

Exercice :

Soit γ la fonction de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par : $\gamma(n, p) = 2^{n+p+1} + 2^p$.

Question 1 : Montrer que γ est une

Question 2 : Donner une méthode de calcul de la fonction $\delta_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $\delta_2(m) = p \iff \exists n$ tel que $\gamma(n, p) = m$.
fonction $\delta_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $\delta_1(m) = n$ tel que $\gamma(n, p) = m$.

Question 3 : Montrer que γ, δ_1 et δ_2 sont récursives.

Problème :

Soit A l'alphabet $\{a, b\}$. Si x est une représentation par un mot de A^* d'un entier relatif x , on associe à cet entier relatif une représentation par un mot de A^* définie :
— si $x = 0$, alors x est représenté par le mot constitué d'aucune lettre)
— si $x > 0$, alors x est représenté sous la forme d'un nombre binaire de x , la lettre a étant comprise comme un 1 et la lettre b comme un 0.
— si $x < 0$, alors x est représenté sous la forme d'un nombre binaire de $-x$, mais cette fois la lettre a étant comprise comme un 0 et la lettre b comme un 1 (et donc $\rho(x)$ commence par un b).

Question 1 : Quelle est la représentation de -5 ? Vérifiez que tout élément de \mathbb{Z} possède une unique représentation d'un élément de \mathbb{Z} .

Question 2 : Construire une machine à calcul $\# \rho(x) \#$ (où $x \in \mathbb{Z}$), s'arrête avec p sur sa bande

Question 3 : Construire une machine à calcul $\# \rho(x) \#$ (où $x \in \mathbb{Z}$), s'arrête avec p sur sa bande

Question 4 : Construire une machine à calcul $\# g \# \rho(x) \#$ (où $g \in A^*$ et $x \in \mathbb{Z}$), s'arrête avec p sur sa bande

- où :
- si g est le mot vide, alors $g' = g$ est changé)
 - si $g = ag'$ (i.e. g commence par la lettre a), alors $g' = \rho(x + 1)$
 - si $g = bg'$ (i.e. g commence par la lettre b), alors $g' = \rho(x - 1)$

On définit maintenant un homomorphisme π de A^* dans \mathbb{Z} par : $\pi(a) = 1$ et $\pi(b) = -1$. Autrement dit, pour tout mot $w \in A^*$, on a $\pi(w) = |w|_a - |w|_b$, le nombre de a dans w minoré du nombre de b dans w .

Question 5 : Construire une machine de Turing qui réalise la fonction $\rho \circ \pi$ de A^* dans A^* .

Question 6 : Construire une machine de Turing t_L qui reconnaît le langage : $L = \{g \in A^* \mid \pi(g) = 0\}$.

Question 7 : Construire une machine de Turing t_M qui reconnaît le langage : $M = \{g \in A^* \mid \pi(g) = 0 \text{ et } \forall h \text{ préfixe de } g, \pi(h) \geq 0\}$.