

# Université de Paris 7

## Calculabilité et complexité— M1

### TD du 11 Octobre 2010 : Machines de Turing

Dans ces exercices, les machines de Turing ont une bande semi-infinie et leur entrée est de la forme  $\#w$  avec  $w \in \Sigma^*$  (de façon à repérer le bord gauche de la bande).

**Exercice 1 — Codage de machine de Turing** On rappelle que le codage d'une machine Turing est un mot appartenant à l'ensemble

$$|Q|\#\Sigma\#\Gamma(\#Q\#\Gamma\#Q\#\Gamma\#\{R, L, S\})^*$$

où  $Q = \{q_0, \dots, q_{n-1}, q_n\}$  avec la convention que  $q_0$  est l'état initial,  $q_{n-1}$  est l'état d'acceptation et  $q_n$  est l'effet de rejet. De même les symboles de  $\Gamma \supseteq \Sigma$  sont ordonnés

$$\{\sigma_0, \dots, \sigma_{r-1}, \sigma_r, \dots, \sigma_s\}$$

où  $\Sigma = \{\sigma_0, \dots, \sigma_{r-1}\}$  et  $\sigma_s = B$  (c'est-à-dire les premiers sont dans  $\Sigma$  et le blanc est le dernier symbole de la liste).

1) la donnée de  $|Q|$  est-elle indispensable?

2) Considérer un diagramme de machine de Turing quelconque (disons  $|Q| = 4, \Sigma = \{0, 1\}, \Gamma = \{0, 1, B\}$ ) et lui associer le codage de la machine qu'elle définit. On pourra coder les états et symboles en binaire (c'est-à-dire, par exemple, coder  $q_i$  par la représentation binaire de  $i$ ).

**Exercice 2 — Une machine simple** 1) Soit  $u \in \{0, 1\}^*$  un mot quelconque. Décrire le diagramme d'une machine  $M_u$  qui ignore son entrée, écrit le mot  $u$  et s'arrête.

2) Décrire une machine qui prend un mot  $u \in \{0, 1\}^*$  en entrée et qui renvoie  $\langle M_u \rangle$ .

**Exercice 3 — Composition de machines** 1) Soit  $M$  la machine qui fait le calcul suivant : sur l'entrée  $\#u$  avec  $u \in \{0, 1\}^*$ , la machine teste la parité de longueur de  $u$ , repositionne la tête de lecture sur la première cellule et se met dans l'état  $q_a$  si la longueur est paire et  $q_r$  sinon. Donner son diagramme et son code.

2) Soit  $M_1$  et  $M_2$  deux machines de Turing et  $\langle M_1 \rangle$  et  $\langle M_2 \rangle$  leur code. Décrire le code de la machine qui calcule comme suit : sur l'entrée  $\#u$  la machine teste si la parité de la longueur de  $u$ . Si elle est paire, elle calcule sur  $\#u$  comme la machine  $M_1$  sinon comme la machine  $M_2$ .

**Exercice 4 — Machine universelle** Soit  $f$  une fonction calculable par une machine de Turing. Montrer que la fonction qui à tout couple  $(x, y)$  associe le résultat du calcul, sur l'entrée  $x$ , de la machine d'indice  $f(x)$  est une fonction calculable.