

# Infographie - M1

## Chapitre 8 - Modélisation 3D, Courbes de Bézier

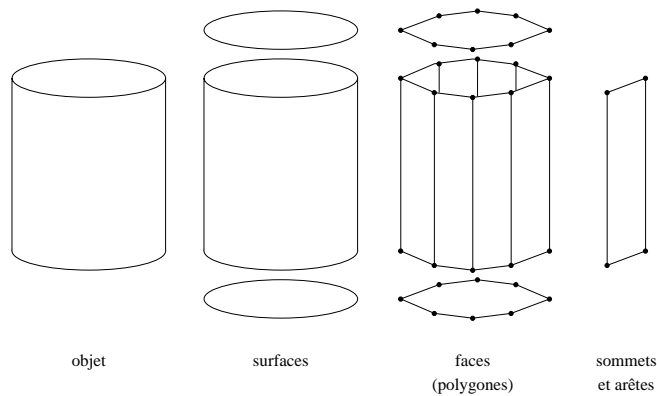
V. Padovani

Equipe Preuves, Programmes et Systèmes, Université Paris 7

### 1 Modélisation 3D

#### 1.1 Représentation par maillage

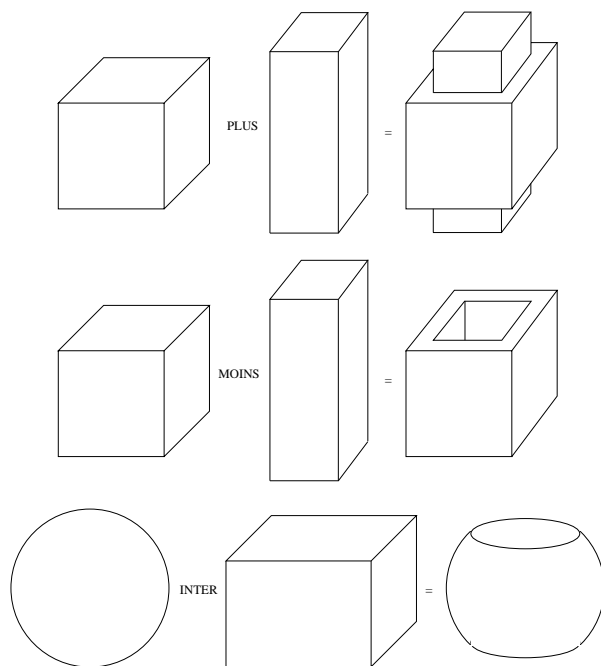
Une technique de modélisation courante est celle consistant à représenter chaque objet 3D comme un assemblage de surfaces, elles-mêmes formées par assemblage de faces polygonales (la structure globale est appelée un *maillage* de polygones ou “polygon mesh”).



En pratique, la ou les surfaces de l'objet modélisé sont bien sûr courbes, et l'assemblage de polygones n'est qu'une approximation de ces surfaces réelles. Celle-ci est d'autant plus exacte que le nombre de polygones est grand, mais le nombre de polygones permettant d'obtenir un rendu réaliste n'est pas nécessairement très élevé : nous verrons au chapitre sur l'illumination des méthodes permettant de lisser une surface représentée par des polygones.

#### 1.2 Géométrie constructive des solides (CSG)

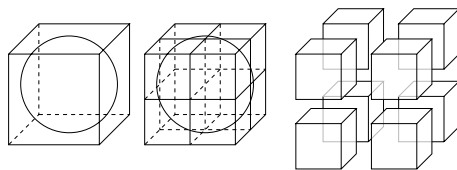
Une autre approche consiste à partir de formes primitives telles que cube, cylindre, sphères, etc. On construit des variantes de ces différentes formes primitives par rotations, translations, changements d'échelles, etc. Les formes générées sont ensuite assemblées par opérations élémentaires : union, intersection, soustraction, etc.



Un solide représenté de cette manière peut être représenté par un arbre dont les feuilles sont des variantes de formes primitives (type de forme, transformations éventuelles) et dont les nœuds sont des opérations booléennes. L'inconvénient de cette représentation est celui du rendu, éventuellement coûteux en calculs.

### 1.3 Partitions de l'espace

Une autre approche possible est de représenter l'espace occupé par un objet sous la forme d'un arbre, dont chaque nœud a exactement huit descendants - un "*octree*". La racine de l'arbre représente un cube dont le côté a pour longueur une puissance de deux de l'unité de mesure la plus fine, contenant l'objet à modéliser. Si l'objet occupe entièrement cette portion de l'espace (il est donc cubique, et de même taille que le cube associé à la racine), cette racine est réduite à une feuille. Sinon, elle a 8 descendants, chaque descendant représentant l'une des huit subdivisions du cube initial en portion égales. Chaque descendant décrit de la même manière la portion de l'objet contenue dans son cube associé.

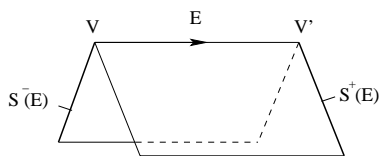


Cette technique se transpose à la dimension 2, et peut servir à la compression d'image, avec dans ce cas des arbres d'arité seulement 4, ou "*quadtrees*".

## 1.4 Modélisation surfacique

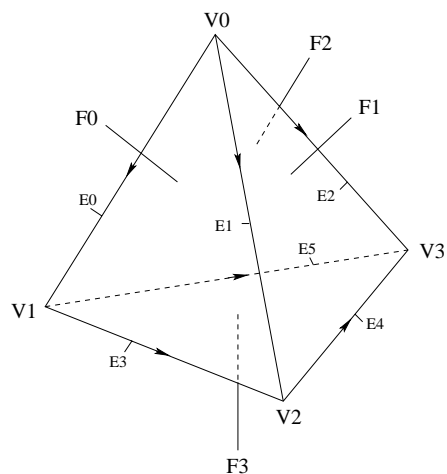
La représentation de polyèdres convexes peut être optimisée de la manière suivante. Plutôt que de stocker une liste de polygones et, pour chaque polygone, la liste de sommets, on stocke en mémoire :

1. la liste de tous les sommets du polyèdre, avec leurs coordonnées.
2. la liste de ses arêtes, avec pour chaque arête  $e$  :
  - un pointeur vers son sommet de début,  $v$ ,
  - un pointeur vers son sommet de fin,  $v'$ ,
  - un pointeur vers le *successeur positif* de  $e$ . En se plaçant sur l'arête, à l'extérieur du polyèdre, et en regardant vers  $v'$ , il s'agit de l'arête qui suit  $e$  sur la face en contact avec  $e$ , vers la droite.
  - un pointeur vers le *successeur négatif* de  $e$ . En se plaçant sur l'arête, à l'extérieur du polyèdre, et en regardant vers  $v'$ , il s'agit de l'arête qui précède  $e$  sur la face en contact avec  $e$ , vers la gauche.



3. pour chaque face  $f$ ,
  - un pointeur vers une arête de cette face,
  - un booléen (noté  $+$  ou  $-$ ) indiquant si l'arête suivante de cette face est le successeur positif ou le successeur négatif de  $e$ .

L'avantage de cette représentation est la non-redondance du stockage : chaque sommet n'est stocké qu'à un seul emplacement en mémoire. La représentation permet d'autre part de vérifier facilement la cohérence de la structure d'ensemble, à savoir, qu'elle représente bien un polyèdre. Elle permet également d'extraire facilement la suite des arêtes d'une face, ou encore la suite de ces sommets (énumérés dans le sens indirect, en se plaçant sur la face et à l'extérieur du polyèdre). Voici par exemple la manière dont on peut représenter le tétraèdre suivant:



arête	début	fin	succ+	succ-
$e_0$	$v_0$	$v_1$	$e_3$	$e_1$
$e_1$	$v_0$	$v_2$	$e_3$	$e_2$
$e_2$	$v_0$	$v_3$	$e_4$	$e_0$
$e_3$	$v_1$	$v_2$	$e_4$	$e_5$
$e_4$	$v_2$	$v_3$	$e_5$	$e_1$
$e_5$	$v_1$	$v_3$	$e_2$	$e_3$

face	arête	sens
$f_0$	$e_0$	-
$f_1$	$e_1$	-
$f_2$	$e_0$	+
$f_3$	$e_4$	+

La méthode pour récupérer la suite des sommets d'une face  $f$ , énumérés dans le sens indirect (le sens des aiguilles d'une montre) en se plaçant sur  $f$  à l'extérieur du polyèdre, est alors la suivante :

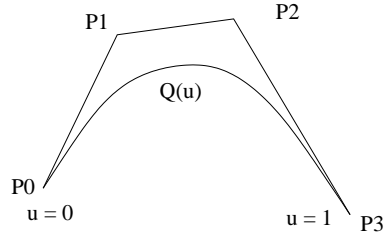
- La première arête est spécifiée. On la parcourt du début vers la fin si le booléen associé à  $f$  est +, de la fin vers le début sinon.
- Tant qu'on a pas retrouvé le sommet de départ :

Si la dernière arête parcourue  $e$  a été parcourue du début vers la fin, l'arête suivante  $e'$  de la face est le successeur positif de  $e$ , et sinon, son successeur négatif. On parcourt  $e'$  en allant du sommet commun à  $e$  et  $e'$  vers l'autre sommet de  $e'$ .

## 2 Modélisation de courbes en 2D

### 2.1 B-curves

Les courbes de Bézier ( $B$ -curves) sont des courbes du plan dont la forme ne dépend que des coordonnées d'un ensemble fini de points de contrôle. Les coordonnées de ces points sont les seules données à stocker en mémoire pour décrire la forme d'une courbe. Chaque courbe est formée par assemblage de tranches élémentaires. Chaque tranche est entièrement définie par un quadruplet de points  $P_0, P_1, P_2, P_3$ .

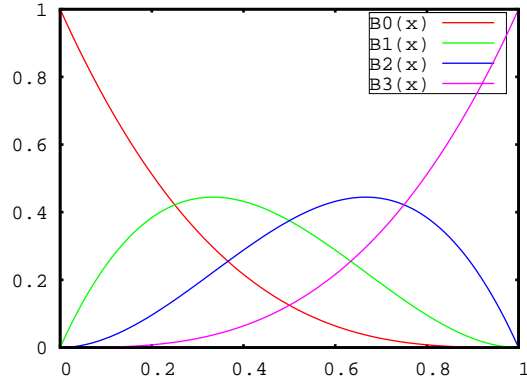


Les points de cette tranche sont les valeurs de

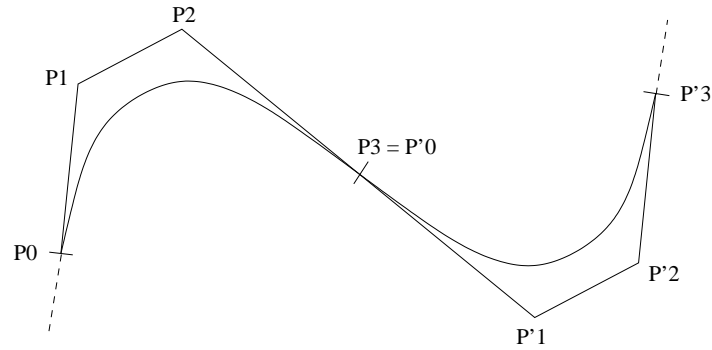
$$Q(u) = B_0(t) \times P_0 + B_1(t) \times P_1 + B_2(t) \times P_2 + B_3(t) \times P_3$$

pour  $t \in [0, \dots, 1]$ , où :

- $B_0(t) = (1 - t)^3$
- $B_1(t) = 3t(1 - t)^2$
- $B_2(t) = 3t^2(1 - t)$
- $B_3(t) = t^3$

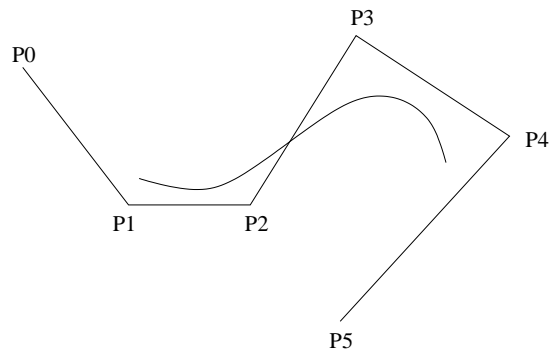


La continuité tangentielle de la courbe globale (sa dérivabilité) peut être obtenue en choisissant des tranches telles que si  $(P_0, P_1, P_2, P_3)$  ( $P'_0, P'_1, P'_2, P'_3$ ) sont les paramètres de deux tranches successives, alors  $P_3 = P'_0$  et  $P_2, P_3 = P'_0$  et  $P'_1$  sont alignés.



## 2.2 B-splines

Une *B-spline* n'est formée que d'une seule tranche dont la forme est spécifiée par une suite de points de contrôle  $P_0, \dots, P_n$  ( $n \geq 3$ ).



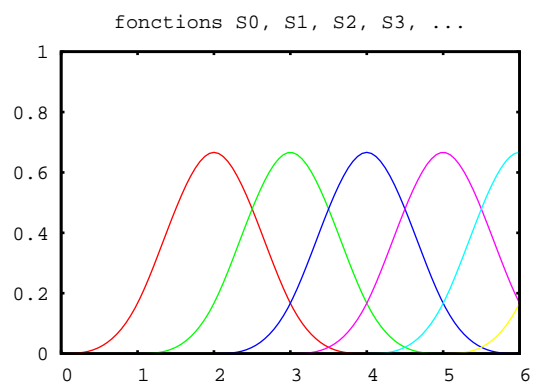
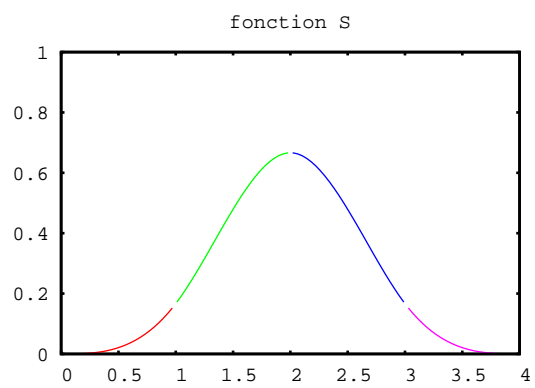
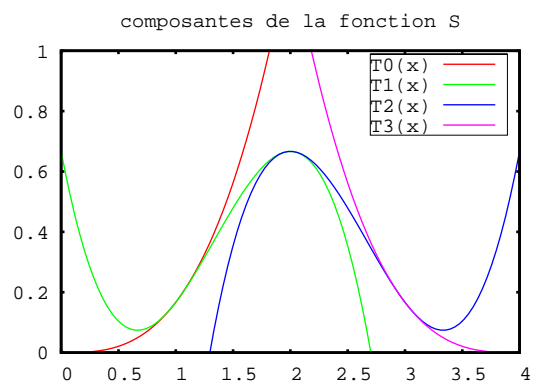
Les points de cette courbe sont les valeurs de

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n S_i(t) \times P_i$$

pour  $t \in [2, \dots, n-2]$ . Pour chaque  $i$ ,  $S_i(t)$  vaut  $S(t-i)$ , où  $S(t)$  est la fonction valant :

- $T_0(t) = \frac{1}{6}t^3$  sur l'intervalle  $[0, \dots, 1]$
- $T_1(t) = \frac{1}{6}(-3t^3 + 12t^2 - 12t + 4)$  sur l'intervalle  $[1, \dots, 2]$
- $T_2(t) = T_1(4-t)$  sur l'intervalle  $[2, \dots, 3]$
- $T_3(t) = T_0(4-t)$  sur l'intervalle  $[3, \dots, 4]$
- 0 partout ailleurs.

Voici à quoi ressemblent les composantes de la fonction  $S$ , la fonction elle-même, ainsi que les fonctions  $S_0, S_1, S_2, \dots$  :



### 2.3 *B*-patches

Les *B*-patches sont une adaptation des *B*-curves à la dimension 3. Chaque tranche d'un *B*-patch est une surface paramétrée par une matrice de 16 points  $(P_{ij})_{(i,j) \in [0, \dots, 3]^2}$ . Les points d'une tranche sont les points de la surface

$$Q(t, u) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 P_{ij} \times B_i(t) \times B_j(u)$$

pour  $(t, u) \in [0, \dots, 3] \times [0, \dots, 3]$ .

