Modélisation et spécification – Master 2 Informatique
TD 5 : Logique temporelle LTL

On veut exprimer des propriétés avec la logique temporelle LTL.

Les formules se construisent selon la grammaire :

$\phi ::= \textit{proposition} \parallel \phi \vee \phi \parallel \phi \wedge \phi \parallel \neg\phi \parallel \bigcirc \phi \parallel \Diamond\phi \parallel \Box\phi \parallel \phi\mathcal{U}\phi$

Elles s'interprètent sur les traces σ, où $\sigma(i)$ est l'ensemble des propositions atomiques vraies à l'étape i.

- $\sigma \models \phi$ ssi $\sigma, 0 \models \phi$
- $\sigma, i \models p$ ssi p est dans $\sigma(i)$
- $\sigma, i \models \bigcirc\phi$ ssi $\sigma, i+1 \models \phi$
- $\sigma, i \models \Diamond\phi$ ssi $\exists j \geq i : \sigma, j \models \phi$
- $\sigma, i \models \Box\phi$ ssi $\forall j \geq i : \sigma, j \models \phi$
- $\sigma, i \models \phi\mathcal{U}\psi$ ssi $\exists j \geq i : (\sigma, j \models \psi) \wedge (\forall k \in [i, j[: \sigma, k \models \phi\ )$

Exercice 1 : *Evaluer les formules*

Compléter le tableau suivant en indiquant dans chaque case si la formule est vrai (1) ou fausse (0).

i	0	1	2	3	4	5	6
$\sigma(i)$	$\emptyset$	$\{p\}$	$\{p,q\}$	$\{q\}$	$\{p\}$	$\emptyset$	$\{p,q\}$
$p \wedge q$							
$\Diamond(p \wedge q)$							
$p\mathcal{U}q$							

Exercice 2 : *Compréhension de LTL*

Donnez un système qui satisfait les formules LTL suivantes où argumentez pourquoi il n'y en a pas.

1. $\Box\Diamond p$
2. $(\Box\Diamond p) \wedge (\Box\Diamond\neg p)$
3. $p\mathcal{U}q$
4. $(p\mathcal{U}q) \wedge (p\mathcal{U}\neg q)$
5. $\Box((p\mathcal{U}q) \wedge (p\mathcal{U}\neg q))$
6. $(\Box p) \wedge (\Box\neg p)$
7. $(\Box p) \vee (\Box\neg p)$
8. $(\Diamond p) \wedge (\Diamond\neg p)$
9. $\Box(p \Rightarrow \bigcirc q)$

Exercice 3 : *LTL vers Français*

Exprimer dans un Français ordinaire, les propriétés LTL suivantes :

1. $(\Diamond p) \Rightarrow (\Box q)$
2. $\Box(q \Rightarrow \Box\neg p)$

Exercice 4 : *Français vers LTL*

Donner des formules de LTL qui formalisent les propriétés suivantes :

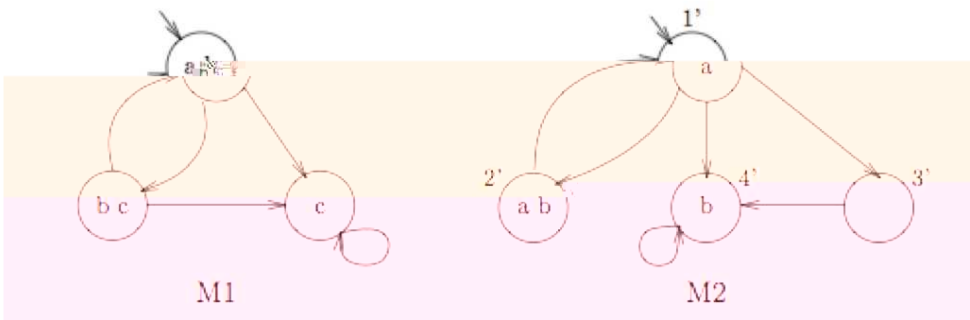
1. Deux feux de croisements ne sont jamais au vert simultanément.
2. Si la porte est ouverte, elle sera fermée à l'étape suivante.
3. p devient vraie avant r.

4. Inévitablement, la première porte est ouverte ou la deuxième porte est ouverte.
5. Aucune autre commande de café n'est acceptée entre l'acquittement de la somme due et l'enlèvement du gobelet.
6. p a lieu au plus une fois.
7. p a lieu au plus deux fois.
8. Le feu clignote toujours.
9. Dans un ascenseur, si on appuye sur le bouton d'un étage, la porte s'y ouvrira.
10. Les feux s'allument toujours dans l'ordre vert, jaune, rouge et puis vert, etc. avec un seul feu allumé à la fois.

<u>Exercice</u> 5 : *Vérification de LTL*

Indiquez quelle est la valeur de vérité pour les deux formules LTL suivantes par rapport aux structures de Kripke ci-dessous.

1. $\Box(b \Rightarrow \Diamond b)$
2. $a\mathcal{U}b$



<u>Exercice</u> 6 : *Comparaison de formules*

Comparer les formules suivantes. Est-ce qu'elles sont équivalentes ? Est-ce que l'une implique l'autre ?

1. Comparer $\Box(\Diamond p \wedge \Diamond q)$ et $\Box\Diamond p \wedge \Box\Diamond q$.
2. Comparer $\Diamond(\Box p \wedge \Box q)$ et $\Diamond\Box p \wedge \Diamond\Box q$.
3. Comparer $\Box(\Diamond p \vee \Diamond q)$ et $\Box\Diamond p \vee \Box\Diamond q$.
4. Comparer $\Diamond(\Box p \vee \Box q)$ et $\Diamond\Box p \vee \Diamond\Box q$.
5. Comparer $\Box\Diamond(p \wedge q)$ et $\Box\Diamond p \wedge \Box\Diamond q$.
6. Comparer $\Box\Diamond(p \vee q)$ et $\Box\Diamond p \vee \Box\Diamond q$.
7. Comparer $\Diamond\Box(p \wedge q)$ et $\Diamond\Box p \wedge \Diamond\Box q$.
8. Comparer $\Diamond\Box(p \vee q)$ et $\Diamond\Box p \vee \Diamond\Box q$.
9. Comparer $q\mathcal{U}\Diamond p$ et $\Diamond p$.
10. Comparer $\Box q \vee \Box(\neg p)$ et $(\Diamond p) \Rightarrow \Box q$.