

# Modélisation et spécification – Master 2 Informatique

## TD 2 : (bi)simulation

### Jeux de (bi)simulation

#### Simulation

Le jeu de simulation forte est définie comme suit : Étant donné un système de transition étiqueté on commence à partir d'un couple d'état  $(S_1; t_1)$ . Il y a deux joueurs : un "attaquant" et un "défenseur". Le but de l'attaquant est de montrer que  $t_1$  ne peut pas simuler  $S_1$ . Les deux joueurs jouent à tour de rôle. L'attaquant commence. On commence à partir de la configuration actuelle  $(S_1; t_1)$ .

- L'attaquant choisit une action  $a$ . Ensuite il doit choisir une transition  $S_1 \xrightarrow{a} S_2$ .
- Le défenseur doit prendre la même action  $a$  et choisir une transition  $t_1 \xrightarrow{a} t_2$
- Le couple  $(S_2; t_2)$  devient la configuration actuelle et on recommence.

Un jeu est une séquence maximale de configurations obtenue avec les règles précédentes. Un jeu est perdant pour le joueur qui est bloqué et ne peut plus faire d'action. Si le jeu est infini, le défenseur gagne.

$t_1$  simule  $S_1$  si et seulement si le défenseur a une stratégie gagnante universelle.  $t_1$  ne simule pas  $S_1$  si et seulement si l'attaquant a une stratégie gagnante universelle. Un joueur a une stratégie gagnante si il a une stratégie lui permettant de gagner le jeu quels que soient les choix de l'autre joueur.

#### Bisimulation

De la même manière un peu définir un jeu de bisimulation à partir de  $(S_1; t_1)$ . Dans ce cas les règles sont les suivantes.

- L'attaquant choisit le coté gauche ou droite de la configuration actuelle et une action  $a$ . Ensuite il doit choisir une transition  $S_1 \xrightarrow{a} S_2$  s'il a choisi la gauche ou une transition  $t_1 \xrightarrow{a} t_2$  s'il a choisi la droite.
- Le défenseur doit prendre la même action  $a$  et choisir une transition  $t_1 \xrightarrow{a} t_2$  si l'attaquant a choisi la gauche ou une transition  $S_1 \xrightarrow{a} S_2$  si l'attaquant a choisi la droite.
- Le couple  $(S_2; t_2)$  devient la configuration actuelle et on recommence.

La condition de gain est la même que pour le jeu de simulation.  $S_1$  est bisimilaire à  $t_1$  si et seulement si le défenseur a une stratégie gagnante universelle.  $S_1$  n'est pas bisimilaire à  $t_1$  si et seulement si l'attaquant a une stratégie gagnante universelle.

#### (Bi)simulation observationnelle

Dans ce cas, on doit modifier le jeu pour tenir compte des actions internes.

##### Exercice 1 :

*Bisimulation*

Trouvez les relations de bisimulation et de simulation (forte ou observationnelle) entre toutes les paires de STE de la figure 1. Pour les deux premiers systèmes, donnez une stratégie gagnante pour le défenseur dans le jeu de bisimulation.

##### Exercice 2 :

*Équivalence de traces*

Les deux premiers STE dans la figure 2 représentent deux implémentations (notons-les  $CTM_1$  et  $CTM_2$ ) d'un distributeur de thé et café.

1. Quelle est la relation entre les traces des ces implémentations ?
2. Le 3ème STE de la figure 2 (designons-le par  $CS$ ) est celui d'un utilisateur du distributeur. Construisez les STE correspondant aux expressions suivantes :  
 $(CS \parallel_{\{\text{coin}, \text{coffee}, \text{tea}\}} CTM_1) \setminus_{\{\text{coin}, \text{coffee}, \text{tea}\}}$   
et  $(CS \parallel_{\{\text{coin}, \text{coffee}, \text{tea}\}} CTM_2) \setminus_{\{\text{coin}, \text{coffee}, \text{tea}\}}$   
Les STE que vous obtenez ont-ils les mêmes traces ?
3. Les STE obtenues au point précédent sont-elles bisimilaires (observationnel) ? Est-ce qu'il y a une relation de simulation entre les deux ?

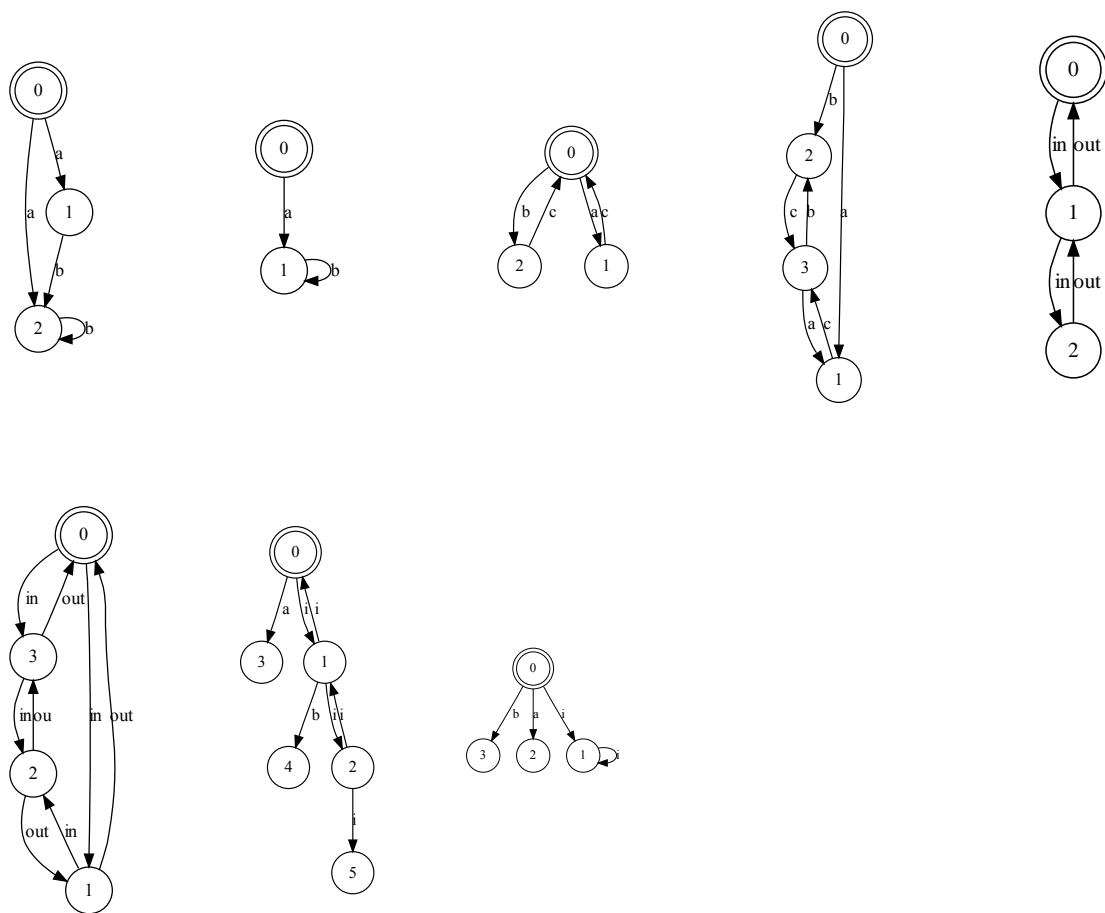


FIGURE 1 – STE

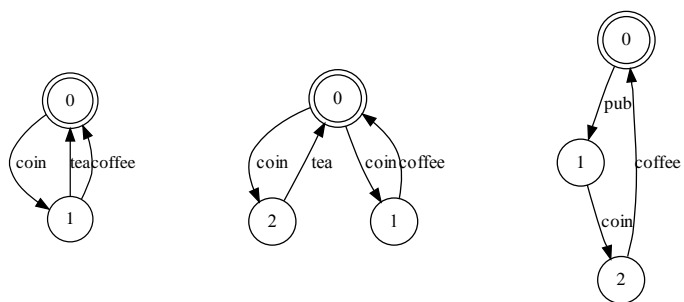


FIGURE 2 – Deux STE pour un distributeur de café et un STE pour son utilisateur.