

# Infographie - M1

Examen du 21/05/2013

Indications de correction.

## Exercice 1

Il faut généraliser le test en 2D : pour chaque  $i$ , soit  $\Pi_i$  le plan contenant  $F_i$  et soit  $Q_i$  un sommet quelconque du polyèdre n'appartenant pas à  $F_i$  ; le point  $M$  est intérieur au polyèdre si et seulement si  $M$  et  $Q_i$  sont du même côté de  $\Pi_i$ .

Pour calculer le test, il faut calculer pour chaque  $i$  une normale  $\vec{N}_i$  à  $P_i$  : on peut prendre  $\vec{N}_i = P_0^i P_1^i \wedge P_0^i P_2^i$ . Le test est vérifié si et seulement si pour chaque  $i$ , les produits scalaires  $\vec{N} \cdot P_0^i \vec{M}$  et  $\vec{N} \cdot P_0^i Q_i$  sont de même signe.

## Exercice 2

L'observateur voit le point  $M$  si et seulement si : ou bien  $M$  et  $A$  sont du même côté du plan ; ou bien ils ne sont pas du même côté du plan, et le point  $P = [AM] \cap \Pi$  est intérieur au cercle.

On cherche le  $\alpha$  tel que  $\vec{AP} = \alpha \vec{AM}$ . On doit avoir  $\vec{CP} \cdot \vec{N} = (\vec{CA} + \alpha \vec{AP}) \cdot \vec{N} = (\vec{CA} + \alpha \vec{AM}) \cdot \vec{N}$ . Si  $\vec{AM} \cdot \vec{N} = 0$ ,  $\alpha$  est indéfini - mais dans ce cas,  $\vec{AM}$  est parallèle au plan, et l'observateur voit  $M$ . Sinon, et si  $\alpha$  n'est pas dans  $]0 \dots 1[$ , les points  $A$  et  $M$  sont (au sens large) du même côté de  $\Pi$ , et l'observateur voit  $M$ . Sinon, l'observateur voit  $M$  si et seulement si  $\vec{CP} \cdot \vec{CP} = \|\vec{CP}\|^2 \leq R^2$ .

## Exercice 3

L'exercice ressemble beaucoup au test naïf d'intériorité du cours. L'idée générale est de calculer toutes les intersections des segments avec les arêtes - en prenant les mêmes précautions que dans le test - puis de les trier en fonction par exemple de leur distance à  $A$  et enfin, de découper la liste obtenue en segments - alternativement extérieurs/intérieurs. Voici une description informelle d'un algorithme simple. Les étapes 1 et 4 sont linéaires en  $n$ , l'étape 3 est au pire linéaire en  $n$ , l'étape 2 est au pire en  $n \log n$  avec par exemple un tri rapide.

*Etape 1.* Pour chaque arête on détermine si celle-ci intersecte le segment  $[AB]$ , en négligeant les arêtes parallèles à  $[AB]$  (t.q.  $\vec{AB} \propto P_i \vec{P}_{i+1} = 0$ ) et en privant les arêtes de leur sommet "le plus haut" : de  $P_{i+1}$  si  $\vec{AB} \propto P_i \vec{P}_{i+1} > 0$ , et de  $P_i$  sinon. Le calcul produit une liste  $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  avec  $p \leq n$ , où chaque  $\alpha_i$  est compris entre 0 et 1, et chaque  $M_i$  tel que  $\vec{AM}_i = \alpha_i \vec{AB}$  est un point d'intersection.

*Etape 2.* On trie la liste des  $\alpha_i$ , en supprimant toute valeur apparaissant deux fois (cas du segment frôlant le bord du polygone en un sommet). Une fois la liste triée et simplifiée, on lui ajoute 0 (pour  $A$ ) si cette valeur ne s'y trouve pas déjà, et 1 (pour  $B$ ) si cette valeur ne s'y trouve pas déjà. On obtient une liste  $\mathcal{B} = (\beta_0, \dots, \beta_{p+1})$  strictement croissante, avec  $\beta_0 = 0$ ,  $\beta_{p+1} = 1$ .

*Etape 3.* Soient  $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1$  deux listes vides. Tant que la liste  $\mathcal{B}$  a au moins deux éléments  $\beta, \beta$  en tête : si le dernier ajout s'est fait dans  $\mathcal{L}_0$  on ajoute  $(\beta, \beta)$  à  $\mathcal{L}_1$ , sinon on ajoute ce couple à  $\mathcal{L}_0$  ; on supprime  $\beta$  de  $\mathcal{B}$ .

*Etape 4.* Si  $A$  est strictement extérieur à  $P$ , on renvoie  $\mathcal{E} = \mathcal{L}_0$  et  $\mathcal{I} = \mathcal{L}_1$ . Sinon, on renvoie ce couple inversé.

Voici la manière dont on peut adapter l'algorithme au problème 3D posé. Les calculs sont à détailler. Si le segment est, pour l'observateur, devant le plan  $\Pi$  contenant le polygone (*c.f.* Roberts), il est totalement visible.

S'il est intégralement derrière ce plan, on se ramène au cas 2D : on calcule les coordonnées de  $A = [MA] \cap \Pi$  et  $B = [MB] \cap \Pi$ , on munit  $\Pi$  d'un repère local, et l'on calcule le fenêtrage de  $[A B]$  par le polygone dans ce repère local, à l'aide de l'algorithme précédent. Les portions de  $[A B]$  extérieures à  $P$  sont, relativement à  $\Pi$ , les vues en perspective des portions de  $[AB]$  vues par l'observateur. Pour retrouver les portions de  $[AB]$  vues par l'observateur, il faut, pour chaque extrémité de portion  $E$  de  $[A B]$ , retrouver le point  $E$  de  $[AB]$  tel que  $E = [AB] \cap \Pi$ .

Le cas intermédiaire où  $[AB]$  traverse le plan  $\Pi$  demande quelques calculs complémentaires : il faut calculer le point  $I = [AB] \cap \Pi$ , et ne considérer dans l'algorithme précédent que la portion de segment à l'arrière du plan ; la portion devant le plan sera ajoutée à la liste des portions externes, puisque par hypothèse, le point  $I$  est dans  $\Pi$  à l'extérieur du polygone.

#### Exercice 4

Les calculs sont à détailler.

*Méthode 1.* On calcule la translation  $[D_1E_1]$  du segment  $[AB_1]$ , de direction orthogonale à ce segment, de distance  $R$ , vers  $B_2$  ; symétriquement, on calcule la translation  $[D_2E_2]$  du segment  $[AB_2]$ , de direction orthogonale à ce segment, de distance  $R$ , vers  $B_1$  ; on calcule  $C = (D_1E_1) \cap (D_2E_2)$  ;  $M_1, M_2$  sont les projections orthogonales de  $C$  sur  $(AB_1), (AB_2)$ .

*Méthode 2.* Soit  $B_1$  le point sur la demi-droite  $[AB_2)$  tel que  $\overline{AB_1} = \overline{AB_2}$ . Soit  $I$  le milieu de  $[B_1B_2]$ . Les triangles  $(AIB_1)$  et  $(ACM_1)$  sont semblables, donc  $\frac{R}{\overline{AC}} = \frac{\overline{IB_1}}{\overline{AB_1}}$  et  $\frac{\overline{AM_1}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{AB_1}}$ . On peut donc calculer  $\overline{AC}$ , puis  $\overline{AM_1}$  (égal à  $\overline{AM_2}$ ).