

**Université de Paris 7**  
**Calculabilité et complexité— M1**  
**TD du 26 Octobre 2010**

**Exercice 1 — *Diagonalisation***    1) Refaire la démonstration du cours, suivant laquelle l'ensemble des langages sur un alphabet  $\Sigma$  n'est pas dénombrable.  
2) Pour chacun des 3 cas suivants, dire si la preuve reste valable

$$\begin{aligned} &\{w_{2i} \mid w_{2i} \notin L_i\} \\ &\{w_i \mid w_i \notin L_{2i}\} \\ &\{w_i \mid w_i \notin L_j, |i - j| < 3\} \end{aligned}$$

3) Quelle est la condition générale pour que la preuve fonctionne?

**Exercice 2 — *(In)décidabilité***    1) Montrer que les ensembles suivants ne sont pas décidables.

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\langle M, x \rangle \mid M \text{ s'arrête sur } x\} \\ H_2 &= \{\langle M, x \rangle \mid M \text{ accepte } x\} \\ H_3 &= \{\langle M, x \rangle \mid M \text{ ne s'arrête pas sur } x\} \\ H_4 &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ s'arrête sur } \epsilon\} \\ H_5 &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ s'arrête sur } \langle M \rangle\} \\ H_6 &= \{\langle M \rangle \mid M \text{ rejette } \langle M \rangle\} \end{aligned}$$

1) Décrire une machine de Turing qui accepte le langage  $H_1$ . Existe-t-il une machine de Turing qui accepte le langage  $H_3$ ? Plus généralement, quels sont les langages ci-dessus qui sont acceptés par une machine de Turing?

**Exercice 3 — *Problème de correspondance de Post (PCP)***    1) L'instance suivante admet-elle une solution?

$$(ab, ababa), (b, a), (aba, b), (aa, a)$$

2) Montrer que le PCP est encore indécidable si l'on suppose que l'alphabet des mots est binaire.

**Exercice 4 — *Décidabilité***    Montrer que si une machine de Turing à une bande semi-infinie ne se déplace au cours de son calcul sur l'entrée  $w$  au delà de la cellule en position  $2 \times |w|$ , alors le langage accepté est décidable.