

Infographie - M1

Examen du 22/06/2009

3h - Notes de cours et TD autorisées.

Les algorithmes demandés doivent être rédigés avec le même niveau de détail que ceux vus en cours : les opérations et constantes mathématiques de base (\sin , \cos , \arcsin , \arccos , π , $\lfloor \cdot \rfloor$, \wedge , \cdot , etc) sont données, mais tous les autres calculs et traitements à effectuer (e.g. calculs d'intersections) doivent être décrits en détail, éventuellement de manière structurée (étapes numérotées, conditionnelles, itérations). Vous pouvez supposer que vous disposez de piles, listes et tableaux.

La correction tiendra compte de la clarté et de la précision de vos solutions. Inutile de descendre jusqu'au pseudo-code, mais vos algorithmes doivent être implémentables sans aucune réflexion supplémentaire - la seule description géométrique d'un traitement ne suffit donc pas.

Exercice 0 - transformations 2D

Avec un changement d'échelle (S_x, S_y) centré en l'origine, chaque point (x, y) est transformé en $(S_x \times x, S_y \times y)$. Etant donné un point (c_x, c_y) , quelle opération doit-on d'abord faire sur (x, y) , avant un changement d'échelle (S_x, S_y) centré en l'origine, pour simuler un changement d'échelle centré en (c_x, c_y) ?

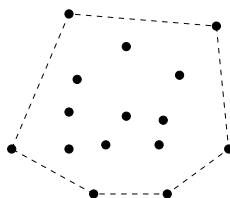
Exercice 1 - collisions (3D)

On convient du fait que si un cube est donné sous la forme d'une suite de points P_0, \dots, P_7 , alors (P_0, P_1, P_2, P_3) et (P_4, P_5, P_6, P_7) sont deux des 8 faces du cube, et $[P_0, P_4]$, $[P_1, P_5]$, $[P_2, P_6]$, $[P_3, P_7]$ sont quatre des 12 arêtes du cube.

- (a) Donner un algorithme permettant de déterminer si un point M est intérieur au cube, à partir de la seule donnée de P_0, \dots, P_7 . Votre algorithme devra être le plus simple possible, et réellement spécialisé à un cube.
- (b) Donner un algorithme permettant de déterminer - idéalement, le plus rapidement possible - si les volumes de deux cubes donnés par P_0, \dots, P_7 et Q_0, \dots, Q_7 s'intersectent.

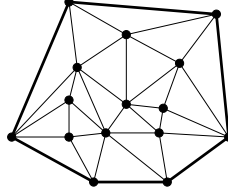
Exercice 2 - enveloppe convexe (2D)

(1) Soit $\mathcal{M} = M_0, \dots, M_{n-1}$ un ensemble fini de points du plan, disposés de manière quelconque. Appelons *enveloppe convexe* de \mathcal{M} le plus petit polygone convexe \mathcal{E} tel que chaque point de \mathcal{M} soit intérieur à \mathcal{E} ou sur \mathcal{E} .



On admettra (ce n'est pas trop dur à voir) que les sommets de \mathcal{E} sont des points de \mathcal{M} . Proposer un algorithme simple, et si possible efficace, permettant à partir de la donnée de \mathcal{M} de calculer la liste des sommets de \mathcal{E} . Quelle est sa complexité ?

(2) On suppose à présent que les points de \mathcal{M} sont les sommets d'un maillage triangulaire. Chaque point M_i est maintenant donné avec l'ensemble \mathcal{S}_i des points de \mathcal{M} reliés à M_i par une arête du maillage. Informellement, toutes ces arêtes découpent l'intérieur de l'enveloppe convexe de \mathcal{M} en triangles :



Plus formellement, un tel maillage peut être obtenu en reliant les points de \mathcal{M} par un ensemble d'arêtes maximal tel que l'intersection de deux arêtes distinctes soit vide ou réduite à un point de \mathcal{M} .

Proposer un nouvel algorithme, cette fois linéaire en n , permettant de calculer la liste des sommets de \mathcal{E} à partir de la donnée des M_i, \mathcal{S}_i .

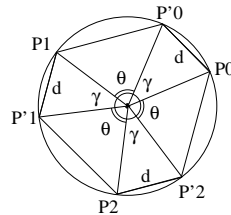
Exercice 3 - génération de diagrammes 2D

(1) Soit \mathcal{C} un cercle de centre C et de rayon R . Soient P, P' deux points de \mathcal{C} tels que la distance d entre P, P' soit strictement inférieure à $2 \times R$ (donc plus petite qu'un diamètre). Montrer comment retrouver la valeur de l'angle (P, O, P') à partir de d et de R .

(2) Soient C, P_0 deux points distincts. Soit R la distance entre C et P_0 . Soit n un entier et soit $d \in]0, \dots, 2 \times R[$. Donner (éventuellement en admettant la question précédente comme résolue) un algorithme permettant de générer, à partir de la donnée de d, C, P_0 et n , un polygone $\mathcal{P} = (P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n)$ tel que :

- tous les points de \mathcal{P} appartiennent au cercle de centre C de rayon R ,
- pour chaque $i \in [0, \dots, n]$, la distance entre P_i et P_{i+1} soit égale à d ,
- et enfin, tel que les angles $(P_i, O, P_{i+1 \bmod n})$ soient deux à deux égaux.

Voici un exemple de figure avec $n = 3$:



Pour C, R et n donnés, quelle valeur maximale peut-on donner à d pour que le polygone produit soit bien formé ? (bien formé au sens : sommets deux-à-deux distincts, et arêtes ne s'intersectant qu'aux sommets).