

Exercice I :

On considère la machine RAM de programme :

1	LIRE	1	11	AJOUTER	4
2	CHARGER A	0	12	RANGER	5
3	RANGER	3	13	CHARGER	4
4	CHARGER A	1	14	RANGER	3
5	RANGER	2	15	CHARGER	5
6	RANGER	4	16	RANGER	4
7	CHARGER	1	17	INCREMENTER	2
8	SOUSTRAIRE	2	18	ALLERA	7
9	SAUTSIZERO	19	19	ECRIRE	4
10	CHARGER	3	20	ARRET	

Question : Effectuer le calcul de cette RAM pour chacune des valeurs suivantes de la donnée : 1, 2, 3, 4. Récrire ce programme en langage impératif évolué. Quelle est la fonction  $\varphi$  réalisée par cette RAM ?

Exercice II :

On considère le langage  $L$  sur l'alphabet  $A = \{a, b, c\}$  suivant :

$$L = \{wcw' \mid w, w' \in \{a, b\}^* \text{ et } w \neq w'\}$$

Question : Démontrer que  $L \in \text{DESPACE}(\log n)$ .

Problème :

Un automate à file  $\mathcal{A}$  sur un alphabet  $A$  est un 5-uple  $(Z, S, T, i, K)$  où  $Z$  est l'alphabet dit alphabet de file,  $S = \{s_1, \dots, s_p\}$  est un ensemble fini d'états, et  $T$  est un ensemble fini de règles de la forme  $y, s, z \rightarrow h, s'$  avec  $y \in A \cup \{1\}$ ,  $s, s' \in S$ ,  $z \in Z \cup \{1\}$  et  $h \in Z^*$  ; en outre  $i \in S \times Z$  est la configuration interne de départ, et  $K \subseteq S \times Z^*$  est l'ensemble des configurations internes d'acceptation.

Une configuration de  $\mathcal{A}$  est un triple  $(f, q, h) \in A^* \times S \times Z^*$ ,  $f$  est la partie du mot qui doit être lue,  $q$  est l'état courant et  $h$  est le contenu de la file. Il existe une transition selon  $\mathcal{A}$  de la configuration  $c$  à la configuration  $c'$  si  $c = (yf, s, zu)$ ,  $c' = (f, s', uh)$  et  $y, s, z \rightarrow h, s' \in T$ , ce qui est noté  $c \vdash c'$ . Un calcul valide de longueur  $n$  est la suite  $c_0 \vdash c_1 \vdash \dots \vdash c_n$  et un calcul valide est un calcul valide d'une longueur quelconque.

Un mot  $f$  est reconnu par  $\mathcal{A}$  si il existe un calcul valide  $(f, s_1, z_1) \vdash^* (1, s, h)$  où  $(s, h) \in K$ . Le langage reconnu par  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des mots qu'il reconnaît.

Etant donné une machine de Turing  $t = \langle A, Q, P \rangle$  qui possède un unique état initial  $q_a$  tel qu'un calcul s'arrête si elle atteint l'état  $q_a$ , on construit à partir de  $t$  un automate à file de lecture-écriture  $\mathcal{A}$ .

$1, s_1, z_1 \longrightarrow \# \square q_1, s_2$	pour $q_1 \in Q$
$x, s_2, 1 \longrightarrow x, s_2$	pour $x \in A$
$1, s_2, \# \longrightarrow \#, s_3$	
$1, s_3, y \longrightarrow 1, s_y$	pour $y \in A \cup \{\square\}$
$1, s_y, z \longrightarrow y, s_z$	pour $z \in A \cup \{\square\}$
$1, s_y, q \longrightarrow 1, s_{y,q}$	pour $q \in Q$
$1, s_3, q \longrightarrow 1, s_{\square,q}$	pour $q \in Q$
$1, s_{y,q}, x \longrightarrow yx'q', s_4$	si $q \in P$ et $x'q' \in P$
$1, s_{y,q}, x \longrightarrow q'yx', s_4$	si $q \in P$ et $q' \in P$
$1, s_4, x \longrightarrow x, s_4$	pour $x \in A \cup \{\square\}$
$1, s_4, \# \longrightarrow \#, s_3$	
$1, s_{y,q}, \# \longrightarrow yx'q'\square\#, s_3$	si $q \in P$ et $x'q' \in P$
$1, s_{y,q}, \# \longrightarrow q'yx'\square\#, s_3$	si $q \in P$ et $q' \in P$

On pose  $K = \{(s, h) \mid s = s_{y,q_a}\}$ .

**Question 1 :** Vérifier que si  $(f, s_1, 1, s, h)$  où  $(s, h) \in K$  est un calcul valide, celui-ci se décompose en :

$(1, s_1, z_1) \vdash^* (1, s_3, m_1) \vdash^* (1, s_3, m_r) \vdash^* (1, s, h)$  où l'on a mis en évidence toutes les occurrences d'un état  $s_3$ .  
Montrer que dans ces conditions  $m_r = \#$  et  $\forall i, m_i \in (A \cup \{\square\})^* Q (A \cup \{\square\})^* \#$ .

**Question 2 :** Montrer que si  $m = m'_i \#$  représente une configuration de la machine de Turing  $t$  avec les conventions usuelles,  $m'_i$  est la partie utile du mot sur la bande de lecture-écriture,  $\#$  est la partie utile du reste du mot sur la bande d'écriture, et  $q$  est l'état courant, et  $s_z$  est la configuration de la machine de Turing  $t$  à l'étape  $z$ .  
Montrer que pour tout  $i$  tel que  $1 \leq i < r$ ,  $m'_i \# \Rightarrow m'_{i+1} = \text{suiv}(m'_i) \#$ .

**Question 3 :** En déduire que si  $f \in L(t)$ ,  $f$  est reconnu par cet automate à file,  $f$  est reconnu par l'automate  $\mathcal{A}$ .

On considère le problème suivant :

**Problème : reconnaissance par automate à file**

Donnée : Un automate à file $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, q_a, F)$	et un mot $f$ sur l'alphabet $A$
Question : Le mot $f$ est-il reconnu par l'automate à file $\mathcal{A}$ ?	

**Question 4 :** Montrer que ce problème est indécidable.