

# Partiel de calculabilité et complexité

M1 informatique – 2h

Le 9 novembre 2010

La qualité de la rédaction et de la présentation sera prise en compte dans l'évaluation. Le barème est donné à titre indicatif.

---

Exercice 1 – Vrai ou faux ?

(5 points)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Ne justifiez pas vos réponses. On comptera +0,5 point par bonne réponse, −0,5 point par mauvaise réponse, et 0 pour une absence de réponse. Si la note totale est négative, on donnera 0 à l'exercice.

1. Il existe un langage décidable  $A$  et un langage indécidable  $B$  tel que  $A$  se réduit à  $B$ .
2. Il existe deux langages indécidables  $A$  et  $B$  tels que  $A$  se réduit à  $B$ .
3. Si  $A$  est récursivement énumérable et  $B$  est décidable, alors  $A \cap B$  est décidable.
4. Si  $A$  est récursivement énumérable et  $B \subseteq A$ , alors  $B$  est récursivement énumérable.
5. Il existe deux langages  $A$  et  $B$  distincts tels que  $A \leq_m B$  et  $B \leq_m A$ .
6. Pour toute fonction  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  non calculable, le langage  $\{n \in \mathbb{N} : f(n) = 0\}$  est indécidable.
7. Le langage  $\{\langle M, x, k \rangle : M(x) \text{ s'arrête en } \leq k \text{ étapes}\}$  est indécidable.
8. S'il existe une machine reconnaissant  $\{x : |x| \geq 2010 \wedge x \in A\}$  pour un certain langage  $A$ , alors  $A$  est décidable.
9. Si des langages  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  sont tous décidables, alors  $\cup_{i=0}^{+\infty} A_i$  est décidable.
10. Il existe un langage  $A$  auquel tout autre langage  $B$  se réduit.

Exercice 2

(4 points)

Montrer qu'un langage est récursivement énumérable si et seulement s'il se réduit au problème de l'arrêt  $H = \{\langle M, x \rangle : M(x) \text{ s'arrête}\}$ .

Exercice 3

(4 points)

Montrer que si  $A$  et  $B$  sont deux langages récursivement énumérables tels que leur union et leur intersection sont décidables, alors  $A$  et  $B$  sont décidables.

Exercice 4

(3 points)

Expliquer en détail (mais sans donner explicitement les transitions) le fonctionnement d'une machine de Turing à deux rubans qui décide le langage  $\{a^{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$ .

*Indication* : afin d'éviter d'effectuer des multiplications, on pourra utiliser le fait que  $n^2 = \sum_{i=0}^{n-1} (2i + 1)$ .

Exercice 5

(4 points)

Soit  $A$  le problème suivant :

*Entrée* – le code d'une machine de Turing  $M$  à un ruban fonctionnant sur l'alphabet  $\{0, 1\}$ .

*Problème* – au cours du calcul  $M(\epsilon)$ , 3 zéros consécutifs apparaissent-ils sur le ruban ?

1. Justifier que le théorème de Rice ne permet pas de conclure quant à l'indécidabilité de  $A$ .
2. Montrer que  $A$  est indécidable (on pourra donner une réduction du problème  $H' = \{\langle M \rangle : M(\epsilon) \text{ s'arrête}\}$ ).