

Infographie - M1

Examen du 23/05/2011

Indications de correction

Exercice

En divisant le vecteur $O\vec{M}$ par sa norme, on obtient un vecteur unitaire. En multipliant ce vecteur unitaire par R , on obtient un vecteur allant exactement de O à la sphère en direction de M , c'est-à-dire égal à $O\vec{M}$. Le point M est donc donné par

$$O\vec{M} = \frac{R}{\|O\vec{M}\|} \times O\vec{M}$$

Lorsque $M = M_t$ avec $O\vec{M}_t = O\vec{M}_0 + t \times \vec{u}$, la projection sphérique de M est donnée par

$$O\vec{M} = \frac{R}{\|O\vec{M}_t\|} \times O\vec{M}_0 + \frac{R}{\|O\vec{M}_t\|} \times t \times \vec{u} \quad (1)$$

Le premier terme tend clairement vers \vec{O} lorsque t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Pour calculer la limite du second, on peut faire le raisonnement intuitif suivant.

Puisque $O\vec{M}_t = O\vec{M}_0 + t \times \vec{u}$, le vecteur $O\vec{M}_0$ devient négligeable devant $t \times \vec{u}$ quand t devient très grand. Le second terme devient approximativement égal à $(R/\|\vec{u}\|) \times (t/|t|) \times \vec{u}$, soit $\vec{OF}^+ = (R/\|\vec{u}\|) \times \vec{u}$ lorsque t est positif, et $O\vec{F}^- = -\vec{OF}^+$ lorsque t est négatif.

Plus formellement :

$$\begin{aligned} \|O\vec{M}_t\| &= \sqrt{O\vec{M}_t \cdot O\vec{M}_t} \\ &= \sqrt{(O\vec{M}_0 + t \times \vec{u}) \cdot (O\vec{M}_0 + t \times \vec{u})} \\ &= \sqrt{\|O\vec{M}_0\|^2 + 2 \times t \times (O\vec{M}_0 \cdot \vec{u}) + t^2 \times \|\vec{u}\|^2} \end{aligned}$$

Soit :

$$\|O\vec{M}_t\| = |t| \times \|\vec{u}\| \times \sqrt{\frac{\|O\vec{M}_0\|}{t^2 \times \|\vec{u}\|^2} + \frac{2 \times (O\vec{M}_0 \cdot \vec{u})}{t \times \|\vec{u}\|^2} + 1}$$

Donc, lorsque t tend vers $+\infty$, le second membre de (1) tend vers

$$O\vec{F}^+ = \frac{R}{\|\vec{u}\|} \times \vec{u}$$

et vers $O\vec{F}^- = -O\vec{F}^+$ lorsque t tend vers $-\infty$. Noter que F^+ est simplement l'intersection de \mathcal{S} et de la demi-droite partant de O et allant dans la direction \vec{u} . Le point F^- est le point de \mathcal{S} atteint en allant dans la direction $-\vec{u}$.

Problème

Question 1

(1.1) (i) Chaque vecteur est orthogonal à \vec{U} . De plus, \vec{V}^+ est "à gauche" de \vec{U} et \vec{V}^- est "à droite". Pour $\vec{U} = (U_x, U_y)$, on peut prendre $\vec{V}^+ = (-U_y, U_x)$ et $\vec{V}^- = (U_y, -U_x)$. Noter que les trois vecteurs sont de même norme.

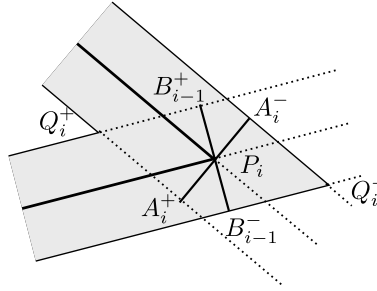
(ii) Posons

$$\vec{U} = \frac{\delta}{2 \times \|\vec{AB}\|} \vec{AB}$$

Soient \vec{V}^+ , \vec{V}^- les deux vecteurs associés comme ci-dessus. Les points cherchés peuvent être définis par $A\vec{A}^+ = B\vec{B}^+ = \vec{V}^+$ et $A\vec{A}^- = B\vec{B}^- = \vec{V}^-$.

(1.2) On suppose les sommets de P énumérés dans le sens direct.

- Pour chaque $i \in [0, \dots, n[$, soient $A_i = P_i$, $B_i = P_{i+1}$,
et soient A_i^+ , A_i^- , B_i^+ , B_i^- calculés comme en (1.1).
- Pour chaque $i \in [0, \dots, n[$,
soit Q_i^+ l'intersection des droites (A_{i-1}^+, B_{i-1}^+) et (A_i^+, B_i^+) (à détailler),
soit Q_i^- l'intersection des droites (A_{i-1}^-, B_{i-1}^-) et (A_i^-, B_i^-) (à détailler),



Une méthode fonctionnant lorsque δ est relativement petit consiste à tracer $(Q_0^+, \dots, Q_{n-1}^+)$ ou de $(Q_0^-, \dots, Q_{n-1}^-)$ et à remplir (par remplissage de taches) l'espace entre ces deux polygones.

Si δ est suffisamment grand, il est possible que deux arêtes de $(Q_0^+, \dots, Q_{n-1}^+)$ ou de $(Q_0^-, \dots, Q_{n-1}^-)$ se croisent (c'est presque le cas dans la figure en exemple dans l'énoncé) ou que tout l'espace intérieur à $(Q_0^-, \dots, Q_{n-1}^-)$ soit rempli, donc il vaut mieux utiliser la méthode suivante : pour chaque i , on trace et on remplit (par balayage) le quadrilatère $(Q_i^+, Q_{i+1}^+, Q_{i+1}^-, Q_i^-)$. Notez que si δ est très grand, il est possible que deux arêtes de ce quadrilatère se croisent - idéalement, il faut détecter cette situation et la résoudre, par exemple en inversant deux sommets.

Question 2

(2.1) Le point C^0 (resp. D^0) est simplement le point d'impact du rayon partant de L^0 et de direction $L^\delta \vec{A}^h$ (resp. $L^\delta \vec{B}^h$) avec le plan contenant O et de normale $\vec{k} = (0, 0, 1)$ (c.f. TD 1). On peut aussi se servir du théorème de Thalès : on a (faire un diagramme) $L^\delta A^h / L^\delta C^0 = L^\delta B^h / L^\delta D^0 = L^\delta L^h / L^\delta L^0 = (\delta - h) / \delta$, soit encore $L^\delta \vec{C}^0 = \delta / (\delta - h) \times L^\delta \vec{A}^h$ et $L^\delta \vec{D}^0 = \delta / (\delta - h) \times L^\delta \vec{B}^h$.

(2.2) Un algorithme très simple :

1. Pour chaque i : on pose $A = P_i$, $B = P_{i+1}$; on calcule C, D comme ci-dessus ; on affiche et on remplit (A, B, D, C) , en noir (par balayage)
2. On affiche P , et on remplit P en blanc (par balayage).

(2.3) Lorsque $0 \leq \delta \leq h$, l'ombre de l'extrusion de chaque arête $[AB]$ devient infinie - il n'est pas trop dur de voir que cette ombre ne dépend plus de la valeur exacte de δ et h , et qu'elle est délimitée par : la demi-droite partant de A , de direction \vec{LA} ; le segment $[AB]$; la demi-droite partant de B , de direction \vec{LB} .

Les points C, D sont alors indéfinis, mais rien n'empêche de choisir en (2.2.2) des points C, D sur le contour de l'ombre (C sur la demi-droite partant de A et D sur celle partant de B) suffisamment éloignés des limites de l'écran pour couvrir toute la partie de l'ombre à afficher.