

TD de *Introduction à l'Intelligence Artificielle* n° 5**Jeux Combinatoires**

Cadre général:

- Deux joueurs 1 et 2 qui alternent.
- Un ensemble \mathbf{P} de *positions du jeu*.
- Deux *fonctions de jeu* $f_1, f_2 : \mathbf{P} \rightarrow 2^{\mathbf{P}}$ qui spécifient les coups que les deux joueurs peuvent jouer à partir d'une position donnée pour faire évoluer le jeu. En général, on a $f_1 = f_2 = f$ (jeu *impartial*). Si $f(p) = \emptyset$, le jeu est dans une position finale et il termine. Le joueur qui a la main perd dans ce cas (dans le *jeu normal*; dans la variante du *jeu misère*, le dernier joueur qui peut jouer perd).
- Le jeu termine au bout d'un nombre fini de coups.
- Notation: si J est le jeu impartial normal dont l'ensemble de positions est \mathbf{P} et la fonction de jeu est f , on écrit $J = (\mathbf{P}, f)$.
- Les ensembles des positions *gagnantes* G et *perdantes* P sont définis de manière mutuellement récursive comme suit (pour un jeu impartial et normal):
 1. Si p est finale, $p \in P$.
 2. S'il existe $p' \in f(p)$ tel que $p' \in P$, alors $p \in G$.
 3. Si pour tout $p' \in f(p)$ $p' \in G$, alors $p \in P$.

Exercice 1 Jeux Soustractifs

Soit S un ensemble fini d'entiers positifs. Le *jeu soustractif sur S* est le jeu combinatoire impartial et normal suivant:

$$\mathbf{P} = \mathbb{N}$$

$$f(n) = \mathbb{N} \cap \{n - s \mid s \in S\}$$

Autrement dit, pour jouer on soustrait à la position courante n'importe quel élément de S , à condition que le résultat soit non négatif.

Trouver l'ensemble G pour les jeux soustractifs définis par les ensembles suivants:

1. $S_1 = \{1, 2, 3\}$
2. $S_2 = \{1, 3, 4\}$

Exercice 2 Chomp

On dispose au début du jeu d'une matrice $n \times m$.

Règle du jeu: le joueur choisit une case (i, j) de la position courante. La case (i, j) et toutes les cases situées en haut et à droite de celle-ci disparaissent alors (elles sont "mangées", d'où le nom du jeu). Il s'agit des cases (k, l) , $k \leq i, l \geq j$.

Par exemple, si on commence avec une matrice 3×8 et les deux premiers coups sont $(2, 6)$ (qui mange 6 cases) et $(1, 2)$ (qui mange 4 cases), la position atteinte est:

	×	×	×	×	×	×	×
					×	×	×

Le joueur qui a la main alors que la matrice est réduite à la case $(n,1)$ (le coin en bas à gauche) a perdu (c'est un "jeu misère").

1. Montrer que la position ci-dessus est gagnante (trouver l'unique coup gagnant à partir de cette position).
2. Donner une stratégie gagnante pour le premier joueur dans le cas $n = m$.
3. Montrer que le joueur qui a la main à partir de n'importe quelle matrice rectangulaire peut gagner (la preuve n'est pas constructive, il s'agit d'un argument du type "vol de stratégie"; en fait on ne connaît pas de stratégies qui gagnent en général).

Exercice 3 Jeux de Nim

On dispose de k entiers non négatifs.

Règle du jeu: le joueur choisit un des entiers de la position courante et le décrémente autant qu'il veut, à condition qu'il reste non négatif.

On sait qu'une position n_1, \dots, n_k est gagnante dans le jeu normal si et seulement si $n_1 \oplus \dots \oplus n_k > 0$, où $n_1 \oplus \dots \oplus n_k > 0$ désigne la "somme Nim" de n_1, \dots, n_k , définie comme l'ou exclusif chiffre par chiffre des représentations binaires de n_1, \dots, n_k (Théorème de Bouton, 1902).

1. Quel est la somme Nim de 27 et 17?
2. La somme Nim de 38 et x est 25. Trouver x .
3. Trouver tous les coups gagnants des jeux de Nim dont les positions initiales sont $\{12, 19, 27\}$ et $\{13, 17, 19, 23\}$ respectivement.
4. Dans le jeu *misère Nim* le dernier joueur qui joue perd. Montrer que si une position p contient au moins deux entiers strictement supérieurs à 1, alors p est gagnante pour le jeu misère si et seulement si p est gagnante pour le jeu normal.

Exercice 4 The silver dollar game

On dispose d'une matrice $1 \times \infty$ sur laquelle on place k pièces, comme dans la figure (où $k = 5$):



Règle du jeu: le joueur choisit une pièce et la déplace vers la gauche d'autant de cases qu'il veut, à condition de ne pas dépasser la pièce suivante (ou le début de la matrice s'il s'agit de la première pièce à gauche).

Fin du jeu: le joueur qui ne peut plus jouer a perdu (jeu normal).

Trouver une stratégie gagnante (hint: réduire ce jeu au jeu de Nim).

Exercice 5 La fonction f_{SG} et le premier théorème de Sprague-Grundy

Si \mathbf{P} est l'ensemble de positions d'un jeu impartial normal $J = (\mathbf{P}, f)$, la fonction de Sprague-Grundy de J , $f_{SG} : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{N}$ est définie récursivement comme suit:

$$f_{SG}(p) = \min\{n \geq 0 \mid n \neq f_{SG}(p_1) \text{ pour tout } p_1 \in f(p)\}$$

Théorème: Une position p est gagnante si et seulement si $f_{SG}(p) > 0$; elle est perdante si et seulement si $f_{SG}(p) = 0$.

1. Donner la fonction SG du jeu soustractif sur $S = \{1, 2, 3\}$.
2. Le jeu de Wythoff (1907) est défini comme suit:

On joue sur un échiquier $n \times n$, et les joueurs déplacent une reine qui se trouve au début en haut à gauche. Les coups jouables sont:

- en horizontale vers la droite.

- en verticale vers le bas.
- en diagonale vers le bas-droite.

Le joueur qui ne peut plus déplacer la reine perd (jeu normal). Donner la fonction SG du jeu de Wythoff pour $n = 4$, en assignant sa valeur à chaque case de l'échiquier.

Exercice 6 Le deuxième théorème de Sprague-Grundy

On se donne n jeux impartiaux normaux $J^1 = (\mathbf{P}^1, f^1), \dots, J^n = (\mathbf{P}^n, f^n)$. La somme $J^1 + \dots + J^n$ de ces jeux est définie comme étant le jeu impartial normal qui a $\mathbf{P}^1 \times \dots \times \mathbf{P}^n$ comme ensemble de positions et

$$f(p_1, \dots, p_n) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \{p_1\} \times \dots \times \{p_{i-1}\} \times f^i(p_i) \times \{p_{i+1}\} \times \dots \times \{p_n\}$$

comme fonction de jeu (en clair: on joue un coup dans un jeu au choix parmi les n possibilités, et uniquement dans un.).

Théorème:

$$f_{SG}(J^1 + \dots + J^n) = f_{SG}(J^1) \oplus \dots \oplus f_{SG}(J^n)$$

Considérons le jeu J qui est la somme des jeux soustractifs sur $S_1 = \{1, 2, 3\}$, $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

1. Calculer la valeur $f_{SG}(9, 10, 14)$ dans le jeu J .
2. Vérifier que, à partir de $(9, 10, 14)$ le coup qui mène à $(9, 10, 13)$ est gagnant.
3. Il existe exactement un autre coup gagnant à partir de $(9, 10, 14)$; lequel?