

M1 - Infographie

TD 1

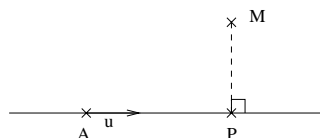
Dans les questions qui suivent, on considère comme des opérations primitives toutes les opérations de base sur les coordonnées (addition, soustraction, produit scalaire ou croisé, multiplication par un réel). Les tests demandés (“montrer comment déterminer si...”, etc.) doivent autant que possible être écrits à partir de ces seules opérations, sans détailler les coordonnées des vecteurs ou des points.

1 Géométrie du plan

1. Soit Δ une droite du plan contenant deux points P_0, P_1 distincts.
 - (a) Trouver le test permettant de déterminer, à partir de P_0, P_1 et de la donnée d'un point M , si M appartient à Δ .
 - (b) On suppose $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$ et $M = (x, y)$. En développant le test trouvé en (a), trouver une équation de Δ .
 - (c) Etant donnés deux points M et M' , trouver le test permettant de déterminer si M et M' sont du même côté de Δ .
 - (d) Etant donné un point M , montrer comment déterminer si :
 - M appartient à la demi-droite partant de P_0 et contenant P_1 ,
 - M appartient au segment $[P_0P_1]$.
2. Soit Δ une droite définie par l'équation $ax+by+c=0$. Dédurre de la question 1.b un vecteur directeur de Δ . Montrer comment calculer en toute généralité (a non nul, ou b non nul) un point de cette droite.
3. Soient A, B, C et D des points du plan deux à deux distincts. Montrer comment déterminer si $[AB]$ et $[CD]$ s'intersectent, et comment dans ce cas calculer leur point d'intersection.

2 Géométrie de l'espace

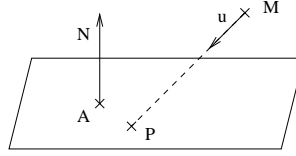
1. Soit Δ une droite contenant un point A , de direction U . Soit M un point quelconque, et P la projection orthogonale de M sur Δ .



Sans donner le détail des coordonnées des points ou vecteurs, trouver l'équation permettant de calculer le réel t tel que $t \times U = AP$.

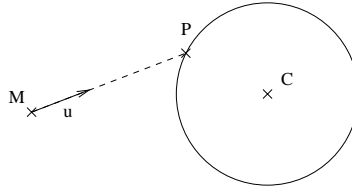
2. Soit Π un plan contenant un point A , de normale N .
 - (a) Etant donné un point M , trouver le test permettant de déterminer si M appartient à Π .
 - (b) En posant $A = (x_A, y_A, z_A)$, $N = (x_N, y_N, z_N)$ et $M = (x, y, z)$, développer ce test pour trouver une équation de Π .

- (c) Etant donné deux points M et M quelconques, montrer comment déterminer si M et M sont du même côté du plan.
- (d) Soit U un vecteur et M un point quelconque.



Noter que lorsqu'elle existe, la projection P de M sur Π dans la direction U vérifie $MP = t \times U$ pour un certain réel $t \geq 0$ tel que $P \in \Pi$. En déduire, sans donner le détail des coordonnées des points ou vecteurs, l'équation permettant de calculer t .

3. Soit S une sphère de rayon R centré en un point C , un point M quelconque et un vecteur U .



Noter que lorsqu'elle existe, la projection P de M sur S dans la direction U vérifie $MP = t \times U$ pour un certain réel $t \geq 0$ tel que $P \in S$.

Noter d'autre part qu'on a $P \in S$ si et seulement si a $\|CP\|^2 = CP \cdot CP = R^2$

En déduire, sans donner le détail des coordonnées des points ou vecteurs, l'équation permettant de calculer t .

4. Rappelons que pour tous vecteurs U, V , on a $U \cdot V = \|U\| \times \|V\| \times \cos \theta$, où θ est l'angle formé par U et V . On considère un cylindre de rayon R , dont l'axe est de direction U et contient un point A . Noter qu'un point M est sur le cylindre si et seulement si la projection P de M sur l'axe vérifie $\|MP\|^2 = R^2$. En déduire l'équation du cylindre.

