

## Infographie - M1 / Examen du 23/05/2011

2h30 - Notes de cours et de TD autorisées.

Les constantes et opérations usuelles ( $\pi$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ , produit vectoriel  $\wedge$ , produit scalaire  $\cdot$ , produit croisé  $\otimes$ , etc) et les algorithmes vus en cours sont donnés. Tous les autres traitements (e.g. calculs d'intersections) devront être décrits suffisamment en détail pour être implémentables sans aucune réflexion supplémentaire (i.e. la simple description géométrique d'un traitement n'est pas suffisante), éventuellement de manière structurée (étapes numérotées, conditionnelles, itérations, piles, listes, tableaux).

### Exercice

Soit  $\mathcal{S}$  une sphère centrée en  $O$ , de rayon  $R$ . Pour tout point  $M$  de l'espace extérieur à  $\mathcal{S}$ , appelons *projection sphérique* (relativement à  $\mathcal{S}$ ) le point  $M$  intersection de  $[OM]$  et de la surface de  $\mathcal{S}$ . Exprimer les coordonnées de  $M$  en fonction de celles de  $M$ .

Soit à présent  $\Delta$  une droite d'équation paramétrique  $\Delta(t) = M_0 + t \times \vec{u}$ . Montrer que lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , la projection sphérique de  $\Delta(t)$  tend vers un point de fuite  $F^+$  ne dépendant plus de  $M_0$ . Montrer de même l'existence d'un second point de fuite  $F^-$  lorsque  $t$  tend vers  $-\infty$ .

### Problème

Un logiciel de dessin permet en général de tracer des formes 2D en choisissant l'épaisseur du trait tracé, et en simulant des effets d'ombrage. On s'intéresse ici à la manière dont ces deux éléments peuvent être implémentés.

#### Question 1

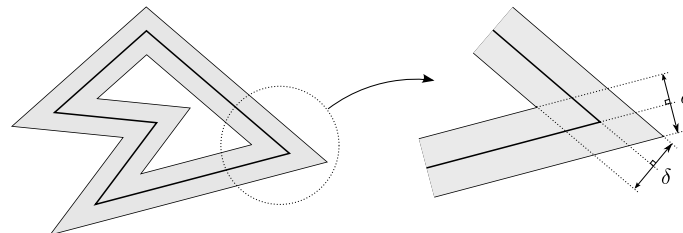
(1.1) Soit  $\vec{U}$  un vecteur non nul du plan. A partir des coordonnées de  $\vec{U}$ , trouver les coordonnées de deux vecteurs  $\vec{V}^+$  et  $\vec{V}^-$  non nuls tels que :

- $\vec{V}^+ \cdot \vec{U} = 0$  et  $\vec{U} \propto \vec{V}^+ > 0$ ,
- $\vec{V}^- \cdot \vec{U} = 0$  et  $\vec{U} \propto \vec{V}^- < 0$ .

Soit à présent  $\delta > 0$  et  $A, B$  deux points distincts du plan. A partir des coordonnées de  $A$  et  $B$ , trouver les coordonnées de  $A^+, A^-, B^+, B^-$  tels que

- $[A^- A^+]$  soit orthogonal à  $[AB]$ , de milieu  $A$ , de longueur  $\delta$ ,
- $[B^- B^+]$  soit orthogonal à  $[AB]$ , de milieu  $B$ , de longueur  $\delta$ ,
- $[AB], [A^+ B^+], [A^- B^-]$  soient deux à deux parallèles.

(1.2) Etant donné un polygone  $(P_0, \dots, P_{n-1})$  du plan et  $\delta > 0$ , on souhaite à présent tracer ce polygone avec un trait d'épaisseur  $\delta$ . La jonction des tracés d'arêtes se fera suivant le modèle ci-dessous :



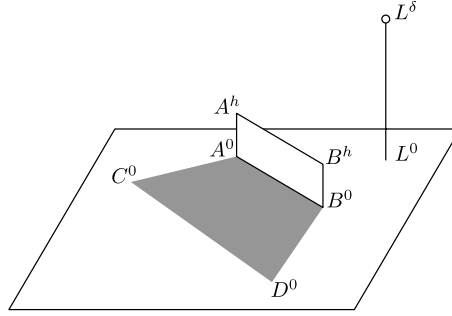
Donner un algorithme détaillé permettant de réaliser un tel tracé. La valeur de  $\delta$  devra pouvoir être arbitrairement grande. On pourra supposer que les sommets du polygone sont énumérés dans le sens direct (en parcourant la suite des sommets, l'intérieur du polygone est vers la gauche).

### Question 2

Pour tout point  $M$  du plan de coordonnées  $(x, y)$  et pour tout réel  $z$ , on note  $M^z$  le point de l'espace de coordonnées  $(x, y, z)$ . Soit  $h > 0$ .

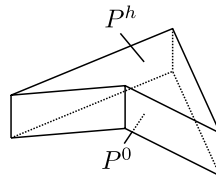
**(2.1)** Pour tout segment  $[AB]$  du plan, appelons *h-extrusion* de  $[AB]$ , le polygone de l'espace  $(A^0, B^0, B^h, A^h)$ .

On suppose placés dans l'espace une surface (infinie, plane) d'équation  $z = 0$ , une source lumineuse en  $L^\delta$  avec  $\delta > h$ , ainsi que la *h-extrusion* d'un segment  $[AB]$ . L'ombre de  $(A^0, B^0, B^h, A^h)$  sur la surface forme alors un quadrilatère  $(A^0, B^0, D^0, C^0)$ .



Exprimer les coordonnées de  $C, D$  en fonction de celles de  $A, B, L$  et de  $\delta, h$ .

**(2.2)** Pour tout polygone  $P = (P_0, \dots, P_{n-1})$  du plan ( $P_n = P_0$ , etc.), appelons *h-extrusion* de  $P$  le polyèdre formé des faces  $P^0 = (P_0^0, \dots, P_{n-1}^0)$ ,  $P^h = (P_0^h, \dots, P_{n-1}^h)$ , et pour chaque  $i \in [0, \dots, n]$ , de la face  $(P_i^0, P_{i+1}^0, P_{i+1}^h, P_i^h)$ .



Trouver un algorithme efficace permettant, étant donnés un polygone  $P$  quelconque, un point  $L$ ,  $h > 0$  et  $\delta > h$ , d'afficher  $P$  à l'écran comme si la *h-extrusion* de  $P$  était placée sur une surface d'équation  $z = 0$ , à côté d'une source lumineuse en  $L^\delta$ , l'observateur étant placé à l'infini dans la direction des  $z$  positifs et regardant dans la direction des  $z$  négatifs.

**(2.3)** Que se passe-t-il lorsque  $0 \leq \delta \leq h$  ? Sauriez-vous écrire une variante de votre algorithme gérant cette situation ?