

Preuves assistées par ordinateur – TD n° 7

Théories et modèles

Exercice 1 (Indépendance-1) Soit $p(_, _)$ un symbol d prédicat d’arité 2. On considèr
l s formul s

$$\begin{aligned} R &\equiv \forall x \, p(x, x) \\ S &\equiv \forall x \, \forall y \, [p(x, y) \Rightarrow p(y, x)] \\ T &\equiv \forall x \, \forall y \, \forall z \, [p(x, y) \wedge p(y, z) \Rightarrow p(x, z)] \end{aligned}$$

Montr r qu l s formul s R, S t T sont indép ndant s, n c s ns qu’aucun d s trois séqu nts
 $S, T \vdash R$, $R, T \vdash S$ t $R, S \vdash T$ n’ st dérivabl .

Exercice 2 (Extrait de l’examen de juin 2004)

On considèr la théori \mathcal{T} (du pr mi r ord) dont la signatur st formé par

- d ux symbol s d constant 0 t 1,
- un symbol d prédicat $<$ d’arité 2,

t dont l s axiom s sont :

$$(A_1) \quad 0 < 1$$

$$(A_2) \quad \forall x \, \neg(x$$

$$) (A_{231111432131411234111114112411111411341111111411142432424}$$

Exercice 4 (Théories égalitaires) Soit \mathcal{T} un théorie égalitaire. On dit qu'un modèle \mathcal{M} d \mathcal{T} est égalitaire lorsque le prédicat binaire d'égalité $=$ est interprété par la relation d'égalité dans le modèle, c'est-à-dire : $\llbracket t = u \rrbracket_\rho^\mathcal{M} = 1$ ssi $\llbracket t \rrbracket_\rho^\mathcal{M} = \llbracket u \rrbracket_\rho^\mathcal{M}$ (pour toute valuation ρ sur \mathcal{M}).

Montrer que tout modèle \mathcal{M} d'un théorie égalitaire \mathcal{T} peut être transformé en un modèle égalitaire \mathcal{M}' d \mathcal{T} . (On justifiera les différents étapes de la construction de \mathcal{M}' .)

Exercice 5 (Isomorphisme de modèles) Soit Σ une signature.

1. Définir une notion d'isomorphisme entre deux Σ -modèles \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 .
2. En déduire que si \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 sont deux Σ -modèles isomorphes, alors pour toute formule clos A , on a $\mathcal{M}_1 \models A$ si et seulement si $\mathcal{M}_2 \models A$.

Exercice 6 (Modèles standard de l'arithmétique) À tout modèle égalitaire ¹ \mathcal{M} de l'arithmétique, on associe naturellement une application $\phi^\mathcal{M} : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{M}$ définie par

$$\phi^\mathcal{M}(n) = \llbracket \underbrace{s(\dots s(0) \dots)}_n \rrbracket^\mathcal{M}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Vérifier que $\phi^\mathcal{M}$ est injective. Est-elle nécessairement surjective ?

On dit d'un modèle \mathcal{M} de l'arithmétique qu'il est *standard* lorsque $\phi^\mathcal{M}$ est bijective.

2. Montrer que tous les modèles standard de l'arithmétique sont isomorphes.

Exercice 7 (Arithmétique non-standard) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note \mathcal{T}_n l'extension de l'arithmétique obtenue en introduisant :

- Un nouveau symbole de constant ω ;
- Les n axiomes $\neg[\omega = 0], \neg[\omega = s(0)], \dots, \neg[\omega = \underbrace{s(\dots s(0) \dots)}_{n-1}]$

Enfin, on note \mathcal{T}_ω la théorie limite, obtenue en réunissant les axiomes des théories \mathcal{T}_n ($n \in \mathbb{N}$).

1. Montrer que chacune des théories \mathcal{T}_n ($n \in \mathbb{N}$) est cohérente.
2. Peut-on en déduire que \mathcal{T}_ω est cohérente ? Pourquoi ?
3. Démontrer de plus que les théories précédentes que l'arithmétique admettent un modèle non standard.

Précision : Dans cet exercice, on suppose la cohérence de l'arithmétique.

1. On ne s'intéresse ici qu'aux modèles égalitaires de l'arithmétique.