'entreprise n'étant pas en bon état, elle essaye de louer le moins possible le *business lounge* car c'est cher. Or, tous les cadres n'arrivent ni ne repartent par le même avion, bien sûr.

Donc : vous avez n cadres. Le cadre C_i atterrit à la date a_i et repart à la date d_i . Une réunion à la date r_j peut réunir tous les cadres présents à ce moment-là, donc tous ceux tels que $a_i \leq r_j \leq d_i$. On essaye de faire le moins de réunions possible.

Exercice 14 Résolvez le problème sur l'exemple suivant (donner le nombre de réunions minimal, et la date des réunions).

Cadre	arrive	repart	Cadre	arrive	repart
1	6h30	8h45	6	9h	15h30
2	15h27	20h	7	15h42	18h17
3	7h12	12h	8	13h33	17h22
4	7h56	12h	9	13h33	19h
5	10h01	13h21	10	19h07	23h02

Exercice 15 Proposez un algorithme glouton qui résout le problème.

Le choix glouton doit être fait après un certain *pré-traitement* des données, lequel ?

Exercice 16 Montrez que votre algorithme minimise bien le nombre de réunions