

Université de Paris 7
Calculabilité et complexité – M1
TD du 30 Novembre 2010

Exercice 1 — Fonctions constructibles On rappelle qu'une fonction $f(n)$ est *constructible en temps* s'il existe une machine de Turing à deux bandes. La première bande contient n en unaire. En fin de calcul, la seconde contient $f(n)$ en unaire. Le temps de calcul est en $O(f(n))$.
Montrer que si $f(n)$ et $g(n)$ sont constructibles en temps alors il en est de même de $f(n) + g(n)$ et de $f(n)g(n)$.

Exercice 2 — Définitions de NP Montrer que les deux définitions suivantes sont équivalentes pour un langage $L \subseteq \Sigma^*$.

1) Il existe une machine de Turing non déterministe N dont tous les calculs (acceptants ou non) s'arrêtent en $O(n^k)$ et telle que

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid N \text{ accepte } w\}$$

2) Il existe une machine de Turing non déterministe N dont tous les calculs acceptants s'arrêtent en $O(n^k)$ et telle que

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid N \text{ accepte } w\}$$

Exercice 3 — NP-dur On rappelle qu'un problème est *NP-dur* si tout problème dans NP peut y être réduit. Montrer que le 10^{ème} problème de Hilbert (indécidable!) est ... NP-dur (il s'agit de décider si un polynôme à plusieurs variables et à coefficients dans les entiers a une solution entière.)

Exercice 4 — Le problème RECOUVREMENT DE SOMMETS On s'intéresse au problème suivant :

Entrée : un graphe $G = (V, E)$, et un entier k .

Problème : Existe-t-il un ensemble de sommets $V_0 \subset V$ de cardinal $\leq k$ tel que pour tout $(i, j) \in E$, $i \in V_0$ ou $j \in V_0$?

Montrer que RECOUVREMENT DE SOMMETS se réduit à STABLE (un sous-ensemble de sommets sans aucune arête entre eux).