

# M1- Infographie

TD 1 - Correction

## 1 Géométrie du plan

- (a) Le point  $M$  appartient à la droite contenant  $P_0, P_1$  si et seulement si les vecteurs  $P_0\vec{M}$  et  $P_0\vec{P}_1$  sont colinéaires, c'est-à-dire si  $P_0\vec{M} \propto P_0\vec{P}_1 = 0$ .  
(b)  $M$  appartient à  $\Delta$  si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = (x - x_0)(y_1 - y_0) - (y - y_0)(x_1 - x_0) = 0$$

En développant cette expression, on trouve l'équation de  $\Delta$ . En posant  $\vec{U} = P_0\vec{P}_1 = (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = (U_x, U_y)$  le coefficient de  $x$  dans l'équation est  $U_y$ , celui de  $y$  est  $-U_x$ .

- (c) On doit avoir  $P_0\vec{M} \propto P_0\vec{P}_1$  et  $P_0\vec{M} \propto P_0\vec{P}_1$  de même signes, ou encore, si  $E(x, y) = 0$  est une équation de  $\Delta$  quelconque,  $E(M) \times E(M) \geq 0$ .  
(d) Si  $M \in \Delta$ , alors  $P_0\vec{M} = t \times P_0\vec{P}_1$  pour un certain  $t$ .

En particulier,  $(x - x_0) = t \times (x_1 - x_0)$  et  $(y - y_0) = t \times (y_1 - y_0)$ .

Les points  $P_0$  et  $P_1$  sont distincts, donc  $x_1 - x_0 \neq 0$  ou bien  $y_1 - y_0 \neq 0$ , donc l'une au moins des équations permet de calculer  $t$ . On a alors :

- $M$  appartient à la demi-droite partant de  $P_0$  et contenant  $P_1$  si et seulement si  $t \geq 0$
- $M$  appartient au segment  $[P_0P_1]$  si et seulement si  $0 \leq t \leq 1$

2. Le vecteur  $(b, -a)$  est un vecteur directeur de  $\Delta$ .

On peut avoir  $a = 0$  ou  $b = 0$ , mais pas les deux.

- Si  $b \neq 0$  on peut prendre  $(0, -c/b)$ .
- Si  $a \neq 0$  on peut prendre  $(-c/a, 0)$ .

3. Il faut d'abord calculer le point d'intersection des droites  $(AB)$  et  $(CD)$ . On peut calculer les coordonnées de ce point en calculant les deux équations de ces droites, et en résolvant le système linéaire formé par ces deux équations par les méthodes habituelles.

On peut aussi calculer le réel  $t$  tel que  $(\vec{AC} + t \times \vec{CD}) \propto \vec{AB} = 0$ . En définissant  $M$  comme le point tel que  $\vec{CM} = t \times \vec{CD}$ , alors  $M = (AB) \cap (CD)$ .

On calcule ensuite  $t$  tel que  $\vec{AM} = t \times \vec{AB}$ . Les deux segments s'intersectent si et seulement si  $t, t$  sont tous deux définis et compris entre 0 et 1.

## 2 Géométrie de l'espace

1. On doit avoir  $\vec{U} \cdot \vec{MP} = 0$ , soit encore :

$$\vec{U} \cdot (\vec{MA} + \vec{AP}) = 0$$

$$\vec{U} \cdot (\vec{MA} + t \times \vec{U}) = 0$$

$$\vec{U} \cdot \vec{MA} + \vec{U} \cdot (t \times \vec{u}) = \vec{U} \cdot \vec{MA} + t \times \|\vec{u}\|^2 = 0$$

soit :

$$t = \frac{\vec{u} \cdot \vec{AM}}{\|\vec{u}\|^2}$$

- (a) On doit avoir  $\vec{AM} \cdot \vec{N} = 0$ , soit encore

$$(x - A_x) \times N_x + (y - A_y) \times N_y + (z - A_z) \times N_z = 0$$

En développant cette équation, on trouve l'équation du plan.

- (b) Deux points  $M$  et  $M'$  sont du même côté du plan si  $\vec{AM} \cdot \vec{N}$  et  $\vec{AM'} \cdot \vec{N}$  ont même signe, ou encore si  $(\vec{AM} \cdot \vec{N}) \times (\vec{AM'} \cdot \vec{N}) \geq 0$
- (c) On doit avoir  $\vec{N} \cdot \vec{AP} = 0$ , soit encore :

$$\vec{N} \cdot (\vec{AM} + \vec{MP}) = 0$$

$$\vec{N} \cdot (\vec{AM} + t \times \vec{U}) = 0$$

$$\vec{N} \cdot \vec{AM} + t \times (\vec{N} \cdot \vec{U}) = 0$$

Soit encore, si la solution de cette équation est positive ou nulle,

$$t = \frac{-(\vec{N} \cdot \vec{AM})}{\vec{N} \cdot \vec{U}} = \frac{\vec{N} \cdot \vec{MA}}{\vec{N} \cdot \vec{U}}$$

2. On doit avoir :

$$\| \vec{CP} \|^2 = \vec{CP} \cdot \vec{CP} = R^2$$

$$(\vec{CM} + \vec{MP}) \cdot (\vec{CM} + \vec{MP}) = R^2$$

$$(\vec{CM} + t \times \vec{U}) \cdot (\vec{CM} + t \times \vec{U}) = R^2$$

En développant le produit scalaire, on obtient :

$$(\vec{CM} \cdot \vec{CM}) + (\vec{CM} \cdot t \times \vec{U}) + (t \times \vec{U} \cdot \vec{CM}) + (t \times \vec{U} \cdot t \times \vec{U}) = R^2$$

soit encore :

$$t^2 \|\vec{U}\|^2 + t \times 2 \times (\vec{U} \cdot \vec{CM}) + \|\vec{CM}\|^2 - R^2 = 0$$

soit une équation en  $t$  du second degré, dont il faut prendre la plus petite solution positive si elle existe (premier point d'impact dans la direction de  $\vec{U}$ ).

3.  $M = (x, y, z)$  appartient au cylindre si et seulement si :

$$\| \vec{MA} + t \times \vec{U} \|^2 = R^2 \text{ avec } t = \frac{\vec{U} \cdot \vec{AM}}{\|\vec{U}\|^2}$$

et il suffit de développer cette équation. Le résultat est une équation du second degré en  $x, y, z$ .