

TD n°8

Algorithmes Gloutons

1 Le voyageur dans le désert

Un voyageur veut aller d'une oasis à une autre sans mourir de soif. Il connaît la position des puits sur la route et sait qu'il consomme exactement 1 litre d'eau au kilomètre. Il est muni d'une gourde pleine à son départ. Quand il arrive à un puits, il peut choisir de remplir sa gourde; dans ce cas, il en vide le contenu restant dans le sable et la remplit entièrement au puits. A l'arrivée, il vide aussi ce qui reste dans la gourde.

Exercice 1 À chaque puit, y compris celui de l'oasis d'arrivée, un gardien lui fait payer autant d'unités de la monnaie locale que le nombre de litres d'eau qu'il a versé. Comment doit-il choisir les puits où il doit s'arrêter pour payer le moins possible?

Exercice 2 Le prix à payer par le voyageur à chaque puits est maintenant égal au carré du nombre de litres d'eau qu'il a versé.

1. On considère l'exemple suivant : une gourde de 10 litres et des puits situés à 8, 9, 16, 18, 24 et 27 km de l'oasis de départ. L'arrivée est à 32 km. Montrer sur cet exemple que la stratégie gloutonne de l'exercice 1 n'est plus optimale.
2. Construire une stratégie par programmation dynamique qui utilise les valeurs
 - $P(i)$: somme minimale payée au total depuis le puits numéro 1 (l'oasis de départ) jusqu'au puits numéro i , étant donné que le voyageur vide sa gourde au puits numéro i ;
 - $d(i, j)$: nombre de kilomètres entre le puits numéro i et le puits numéro j ;
 - V : volume de la gourde.

2 Problème du sac à dos

Un voleur dévalisant un magasin trouve n objets, l'objet i valant v_i euros et pesant w_i kilos, v_i et w_i sont des entiers. Le voleur veut bien évidemment emporter un butin de plus grande valeur possible mais il ne peut porter que W kilos dans son sac à dos. Quels objets devra-t-il prendre? **Variante "tout ou rien"** : ici, le voleur prend un objet tout entier ou le laisse.

Variante fractionnaire : ici, le voleur peut ne prendre qu'une fraction d'un objet.

Exercice 3 Proposez un algorithme glouton pour la variante fractionnaire.

Exercice 4 Montrez que cet algorithme est optimal.

Exercice 5 Quelle est sa complexité?

Exercice 6 Montrez au moyen d'un contre-exemple que l'algorithme glouton équivalent pour la variante "tout ou rien" n'est pas optimal.

Exercice 7 Proposez un algorithme de programmation dynamique résolvant la variante "tout ou rien".

Exercice 8 Quelle est sa complexité?

3 Les chansons.

On veut enregistrer n chansons de durée d_1, d_2, \dots, d_n respectivement sur un support sans accès direct (p. ex. une cassette audio), en minimisant le temps de rembobinage (*fast forward*) moyen nécessaire pour accéder à une chanson donnée à partir du début de la cassette. On supposera que la capacité du support est telle qu'il peut contenir toutes les chansons.

Exercice 9 Commencer par donner une expression du temps de rembobinage moyen, c-à-d la grandeur à minimiser.

Exercice 10 Donner un algorithme de type glouton pour résoudre le problème et montrer que la solution S qu'il fournit est bien une solution optimale.

Suggestion. Raisonner sur une autre solution S' obtenue de S en inversant l'ordre de deux chansons.

4 Les chambres d'hôtel

La foudre étant tombée, toutes les ampoules ont grillé à l'hôtel ! Le gérant, qui est radin, veut en racheter le moins possible ce mois-ci, car il sait qu'il y aura une grande promotion le mois prochain au Lamporama. Il ne va donc acheter des ampoules que dans les chambres qui seront effectivement occupées par des clients.

Or dans cet hôtel, il est obligatoire de réserver sa chambre au moins un mois à l'avance. Le gérant dispose donc de la liste de toutes les réservations de novembre.

Donc : vous avez n clients. Le client C_i arrive à la date a_i et repart à la date d_i . Chaque client dort dans une chambre différente. On essaye d'utiliser le moins de chambres possible.

Exercice 11 Résolvez le problème sur l'exemple suivant (donner le nombre de chambres, et affectez chaque client à une chambre).

Client	arrive	repart	Client	arrive	repart
1	3	17	6	19	21
2	11	26	7	24	31
3	1	4	8	13	15
4	6	9	9	10	22
5	10	13	10	23	24

Exercice 12 Proposez un algorithme glouton qui résout le problème.

Le choix glouton doit être fait après un certain *pré-traitement* des données, lequel ?

Exercice 13 Montrez que votre algorithme minimise bien le nombre de chambres

5 La réunion de crise