

TD n°3

Algorithmes Gloutons & Programmation Dynamique

1 Le voyageur dans le désert

Un voyageur veut aller d'une oasis à une autre sans mourir de soif. Il connaît la position des puits sur la route et sait qu'il consomme exactement 1 litre d'eau au kilomètre. Il est muni d'une gourde pleine à son départ. Quand il arrive à un puits, il peut choisir de remplir sa gourde ; dans ce cas, il en vide le contenu restant dans le sable et la remplit entièrement au puits. A l'arrivée, il vide aussi ce qui reste dans la gourde.

Exercice 1 À chaque puit, y compris celui de l'oasis d'arrivée, un gardien lui fait payer autant d'unités de la monnaie locale que le nombre de litres d'eau qu'il a versé. Comment doit-il choisir les puits où il doit s'arrêter pour payer le moins possible ?

Exercice 2 Le prix à payer par le voyageur à chaque puits est maintenant égal au carré du nombre de litres d'eau qu'il a versé.

1. On considère l'exemple suivant : une gourde de 10 litres et des puits situés à 8, 9, 16, 18, 24 et 27 km de l'oasis de départ. L'arrivée est à 32 km. Montrer sur cet exemple que la stratégie gloutonne de l'exercice 1 n'est plus optimale.
2. Construire une stratégie par programmation dynamique qui utilise les valeurs
 - $P(i)$: somme minimale payée au total depuis le puits numéro 1 (l'oasis de départ) jusqu'au puits numéro i , étant donné que le voyageur vide sa gourde au puits numéro i ;
 - $d(i,j)$: nombre de kilomètres entre le puits numéro i et le puits numéro j ;
 - V : volume de la gourde.

2 Problème du sac à dos

Un voleur dévalisant un magasin trouve n objets, l'objet i valant v_i euros et pesant w_i kilos, v_i et w_i sont des entiers. Le voleur veut bien évidemment emporter un butin de plus grande valeur possible mais il ne peut porter que W kilos dans son sac à dos. Quels objets devra-t-il prendre ? **Variante “tout ou rien”** : ici, le voleur prend un objet tout entier ou le laisse.

Variante fractionnaire : ici, le voleur peut ne prendre qu'une fraction d'un objet.

Exercice 3 Proposez un algorithme glouton pour la variante fractionnaire.

Exercice 4 Montrez que cet algorithme est optimal.

Exercice 5 Quelle est sa complexité ?

Exercice 6 Montrez au moyen d'un contre-exemple que l'algorithme glouton équivalent pour la variante “tout ou rien” n'est pas optimal.

Exercice 7 Proposez un algorithme de programmation dynamique résolvant la variante “tout ou rien”.

Exercice 8 Quelle est sa complexité ?

3 Les chansons.

On veut enregistrer n chansons de durée $d_1; d_2; \dots; d_n$ respectivement sur un support sans accès direct (p. ex. une cassette audio), en minimisant le temps de rembobinage (*fast forward*) moyen nécessaire pour accéder à une chanson donnée à partir du début de la cassette. On supposera que la capacité du support est telle qu'il peut contenir toutes les chansons.

Exercice 9 Commencer par donner une expression du temps de rembobinage moyen, c-à-d la grandeur à minimiser.

Exercice 10 Donner un algorithme de type glouton pour résoudre le problème et montrer que la solution S qu'il fournit est bien une solution optimale.

Suggestion. Raisonner sur une autre solution S' obtenue de S en inversant l'ordre de deux chansons.