

Preuves assistées par ordinateur – TD n° 8

Définitions inductives de prédicats

Exercice 1 – Une première définition de la clôture réflexive-transitive

Sur un type donné $T : \text{Set}$ fixé, on cherche à définir la clôture réflexive-transitive d'une relation $R : T \rightarrow T \rightarrow \text{Prop}$, à savoir la plus petite relation réflexive et transitive R^* contenant R . Il est naturel de définir inductivement cette relation à partir de ses trois règles suivantes :

$$\frac{R(x, y)}{R^*(x, y)} \quad \frac{}{R^*(x, x)} \quad \frac{R^*(x, y) \quad R^*(y, z)}{R^*(x, z)}$$

- Les règles ci-dessus expriment que la relation R^* contient R , est réflexive et transitive. Comment exprimer-t-on que R^* est la plus petite relation satisfaisant ces propriétés ?

En Coq, cette définition inductive s'écrit de la manière suivante :

```
Inductive clos1 (R : T -> T -> Prop) : T -> T -> Prop :=
| cl1_base : forall x y, R x y -> clos1 R x y
| cl1_refl : forall x, clos1 R x x
| cl1_trans : forall x y z, clos1 R x y -> clos1 R y z -> clos1 R x z.
```

La définition ci-dessus, qui est paramétrée par la relation R , définit en réalité un *constructeur de relation* $\text{clos1} : (T \rightarrow T \rightarrow \text{Prop}) \rightarrow T \rightarrow T \rightarrow \text{Prop}$ qui à chaque relation binaire R associe sa clôture réflexive-transitive $\text{clos1 } R$, défini au moyen de ses constantes `cl1_base`, `cl1_refl` et `cl1_trans` (qui correspondent aux trois règles) et du principe d'induction `clos1_ind`, qui exprime que $\text{clos1 } R$ est la plus petite relation réflexive et transitive contenant R .

- Comparer le principe d'induction `clos1_ind` avec celui formulé à la question 1. Lequel des deux est le plus général ? Le plus facile à utiliser ? Sont-ils équivalents ?
- Montrer que si R est symétrique, alors $\text{clos1 } R$ est symétrique également.

Exercice 2 – Une autre définition de la clôture réflexive-transitive

Dans les démonstrations précédentes, il est souvent plus commode de définir la clôture réflexive-transitive d'une manière un peu différente, à savoir comme la relation R_2^* engendrée par les deux règles suivantes :

$$\frac{}{R_2^*(x, x)} \quad \frac{R_2^*(x, y) \quad R(y, z)}{R_2^*(x, z)}$$

Cette définition alternative se modélise en Coq au moyen de la définition inductive suivante :

```
Inductive clos2 (R : T -> T -> Prop) : T -> T -> Prop :=
| cl2_refl : forall x, clos2 R x x
| cl2_next : forall x y z, clos2 R x y -> R y z -> clos2 R x z.
```

L'objectif est de montrer l'équivalence de ces deux définitions. Pour ce faire, on pourra suivre les étapes suivantes :

1. Montrer qu $\text{clos2 } R \ x \ y$ entraînent $\text{clos1 } R \ x \ y$ (pour tous $x, y : T$).
2. Montrer qu $\text{clos1 } R \ x \ y$ entraînent $\text{clos2 } R \ x \ y$ (pour tous $x, y : T$).
3. Montrer qu $\text{clos2 } R$ est une relation transitive.
4. En déduire qu $\text{clos1 } R \ x \ y$ entraînent $\text{clos2 } R \ x \ y$ (pour tous $x, y : T$).
5. Montrer qu l'opération de clôture réflexive-transitive est idempotente, c'est-à-dire qu :
 $\text{clos1 } (\text{clos1 } R) \ x \ y \leftrightarrow \text{clos1 } R \ x \ y$ pour tous $x, y : T$.

Exercice 3 – Une troisième définition de la clôture réflexive-transitive

On travaille toujours avec type $T : \text{Set}$ fixé.

1. Définir la relation identité $\text{id} : T \rightarrow T \rightarrow \text{Prop}$ ainsi que l'opérateur de composition de relations $\text{comp} : (T \rightarrow T \rightarrow \text{Prop}) \rightarrow (T \rightarrow T \rightarrow \text{Prop}) \rightarrow T \rightarrow T \rightarrow \text{Prop}$.
2. Définir une fonction $\text{puiss} : (T \rightarrow T \rightarrow \text{Prop}) \rightarrow \mathbb{n} \rightarrow T \rightarrow T \rightarrow \text{Prop}$ telle que $\text{puiss } R \ n$ calcule la puissance n -ième de la relation (par l'opération de composition).

Une troisième définition de la clôture réflexive-transitive d'une relation R est donnée par la réunion des puissances successives de R , c'est-à-dire par :

Definition $\text{clos3 } (R : T \rightarrow T \rightarrow \text{Prop}) \ (x \ y : T) := \text{exists } n, \text{puiss } R \ n \ x \ y$.

3. Montrer que cette définition est équivalente aux deux précédentes (clos1 et clos2).