

TD n°10

Flots dans les graphes

1 Flots

On rappelle qu'un *flot* sur un graphe G orienté pondéré par une pondération c est le fait d'attribuer à chaque arc (u, v) une valeur $\phi(u, v)$ telle que :

1. Pour tout arc (u, v) , $0 \leq \phi(u, v) \leq c(u, v)$ (où c est la capacité de l'arc) ;
2. Pour tout sommet u (tel que $u \neq e$ et $u \neq s$), on a $\phi_+(u) = \phi_-(u)$, où $\phi_+(u) = \sum_v \phi(u, v)$ est le flot entrant, et $\phi_-(u) = \sum_w \phi(w, u)$ (où ϕ_+ et ϕ_- sont les notations) ;

Les sommet e et s sont l'entrée et la sortie. La charge du flot est $\sum_v \phi(e, v)$ (égal à $\sum_w \phi(w, s)$).

Un flot maximum est un flot de charge maximum. L'algorithme de Ford-Fulkerson fonctionne ainsi :

Soit F un flot vide (pour tout arc (u, v) , $\phi(u, v) = 0$)

Il existe un chemin améliorant C si et seulement si
Augmenter le flot F le long de C de la charge de C

Renvoyer F

Exercice 1 Une définition naturelle de *chemin améliorant* serait :

C est un chemin de s à t tel que le long de tout arc (u, v) de ce chemin, $c(u, v) - \phi(u, v) > 0$.

La charge de C est alors le minimum de $c(u, v) - \phi(u, v)$ le long du chemin.

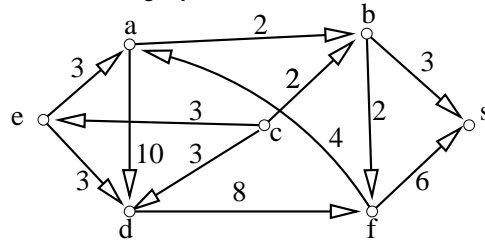
Or, ça ne marche pas ! Donner un petit exemple où ce pseudo-Ford-Fulkerson échoue avant de trouver un flot maximum.

On s'autorise une définition plus large de "chemin améliorant" : c'est un chemin dans le graphe des augmentations G_ϕ de G .

- Il a les mêmes sommets que le graphe de départ
- Il a une valuation a
- Si entre u et v il n'y a pas d'arc dans G alors il n'y en a pas non plus dans G_ϕ
- Si il y a un seul arc, disons entre u et v , dans G , et si cet arc n'est pas saturé (càd $c(u, v) > \phi(u, v)$) alors on crée un arc (u, v) , dit *arc résiduel*, de valuation $a(u, v) = c(u, v) - \phi(u, v)$
- De plus si cet arc est saturé (càd $\phi(u, v) = c(u, v)$) alors on crée un arc (v, u) , dit *arc inverse*, de valuation $a(v, u) = \phi(u, v)$
- S'il y a un arc (u, v) et un arc (v, u) , alors le flot ne peut aller que dans un sens (par convention), disons de u vers v . Dans ce cas l'arc (u, v) du graphe des augmentations a comme valeur $a(u, v) = c(u, v) - \phi(u, v)$ et l'arc (v, u) du graphe des augmentations a comme valeur $a(v, u) = \phi(u, v)$ et

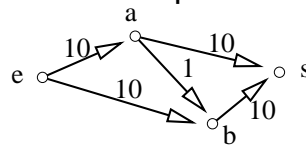
Exercice 2 Quelle est la capacité d'un chemin dans le graphe des augmentations ? Comment un chemin dans le graphe des augmentations modifie-t-il le flot dans le graphe initial ?

Ex c c Appliquer l'algorithme sur le graphe suivant :



A chaque étape, donner le graphe des augmentations.

Ex c c Montrer que le temps d'exécution de Ford-Fulkerson peut être *très long*, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de fonction f tel que le temps d'exécution de Ford-Fulkerson est $O(f(n, m))$ où n est le nombre de sommets et m est le nombre d'arcs. Vous pourrez vous inspirer du graphe suivant :



2 Couplage de graphes bipartis

On considère un graphe *biparti* $G = (A \cup B, E)$. L'ensemble des sommets est coupé entre deux sous-ensembles A et B . Toute arête du graphe est entre un sommet de l'ensemble A et un sommet de l'ensemble B .

Un *couplage* d'un graphe biparti est un ensemble d'arêtes tel que deux arêtes différentes n'ont pas de sommet en commun. Un couplage de G est *maximum* s'il n'existe pas de couplage de G ayant plus d'arêtes.

Ex c c Comment peut-on résoudre le problème du couplage maximum grâce à Ford-Fulkerson ?

indication : il faut rajouter une entrée et une sortie car l'algorithme de Ford-Fulkerson en a besoin, et on ne voit pas quels sommets de G pourraient jouer ce rôle

Ex c c Appliquer votre algorithme pour résoudre les problèmes de cœur des amoureux ci-dessous, qui voudraient bien changer de leur couple "traditionnel".

	Roméo	Paul	Abélard	Charden	les Musclés
Juliette		♥	♥	♥	
Virginie	♥			♥	
Héloïse	♥				
Stone	♥				♥
Dorothée			♥	♥	